

MATEMATIKAI KÉPLETEK ÉS PÉLDATÁR A MEGÚJULÓ ENERGIAFORRÁSOK TÉMAKÖRÉBEN

PESÁK DÓRA ZITA¹, OLÁHNÉ TÉGLÁSI ILONA², MIKA JÁNOS³

DOI: 10.12700/PK.2026.172

Eszterházy Károly Katolikus Egyetem

¹pedzysep@gmail.com, ²teglasi.ilona@uni-eszterhazy.hu,

³mika.janos@uni-eszterhazy.hu

ABSZTRAKT

A kutatás célja egy olyan példatár összeállítása, amely segíti a matematika tanítását a megújuló energiaforrások témakörén keresztül. A példatár különböző nehézségi szinteket tartalmaz, így alkalmazható középiskolai és felsőoktatási környezetben is. A gyűjteményben összesen 53 feladat szerepel, amelyek megoszlása az egyes energiafajták között a következő: bioenergia (7 feladat), geotermikus energia (9), napenergia (11), szélenergia (11), vízenergia (10) és óceáni energiafajták (7 feladat). A jelen tanulmány a képleteket és a feladatokat tartalmazza. A megoldások terjedelmi okokból csak a kutatást minden részletében bemutató internetes változatban (<https://uni-eszterhazy.hu/matinf/m/e-jegyzet/tamop-e-jegyzetek-75/tamop-jegyzetek/>) találhatóak.

KULCSSZAVAK: matematika, példatár, megújuló energiaforrások, fenntarthatóság

BEVEZETŐ

A 21. század globális kihívásai közül az egyik legsürgetőbb a fenntartható energiagazdálkodásra való áttérés. A megújuló energiaforrások alkalmazása ma már nem csupán elszigetelt környezetvédelmi törekvés, hanem olyan komplex gazdasági, technológiai és társadalmi transzformáció, amely alapjaiban határozza meg a jövő fenntartható fejlődését. Ezen átmenet sikere azonban nagymértékben függ attól, hogy a jövő generációi – a mai diákok – mennyire válnak képessé arra, hogy megértsék, elemezzék és kritikusan szemléljék az energetikai rendszerek működését.

A modern természettudományos és mérnöki oktatásban (STEM) egyre hangsúlyosabbá válik az interdiszciplinaritás, vagyis a különböző tudományterületek összekapcsolása. A matematika hagyományosan az absztrakt gondolkodás fejlesztésének eszköze, ám valódi ereje és motivációs bázisa a gyakorlati alkalmazhatóságban rejlik. A megújuló energiák témaköre kiváló és kimeríthetetlen kontextust biztosít ahhoz, hogy a matematikai összefüggéseket életszerű, aktuális problémákon keresztül mutassuk be.

Az energiahozam-becslések, a hatékonysági mutatók számítása, valamint a beruházások gazdaságossági elemzése mind olyan összetett matematikai eszközrendszer igényelnek, amelyek hidat képeznek az elméleti képletek és a mindennapi valóság között.

Jelen tanulmány célja egy olyan hiánypótló feladatgyűjtemény és módszertani segédanyag bemutatása, amely a megújuló energiaforrások különböző típusain keresztül támogatja a matematika tanítását. A példatár struktúrája úgy lett kialakítva, hogy figyelembe vegye a különböző oktatási szintek sajátosságait, a feladatok rugalmas nehézségi szintezése lehetővé teszi a differenciált alkalmazást a középiskolai oktatástól egészen a felsőoktatás alapozó szakaszáig.

A gyűjteményben szereplő feladatok nemcsak a matematikai kompetenciák és a logikus gondolkodás elmélyítését szolgálják, hanem közvetlenül hozzájárulnak a tanulók környezettudatos szemléletformálásához is. A kontextusba ágyazott feladatmegoldás révén a diákok közelebb kerülhetnek a fenntarthatóság mögött meghúzódó biológiai, fizikai és gazdasági törvényszerűségekhez, miközben a pedagógusok egy módszertanilag sokszínű, inspiráló oktatási segédanyagot kapnak a kezükbe.

1. A MEGÚJULÓ ENERGIAFORRÁSOK FAJTÁI ÉS ÉRTÉKELÉSE

1.1 Bioenergia

A bioenergia a növények, állati hulladékok és egyéb szerves anyagok elégetésével vagy biológiai lebontásával előállított energiaforma. (<https://greendex.hu/biomassza/>) Ez az egyik legrégebbi energiatermelési módszer, amelyet már az emberiség kezdetétől fogva használnak.

1.1.1 A bioenergia típusai és hasznosítása

Szilárd bioenergia: tűzifa, pellet, faapríték és más növényi hulladék elégetése.

Folyékony bioüzemanyagok: *bioethanol*, kukoricából, cukornádból vagy egyéb növényi anyagokból előállított alkohol, amit benzin helyettesítésére vagy keverésére használnak;

Biodízel: növényi olajokból és állati zsírokból készült üzemanyag, dízelmotorokhoz.

Gáz halmazállapotú bioenergia: (*biometán* szerves hulladék anaerob bontásával).

1.1.2 Előnyök

A bioenergia megújuló és fenntartható alternatívát kínál, mivel a növényi alapanyagok felelős gazdálkodás mellett folyamatosan pótolhatók. Emellett komoly szerepet játszik a hulladékhasznosításban is, hiszen csökkenti a mezőgazdasági és kommunális hulladék mennyiségét. Környezeti szempontból nagy előnye a kedvező szén-dioxid-mérleg: mivel a növények életük során fotoszintézissel megkötik a szén-dioxidot, energetikai hasznosításuk lényegesen kisebb nettó emisszióval jár, mint a fosszilis energiahordozók égetése.

1.1.3 Hátrányok

Az égetési folyamat során szálló por, szén-monoxid és egyéb légszennyező anyagok keletkeznek, ami komoly szűrési feladatokat igényel. Emellett a növényi alapanyagok energiasűrűsége elmarad a fosszilis forrásokétól. Mivel az energiatartalmuk kisebb, lényegesen nagyobb mennyiségű alapanyagra van szükség ahhoz, hogy a hagyományos energiahordozókkal azonos energiahozamot érjünk el.

1.2 Geotermikus energia

A geotermikus energia a Föld belső hőjéből származik, amely a bolygó keletkezése óta felhalmozódott hőenergia, illetve a radioaktív bomlás következtében folyamatosan termelődik. (Mándliné, 2006., Takács, 2010.) Ez az energiaforrás hosszútávon fenntartható és számos alkalmazási lehetőséget kínál, különösen olyan területeken, ahol a geológiai adottságok kedvezőek (például vulkanikus övezetekben). (<https://greendex.hu/geotermikus-energia/>)

1.2.1 A geotermikus energia típusai és felhasználása

„A villamosenergia termelés technológiáját alapvetően befolyásolja a geotermikus fluidum entalpiája. Hőmérsékletük alapján megkülönböztetünk alacsony, közepes és magas entalpiájú termálvizet.” (<https://www.mgte.hu/geotermikus-villamosenergia-termeles/>)

A Magyar Geotermális Egyesület (MGTE) szerint a geotermikus fluidumokat hőmérsékletük alapján az alábbi kategóriákba sorolják– fontos megjegyezni, hogy a hőmérsékleti határok nem egységesek, és különböző források eltérő értékeket adhatnak meg – (Kaderják, 2012.):

- Alacsony hőmérsékletű geotermikus energia: 90–125 °C-os termálvizek, amelyeket fűtési célokra vagy fürdőkben használnak, elterjedt, különösen a termálfürdők és mezőgazdasági üvegházak fűtésére.
- Közepes hőmérsékletű geotermikus energia: 125–150 °C-os hőmérsékletű forrásokat hőcserélők és turbinák segítségével használnak. Ipari és távfűtési rendszerekben alkalmazzák.
- Magas hőmérsékletű geotermikus energia: 150–225 °C-os hőmérsékletű vízgőz vagy forró víz felhasználásával villamosenergiát termelnek geotermikus erőművekben. Leggyakrabban vulkanikus területeken található meg (pl. Izland, Japán, az USA nyugati államai).

A hőszivattyús rendszerek a talajhőmérsékletet (kb. 10–15 °C) hasznosítják fűtési és hűtési célokra a környezetből (levegő, talaj vagy talajvíz) alacsony hőmérsékletű energiát elvonva, és azt egy kompresszor segítségével magasabb hőmérsékletre emelve használják fel épületek fűtésére, hűtésére és használati melegvíz előállítására.

1.2.2 Előnyök

A geotermikus energia alkalmazása számos jelentős előnnyel jár mind környezeti, mind gazdasági szempontból:

- Környezetbarát: nem termel szén-dioxidot vagy más káros anyagokat.
- Folyamatosan elérhető: nem függ az időjárástól, így állandó energiaforrás.
- Hosszú távon gazdaságos: A működési költségek alacsonyak, miután a rendszerek kiépültek.

1.2.3 Hátrányok

A számos előny mellett ugyanakkor a geotermikus energia kiaknázása komoly kihívásokkal és kockázatokkal is jár:

- Magas beruházási költségek: a fúrás és az infrastruktúra kiépítése drága.
- Földrajzi korlátok: nem minden régióban elérhető megfelelő hőmérsékletű geotermikus forrás.
- Talajsüllyedés és földrengésveszély: a mélyfúrások földtani hatásokat idézhetnek elő.

1.3 Napenergia

A napenergia a Napból érkező elektromágneses sugárzás formájában elérhető energia, amelyet különféle technológiák segítségével villamos és hőenergiává lehet alakítani. Ez az egyik legnagyobb potenciállal rendelkező megújuló energiaforrás, mivel a Földre érkező napsugárzás mennyisége messze meghaladja az emberiség éves energiaigényét. (Molnár, 2007., Újfaludi, 2004.)

1.3.1 A napenergia hasznosításának típusai

- Fotovoltaikus (PV) rendszerek: A napsugárzást közvetlenül villamos energiává alakítják félvezető anyagokat tartalmazó napelemek segítségével. Legelterjedtebb formája a lakossági és ipari napelemes rendszerek.
- Napkollektoros rendszerek: A Nap hőenergiáját használják fel melegvíz előállítására vagy fűtésre. Jellemzően háztartásokban, medencék fűtésére vagy távfűtési rendszerekben alkalmazzák.
- Naphőerőművek: A napenergiát tükrök segítségével koncentrálnak egy központi pontba, ahol hőenergiává alakul, majd ezt turbinák hajtására használják. Elsősorban nagy léptékű, közüzemi villamosenergia-termelésre alkalmas technológia.

1.3.2 Előnyök

A megújuló energiaforrások között a napenergia hasznosítása az egyik legdinamikusabban fejlődő terület, amely számos egyedi előnnyel rendelkezik.

- Korlátlan és ingyenes energiaforrás: a Napból érkező energia gyakorlatilag végtelen, és használata nem jár közvetlen költségekkel.
- Környezetbarát: nem bocsát ki szén-dioxidot vagy más szennyező anyagot működés közben.
- Decentralizált energiaellátás: lakossági rendszerek révén csökkenthető az energiahálózattól való függés.

1.3.3 Hátrányok

A technológia elterjedését ugyanakkor több jelentős korlátozó tényező is nehezíti.

- Időjárás- és napszakfüggő termelés: az energiatermelés csak napsütéses időben lehetséges, éjszaka és felhős időben korlátozott.

- Energiatárolási igény: a termelés és fogyasztás időbeli eltérése miatt akkumulátorokra vagy hálózati kiegyenlítésre van szükség.
- Magas kezdeti beruházási költség: bár hosszú távon megtérül, a napelemes rendszerek telepítése jelentős kiadással járhat.

1.4 Szélenergia

A szélenergia a légmozgások – vagyis a szél – mozgási energiáját hasznosítja. A szelet a Föld légkörének felmelegedése, a felszín különböző hőkapacitása és a Föld forgása idézi elő, vagyis a Napból származó energia közvetett formája. A szélenergia átalakítása villamos energiává szélturbinák segítségével történik. (Patay, 2003, Ledács, 1980. Szlivka-Molnár, 2012.)

1.4.1 A szélenergia hasznosítása

A szélturbinák a szél mozgási energiáját mechanikai energiává, majd generátor segítségével villamos energiává alakítják. A lapátokat a szél megforgatja, ez meghajtja a generátort, ami áramot termel. A turbinák lehetnek (Ledács, 1980.):

- Szárazföldi szélerőművek: általában mezőgazdasági területeken, dombokon vagy síkságokon telepítik őket.
- Tengeri szélerőművek: a tengerbe telepített turbinák, ahol a szél egyenletesebb és erősebb, így nagyobb hatékonyság érhető el.

1.4.2 Előnyök

A megújuló energiaforrások közül a szélenergia is kulcsfontosságú szerepet tölt be, hiszen egy kifejezetten tiszta és fenntartható alternatívát kínál.

- Megújuló és tiszta energiaforrás: a szélenergia termelése során nincs szén-dioxid-kibocsátás vagy légszennyezés.
- Alacsony üzemeltetési költségek: a telepítés után a karbantartási költségek viszonylag alacsonyak.
- Gyors technológiai fejlődés: a szélturbinák egyre hatékonyabbak és gazdaságosabbak.

1.4.3 Hátrányok

A szélenergia széles körű alkalmazása ugyanakkor sajátos infrastrukturális és ökológiai kihívásokat is felvet.

- Időjárás- és helyfüggő termelés: a szél nem fúj mindig, így az áramtermelés ingadozó.
- Tájképi és zajterhelés: a turbinák látványa és zaja egyes területeken vitákat vált ki, különösen lakóövezetek közelében.
- Veszély a madárvilágra: bizonyos esetekben a turbinák madarakra és denevérekre veszélyesek lehetnek.

1.5 Vízenergia

A vízenergia a Föld egyik legősibb és legmegbízhatóbb megújuló energiaforrása, amely a víz mozgási energiáját alakítja át villamos energiává vagy mechanikai munkává. Az

energiatermelés alapja a víz körforgása, amelyet a Nap hajt: a víz elpárolog, felhőkké alakul, majd csapadék formájában visszakerül a felszínre, ahol folyókba, tavakba és tengerekbe áramlik. (Szlivka-Molnár, 2012.)

A vízenergia előnyei közé tartozik a megbízhatóság, a hosszú élettartamú erőművek és a széndioxid-mentes üzemeltetés. Hátrányai között említhető az ökoszisztémákra gyakorolt hatás, a folyók és tavak vízszintváltozása, valamint az építés magas költsége. (Bárdossy, 2002.)

1.5.1 A vízenergia forrásai és típusai

A vízenergia többféle módon hasznosítható, attól függően, hogy milyen víztömegek mozgását használjuk ki (Szlivka-Molnár, 2012.):

- Folyóvízi erőművek: a folyók természetes áramlását kihasználva termelnek villamos energiát. Ezek lehetnek kisebb méretűek (például kis vízerőművek), vagy nagyobb duzzasztógátakkal kombinált rendszerek.
- Tározós vízerőművek: egy mesterséges tározó segítségével szabályozható az energiatermelés, így az igényeknek megfelelően növelhető vagy csökkenthető a termelés.
- Szivattyús energiatározók: ezek speciális rendszerek, amelyek a felesleges energiát felhasználva vizet szivattyúznak egy magasabb tározóba, majd, amikor szükség van rá, a vizet visszaengedik, és energiát termelnek vele.
- Árapály- és hullámenergia: a tengerek és óceánok vízmozgását hasznosítják. Az árapályerőművek a dagály és az apály közötti szintkülönbséget, míg a hullámenergia-rendszerek a tenger hullámainak mozgási energiáját alakítják át villamos energiává.

1.5.2 A vízenergia fenntarthatósága és hatásai

A vízenergia környezetbarát, de vannak negatív hatásai:

- Ökoszisztémák változása: a halak vándorlási útvonalai megszakadhatnak.
- Üledéklerakódás: a tározók eliszaposodása csökkentheti az erőművek hatékonyságát.
- Társadalmi hatások: az egyes vízerőművek építése települések kitelepítését is eredményezheti.

Bár a vízenergia az egyik legjelentősebb megújuló forrás, a nagyméretű gátak és vízerőművek komoly beavatkozást jelentenek a helyi ökoszisztémákba. Emiatt a modern mérnöki gyakorlatban egyre hangsúlyosabbá válnak azok a megoldások, amelyek célja a környezeti terhelés minimalizálása és a fenntarthatóság növelése.

A fenntartható vízenergia megoldásai lehetnek pl. (Szlábik, 2010.):

- Halátjárók építése – A halak vándorlásának biztosítására.
- Üledékkezelési stratégiák – A tározók élettartamának növelésére.
- Kis vízerőművek – fejlesztése, amelyek kevésbé avatkoznak be a környezetbe.

2. FELHASZNÁLT KÉPLETEK

A megújuló energiaforrások elméleti alapjainak, működési elveinek és környezeti hatásainak megismerését követően a gyakorlati alkalmazás kulcsfontosságú lépése a rendszerek pontos energetikai és gazdasági méretezése. A fenntartható technológiák tervezése és optimalizálása során elengedhetetlen a fizikai folyamatok egzakt matematikai leírása. Ez a fejezet azokat a legfontosabb összefüggéseket és számítási modelleket foglalja össze, amelyek segítségével számszerűsíthetők a biomassa, a geotermia, a nap- és szélenergia, valamint a vízenergia rendszereinek kapacitásai, hatásfokai és hozamai. Az itt bemutatott képlettár közvetlen elméleti háttérrel biztosít a következő részben található gyakorlati példák sikeres megoldásához. A teljes kidolgozott példatár az Eszterházy Károly Katolikus Egyetem honlapján érhető el.

2.1 A bioenergia fizikai alapjai

Az égés során felszabaduló energia (Halász, 2009.):

$$E = m \cdot Q, \text{ ahol} \quad (2.1)$$

Ahol: m az elégetett bioenergia tömege (kg), Q pedig a bioenergia fűtőértéke $\left(\frac{MJ}{kg}\right)$.

A bioenergia elektromos energiaátalakítási hatásfoka (Halász, 2009.):

$$E_{hasznosított} = E_{összes} \cdot \eta \quad (2.2)$$

Ahol: η a rendszer hatásfoka, E az energia (kWh).

A bioenergia tüzelésével hőt termelhetünk, amelyet villamos energiává alakíthatunk erőművekben.

2.2 A geotermikus energia fizikai alapjai

A geotermikus erőművek energiatermelésének alapja a következő képlet (Mándlné, 2006.):

$$P = \eta \cdot m \cdot c_p \cdot \Delta T, \quad (2.3)$$

Ahol: P a termelt teljesítmény (W), η a rendszer hatásfoka, m a kitermelt víz tömege (kg), c_p a víz fajhője $\left(\frac{J}{K}\right)$, ΔT a víz hőmérséklet-változása. „A hőszivattyúban lezajló körfolyamatot a teljesítmény-tényezővel (Coefficient of Performance) jellemzik.

A COP kifejezi, hogy a hasznos energia hányszorosa a befektetett, azaz a kompresszorban felhasznált energiának. (Mándlné, 2006.)

$$COP = \frac{Q_{out}}{W_{in}}, \quad (2.4)$$

Ahol: Q a hasznos hőenergia $\left(\frac{MJ}{kg}\right)$, W (kWh) a felhasznált energia.

2.3 A geotermikus energia gazdaságossága

A geotermikus energia gazdaságosságát a megtérülési idővel (T) jellemezhetjük:

$$T = \frac{\text{beruházás költsége}}{E_{\text{éves}} \cdot \text{áram ára}} \quad (2.5)$$

Ahol: $E_{\text{éves}}$ az éves energiahozam (kWh).

Az alábbiakban a napenergia-hasznosítás matematikai modellezését és számítási módszereit tekintjük át.

2.4 A napelemek teljesítménye

A napelemek a fotovoltai hatás révén alakítják át a napsugárzást elektromos energiává. A napelem által termelt teljesítmény kiszámítása az alábbi képlettel történhet (Molnár, 2007.):

$$P = \eta \cdot I \cdot A, \quad (2.6)$$

Ahol: P a napelem által termelt elektromos teljesítmény (W), η a napelem hatásfoka (jellemzően 15–22% közötti), I a felszínre érkező napsugárzás intenzitása $\left(\frac{W}{m^2}\right)$, A pedig a napelem felülete (m).

2.5 A napelem által termelt energia időfüggése

Ha a teljesítmény nem állandó, akkor a felhasznált energia az időfüggő teljesítmény integráljaként számítható:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt, \quad (2.7)$$

Ahol: E a felhasznált energia (J), $P(t)$ az időfüggő teljesítmény (W), és t_1 , t_2 az időintervallum kezdete és vége (s). (Erostyák-Litz, 2002.)

2.6 A napenergia gazdaságossága

A napelemek gazdaságosságát a megtérülési idővel (T) jellemezhetjük:

$$T = \frac{\text{beruházás költsége}}{E_{\text{éves}} \cdot \text{áram ára}} \quad (2.8)$$

Ahol: $E_{\text{éves}}$ az éves energiahozam (kWh).

2.7 A szélenergia fizikai alapjai

A szél mozgási energiája a következő képlettel adható meg (Hallenga, 2009.):

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2, \quad (2.9)$$

Ahol: E a szél mozgási energiája (J), m a levegő tömege (kg), és v a szélssebesség $\left(\frac{m}{s}\right)$.

Mivel a szélturbina egy adott idő alatt a rajta áthaladó levegő mozgási energiáját alakítja át, a szélenergia teljesítményét az alábbi módon fejezhetjük ki (Hallenga, 2009.):

$$P = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^3, \quad (2.10)$$

Ahol: P a szélben rejlő teljesítmény (W), ρ a levegő sűrűsége (kb. $1,225 \left(\frac{kg}{m^3}\right)$ tengerszinten és $15^\circ C$ -on) és v a szélssebesség $\left(\frac{m}{s}\right)$.

A fenti képlet azt mutatja, hogy a szélssebesség növekedése a termelhető energia jelentős növekedését eredményezi, mivel a teljesítmény a sebesség harmadik hatványával arányos. Ezért a szél erőműveket olyan helyekre telepítik, ahol a szélssebesség rendszeresen magas.

A lefedett terület (A) egyenlete:

$$A = \pi \cdot r^2, \quad (2.11)$$

Ahol: r a rotor sugara.

Ez azt jelenti, hogy a nagyobb lapátátmérőjű turbinák több energiát képesek kinyerni a szélből.

2.8 A Betz-határ és a turbinák hatásfoka

A szélturbinák nem képesek a teljes mozgási energiát elektromos energiává alakítani, mivel a szélnek tovább kell haladnia a rotoron keresztül. A Betz-határ kimondja, hogy egy ideális szélturbina a szél energiájának maximum 59,3 %-át képes kinyerni. (Szlivka, 2012.)

A ténylegesen kinyert teljesítmény a következőképpen számítható (Szlivka, 2012.):

$$P_{turbina} = C_p \cdot 1 \cdot \rho \cdot A \cdot v^3, \quad (2.12)$$

Ahol: C_p a teljesítmény-együttható.

2.9 A szélenergia-termelés időfüggése

A 2.5. alfejezetben ismertetett általános összefüggés itt is érvényes. Ha a teljesítmény nem állandó, akkor a felhasznált energia az időfüggő teljesítmény integráljaként számítható:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt, \quad (2.7)$$

Ahol: E a felhasznált energia (J), $P(t)$ az időfüggő teljesítmény (W), és t_1 , t_2 az időintervallum kezdete és vége (s). (Erostyák-Litz, 2002.)

2.10 Szélsebesség eloszlás modell

A szélsebességet, mint valószínűségi változót gyakran Weibull eloszlással közelítjük. (Tóth-Horváth, 2003.)

Az x valószínűségi változó valószínűség-sűrűségfüggvénye:

$$f(x; \lambda, k) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1}, & \text{ha } x \geq 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

A Weibull-eloszlás egy folytonos valószínűség-eloszlás, amelyet két vagy három paraméterrel írhatunk le:

1. Alakparaméter (k): Ez a paraméter határozza meg az eloszlás alakját.
 - Ha $k = 1$, akkor az eloszlás exponenciális.
 - Ha $k < 1$, akkor az eloszlás csökkenő meghibásodási rátát jelez.
 - Ha $k > 1$, akkor az eloszlás növekvő meghibásodási rátát jelez.
2. Skálaparaméter (λ): Ez a paraméter az eloszlás nyújtását vagy zsugorodását határozza meg. Az eloszlás középpontját szabályozza, és befolyásolja a szélességét.
3. Helyparaméter (γ) (opcionális): Ez a paraméter eltolja az eloszlást a tengely mentén.

Ha $\gamma = 0$, akkor a helyparamétert gyakran elhagyják, és kétparaméteres Weibull-eloszlásról beszélünk.

2.11 A szélenergia gazdaságossága

A szélenergia-rendszerek költséghatékonyosságát a megtérülési idővel (T) lehet jellemezni:

$$T = \frac{\text{beruházás költsége}}{E_{\text{éves}} \cdot \text{áram ára}}, \text{ ahol} \quad (2.14)$$

Ahol: $E_{\text{éves}}$ az éves energiahozam (kWh).

2.12 A vízenergia matematikai számítása

A víz energiáját két fő formában használjuk fel:

- Potenciális energia (7.2) – amikor a víz egy adott magasságból lezúdul.
- Kinetikus energia (7.3) – amikor a víz folyás közben mozgatja a turbinát.

A víz helyzeti energiája (potenciális energia) az alábbi képlettel számítható (Halász, 2009.):

$$E_p = m \cdot g \cdot h, \quad (2.15)$$

Ahol: m a víz tömege, g a gravitációs gyorsulás ($9,81 \frac{m}{s^2}$), és h a víz esési magassága.

A víz tömege és térfogata közötti összefüggés (Halász, 2009.):

$$m = \rho \cdot V \quad (2.16)$$

$$E_p = \rho \cdot V \cdot g \cdot h \quad (2.17)$$

Így az alábbi képletet kapjuk:

A vízáramlás teljesítménye az alábbi módon határozható meg (Bartholy et al, 2013., Szlivka, 2012.):

$$P = \eta \cdot \rho \cdot g \cdot Q \cdot h, \quad (2.18)$$

Ahol: P a termelt teljesítmény (W), η a rendszer hatásfoka (általában 80-90% között), ρ a víz sűrűsége ($\frac{kg}{m^3}$), g a gravitációs gyorsulás, Q a vízhozam ($\frac{m^3}{s}$) és h a víz esési magassága.

A képletből látható, hogy minél nagyobb a víz mennyisége (Q) és az esési magassága (h), annál több energiát tudunk kinyerni a rendszerből.

A tengerekből kinyerhető energiát a nemzetközi szakirodalom általában külön tárgyalja a szárazföldi vízenergiától. Mivel azonban hazánkban nincs tenger, néhány képlet erejéig ebben a fejezetben utalunk erre az energiafajtára.

Az óceáni hőenergia átalakítás (OTEC), Carnot-hatékonyság ((Bartholy et al, 2013.):

$$\eta = 1 - \frac{T_c}{T_h}, \quad (2.19)$$

Ahol: T_c a hideg réteg hőmérséklete (K), T_h a meleg réteg hőmérséklete (K).

2.13 Árapály- és hullámenergia matematikája

Az árapály- és hullámenergia a tengerek mozgásából nyeri az energiát.

Az árapály-energia teljesítménye (Bartholy et al, 2013)

$$P = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot g \cdot h^2, \quad (2.20)$$

Ahol: ρ a víz sűrűsége, A az árapály-erőmű területe (m^2), g a gravitációs gyorsulás, és h az árapályszint különbsége (m).

A hullámenergia egy adott vízszakaszon (<https://x-engineer.org/wave-energy/>):

$$P = \frac{1}{16} \cdot \rho \cdot g \cdot h_s^2 \cdot t, \quad (2.21)$$

Ahol: ρ a víz sűrűsége, g a gravitációs gyorsulás, és h a hullámmagasság (m), t pedig a hullám periódusideje (s).

3. FELADATOK

3.1 Bioenergia

1. A következő táblázat (táblázat forrása: <https://napraforgo-brikett.hu/fa-futoertek-tablázat/>) segítségével válaszoljon az alábbi kérdésekre!

Tüzelőanyag	Fűtőérték ($\frac{MJ}{kg}$)
Akác	14,9
Bükk	15,6
Erdei fenyő	14,1
Éger	15,5
Fűz	14,1
Gyertyán	15,8
Juhar	14,5
Kóris	16,9
Lucfenyő	13,8
Napraforgó brikett	19-21
Nyár	13,4

Nyír	14,2
Tölgy	15,1
Vörös fenyő	14,2

Kérdések:

- Melyik fatípusnak a legkisebb, illetve a legnagyobb a fűtőértéke!
 - Számolja ki a táblázatban szereplő fatípusok fűtőértékének átlagát, mediánját!
 - Hány százalékkal magasabb a legnagyobb fűtőértékkel rendelkező tüzelőanyag a legalacsonyabbnál?
- Egy kg fa elégetése során 15 MJ hő szabadul fel. Ha egy háztartás $1\,000 \text{ kg}$ fát éget el egy szezonban, mennyi energia szabadul fel összesen?
 - Egy biogázüzem napi $5\,000 \text{ m}^3$ metángázt termel, amelynek fűtőértéke $36 \frac{\text{MJ}}{\text{m}^3}$. Mennyi az ebből nyerhető napi energia?
 - Egy biomassza erőmű óránként 100 t fát éget el, amelynek fűtőértéke $14 \frac{\text{MJ}}{\text{kg}}$. Ha a hatásfok 35% , mennyi a tényleges kimenő teljesítmény?
 - „A biomassza szénhidrogén kötése magas hőmérsékleten megbomlanak, hő hatására a szerves anyagból oxigénszegény környezetben hidrogén, szén-monoxid és metán keletkezik.” (forrás: <https://greendex.hu/geotermikus-energia>)
Írja fel a metán vízgőzzel való érintkezésének reakcióegyenletét! (Hidrogén és széndioxid fog képződni.)
 - Számolja ki egy biomassza erőmű energiatermelését, ha a rendelkezésre álló biomassza tömege $1\,000 \text{ tonna}$, fűtőértéke $15 \frac{\text{MJ}}{\text{kg}}$, és a rendszer hatásfoka 25% !
 - Vizsgálja meg, mekkora biogáz termelésére képes egy adott mezőgazdasági hulladékmennyiség, ha naponta 500 kg szerves hulladék áll rendelkezésre, amely $0,3 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$ biogázt termelhet!

3.2 Geotermikus energia

- Ha egy geotermikus kútból $50 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ víz áramlik ki 80°C -on, és ezt 40°C -ra hűtik le. Mekkora a kinyert teljesítmény?
- Egy 50 MW teljesítményű geotermikus erőmű évi 400 GWh energiát termel. Ha a beruházási költség 100 milliárd Ft, és az áram ára $40 \frac{\text{Ft}}{\text{kWh}}$. Mekkora a megtérülési idő?
- Egy geotermikus kút óránként 50 m^3 80°C -os vizet hoz a felszínre, míg a visszasajtoláskor 30°C -os a víz. A víz fajhője $4,18 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$. Mekkora a hőteljesítmény?
- Ha az előző kút egy 15% -os hatásfokú geotermikus erőművet lát el, mekkora a kimenő villamos teljesítmény?

12. A következő táblázat (táblázat adatainak forrása: Mándlné, 2006.) segítségével válaszoljon az alábbi kérdésekre!

Ország	Az összes elektromos kapacitás (MW)	A geotermikus elektromos kapacitás (MW)
Costa Rica	1941	163
El Salvador	1079	151
Etiópia	700	7
Fülöp-szigetek	15205	1931
Guatemala	1941	33
Indonézia	36227	797
Kenya	1134	127
Mexikó	43318	953
Nicaragua	688	77
Pápua Új-Guinea	55	6

Kérdések:

- Számolja ki soronként, hogy mennyi a geotermikus elektromos kapacitás részaránya!
 - Melyik országban a legnagyobb a geotermikus elektromos kapacitás részaránya?
13. Egy geotermikus rendszer évente 500 M W h fűtési energiát biztosít. Ha földgázzal termelnék meg ezt az energiát, és a földgáz ára $14 \frac{Ft}{kWh}$, mennyi a megtakarítás?
14. Egy város geotermikus fűtőrendszere 20 M W hőteljesítményt igényel. Ha a kút vizének hőmérséklet-különbsége 50 °C, mekkora vízmennyiségre van szükség óránként?
15. Számolja ki egy geotermikus erőmű maximális teljesítményét, ha a geotermikus folyadék áramlási sebessége $100 \frac{kg}{s}$, a bemeneti hőmérséklete 180 °C, a kimeneti hőmérséklete 70 °C, és a generátor hatásfoka 15 %!
16. Egy geotermikus hőszivattyú rendszer hatásfokának elemzése során, mérje meg a COP-t (Coefficient of Performance), ha a rendszer 10 kW fűtési energiát biztosít, miközben 2 kW elektromos energiát fogyaszt!

3.3 Napenergia

17. Egy tipikus háztartási napelemrendszer 4 kW csúcsteljesítményre képes. Ha egy napsütéses napon 6 órán keresztül termel energiát, mekkora az összes megtermelt energia?
18. Egy 1 m^2 -es panel $200\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ besugárzást kap egy 5 órás időszakban, és a hatásfoka 15 %. Mekkora a megtermelt energia?
19. Ha egy 2 millió Ft -os napelemes rendszer évente $4\,000\text{ kWh}$ energiát termel, és az áram ára $50\frac{\text{Ft}}{\text{kWh}}$, mekkora a megtérülési idő?
20. Egy napelemtábla $1,5\text{ m}^2$ területű, és az átlagos besugárzás $800\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$. Ha a panel hatásfoka 18 %, mekkora a kinyert teljesítmény?
21. Egy 2 kW -os napelemes rendszer naponta átlagosan 5 órán keresztül kap megfelelő napsugárzást. Mennyi energiát termel egy nap alatt?
22. Egy napelemre $1\,200\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ napsugárzás érkezik, és a panel tényleges kimenő teljesítménye 240 W . Ha a panel területe $1,6\text{ m}^2$, mekkora a hatásfoka?
23. Egy 5 kW -os napelemrendszer telepítése $2,5$ millió Ft -ba kerül. Ha évente $6\,000\text{ kWh}$ -t termel, és az áram ára $50\frac{\text{Ft}}{\text{kWh}}$, hány év alatt térül meg?
24. Egy város $500\,000\text{ m}^2$ tetőfelületet tudna napelemekkel ellátni. Ha az éves besugárzás $1\,300\frac{\text{kWh}}{\text{m}^2}$, és a napelemek hatásfoka 20 %, mekkora az éves termelés?
25. Az Újszilvási Naperőmű éves energiatermelése: 700 MWh . Átlag napi 8 órás üzemidőt (napi 8 óra napsütést) figyelembe véve mekkora a pillanatnyi teljesítménye?
26. Tervezze meg egy háztartás napelemrendszerét, amely képes fedezni egy 4 fős család éves energiaigényét, ami $5\,000\text{ kWh}$! Számolja ki a szükséges napelemek összfelületét és darabszámát a rendelkezésre álló napsugárzás és napelemek hatásfoka alapján! (Tegyük fel, hogy a napi átlagos sugárzás $5\frac{\text{kWh}}{\text{m}^2}$, egy átlagos monokristályos panel hatásfoka 18 %, egy tipikus napelem panel mérete $1,6\text{ m}^2$, névleges teljesítménye pedig 400 W .)
27. Számolja ki egy adott napelem panel hatásfokát, ha a panel felülete $1,5\text{ m}^2$, és napi 7 kWh energiát termel, miközben a napsugárzás $6\frac{\text{kWh}}{\text{m}^2}$ naponta!

3.4 Szélenergia

28. Ha egy szélturbina rotorjának átmérője 40 méter, a szélsébség $10\frac{\text{m}}{\text{s}}$, és a teljesítmény-együttható 0,45. Mekkora az általa termelt energia?
29. Ha egy 2 milliárd Ft -os szélenergia-erőmű évente 10 millió kWh energiát termel, és az áram ára $50\frac{\text{Ft}}{\text{kWh}}$. Mekkora a megtérülési idő?

30. Egy szélturbina rotorjának átmérője 10 m . A levegő sűrűsége $1,225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, a szélesebbesség $8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Mekkora a levegő teljesítménye?
31. Ha az előző turbina tényleges kimenő teljesítménye 12 kW , akkor mekkora a hatásfoka?
32. Egy szélerőmű névleges teljesítménye 2 MW . Ha évente $2\,200$ órán át működik maximális teljesítményen, mekkora az éves energiatermelése?
33. Egy szélturbina átmérője 100 m , és a minimális telepítési távolság az átmérő 10-szerese. Hány turbina fér el egy 10 km^2 -es területen? Tegyük fel, hogy a turbinák egy négyzetrács pontjaiban helyezkednek el!
34. Egy szélpark 50 MW -os, és évente $140\,000\text{ MWh}$ energiát termel. Ha az áram ára $50 \frac{\text{Ft}}{\text{kWh}}$, és a beruházás 40 milliárd Ft volt, hány év alatt térül meg?
35. Számolja ki egy negyed hektárnyi terület szélenergia potenciálját, ha a szélesebbesség $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$! Az eredményt kW -ban adja meg!
36. Egy szélturbina maximális elméleti hatásfoka a Betz-határ ($59,3\%$). (Szlivka, 2012) Számolja ki a tényleges hatásfokot, ha a turbina által termelt energia 2 MW , a szélesebbesség $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, és a turbina rotorjának átmérője 100 méter.
37. Tervezze meg egy szélerőmű park elrendezését egy 10 km^2 -es területen, figyelembe véve a turbinák közötti minimális távolságot (például a rotor átmérőjének 7-szerese)! Tegyük fel, hogy a turbinák egy négyzetrács pontjaiban helyezkednek el, és a rotor átmérője legyen 100 m !
38. Egy gyártó cég azt tapasztalta, hogy az általuk gyártott izzók élettartama Weibull-eloszlású, ahol az alakparaméter (k) $1,5$ és a skálaparaméter (λ) $2\,000$ óra. Számítsa ki annak valószínűségét, hogy egy izzó élettartama kevesebb, mint 1500 óra.

3.5 Vízenergia

39. A következő táblázat (táblázat adatainak forrása: <http://www.nyf.hu/others/html/kornyezettud/megujulo/vizenergia/>) a kontinensek vízerőműveit mutatja.

Kontinens	Elméleti vízerőmű (TWh)	Műszakilag hasznosítható (TWh)	Összes villamos energiatermelés (TWh)	Vízenergia-termelés (TWh)
Európa	4360	1430	2599	453
Észak-Amerika	6150	3120	3202	642
Latin-Amerika	5670	3780	370	370
Afrika	10120	3140	234	49
Ázsia	20430	7530	3475	564
Óceánia	1500	390	161	39

Kérdések:

- Számolja ki soronként, hogy mennyi a vízenergia, illetve a műszaki vízerőkészlet hasznosíthatóságának aránya!
- Hány százaléka hasznosítható műszakilag a vízerőkészletnek az amerikai kontinensen?
- Mennyi a Föld elméleti vízerőkészlete?
- Számolja ki az alábbi táblázat segítségével, hogy mennyi TWh a különbség a műszakilag hasznosítható és a műszaki vízerőkészlet hasznosítottasága között kontinensenként!

Kontinens	Európa	Észak-Amerika	Latin-Amerika	Afrika	Ázsia	Óceánia
Műszaki vízerőkészlet hasznosítottasága (%)	32	21	7	2	7	10

- Az ikervári vízerőművet 1900-ban adták át, és ekkor $600 kW$ -os teljesítményű gépek működtek benne. Negyed évszázaddal később új turbinák és generátorok beszerelésével közel 256,67 %-kal növekedett a teljesítmény. 1995-ben újabb korszerűsítések történtek, melyek hatására a teljesítmény újabb 148,06 %-kal emelkedett.
 - Az újabb korszerűsítéseknek hála hány kW -tal lett több az erőmű teljesítménye az eredetihez képest?
 - A 95 év elteltével hány százalékkal nőtt a teljesítmény?
- Számolja ki a tiszalöki vízerőmű összhatásfokát, ha tudjuk, hogy az erőmű teljesítménye $12\,500 kW$, a víznyelése $300 \frac{m^3}{s}$, és az esésmagasság $5 m$!
- Egy vízerőmű turbinájába $10 \frac{m^3}{s}$ víz áramlik, és a szintkülönbség $20 m$. A gravitációs gyorsulás $9,81 \frac{m}{s^2}$. Mekkora a víz teljesítménye?
- Ha az előző erőmű generátora 85 %-os hatásfokú, mekkora a tényleges kimenő teljesítmény?
- Egy vízerőmű $5 MW$ teljesítménnyel működik, és évente $4\,000$ órán át üzemel. Mennyi az éves energiatermelése?
- Egy víztározóban 50 millió m^3 víz gyűlt össze, és a szintkülönbség $30 m$. Mennyi az összes tárolt energia?
- Egy $100 MW$ -os vízerőmű évi $500 GWh$ -t termel. Az áram ára $40 \frac{Ft}{kWh}$ -a beruházási költség 200 milliárd Ft . Hány év alatt térül meg?
- Számolja ki egy vízerőmű maximális teljesítményét, ha a vízhozam $500 \frac{m^3}{s}$, a víz esési magassága 50 méter, és a generátor hatásfoka 90% !

48. Számolja ki egy víztározó térfogatát, amely szükséges ahhoz, hogy egy 100 MW teljesítményű vízerőmű 10 órán keresztül folyamatosan működjön! A tározó víz szintjének átlagos esési magassága 40 méter.
49. Számolja ki a hullámenergia teljesítményét, ha a hullámok átlagos magassága 2 méter, és a periódusa 8 másodperc!
50. Határozza meg az árapály potenciális energiáját, ha a víz felszíne $5\,000\text{ m}^2$, és az árapály magassága 5 méter!
51. Egy OTEC rendszer esetén a felszíni víz hőmérséklete 25 °C , a mélyvíz hőmérséklete 5 °C . Számolja ki a rendszer Carnot-hatékonyságát!
52. Mekkora a hullámenergia teljesítménye, ha a hullámok átlagos magassága 1,5 méter, és a periódusa 12 másodperc?
53. Határozza meg az árapály potenciális energiáját, ha a víz felszíne $10\,000\text{ m}^2$, és az árapály magassága 4 méter!

ÖSSZEFOGLALÁS, KÖVETKEZTETÉSEK

A megújuló energiaforrások alkalmazása nem csupán környezetvédelmi szempontból fontos, hanem gazdasági és társadalmi hatásai miatt is. A példatár által a matematikai ismeretek gyakorlati alkalmazását lehetővé tesszük egy olyan témakörben, amely egyre nagyobb jelentőséggel bír a fenntartható fejlődés szempontjából.

A bemutatott matematikai összefüggések azt mutatják, hogy a megújuló energiaforrások kiaknázása sokszor összetett számításokat igényel, amelyek több tudományterület együttműködését feltételezik. Az energiahozam becslésétől kezdve a hatékonysági számításokon át a gazdaságossági elemzésekig számos matematikai eszköz áll rendelkezésre a megfelelő döntések meghozatalához. A példatár hozzájárul ahhoz, hogy a megújuló energiaforrásokkal kapcsolatos matematikai módszerek gyakorlati oldalát is megismerhessék a tanárok és diákok.

A feladatok életkori megkötés nélküli kidolgozása lehetővé teszi, hogy a példatár a középiskolai és akár a felsőoktatási oktatásban is felhasználják. A feladatok szerkesztése során törekedtünk arra, hogy a különböző megújuló energiaforrásokhoz kapcsolódó példák a tanulók számára érthetők legyenek, miközben matematikai kompetenciájukat is fejlesztik.

A példatár tehát nemcsak a matematikai gondolkodás erősítését segíti, hanem hozzájárulhat a fenntartható fejlődéssel kapcsolatos szemléletformáláshoz is. Reméljük, hogy a dolgozat anyaga ösztönzőleg hat majd további oktatási anyagok kidolgozására, és támogatja a tanárokat abban, hogy a matematikát életszerű és aktuális problémákon keresztül ismertessék meg a diákokkal.

IRODALOMJEGYZÉK

- Bárdossy, A. (2002): *Vízierőművek tervezése és üzemeltetése*, Műegyetemi Kiadó
- Bartholy, J., Breuer, H., Pieczka, I., Pongrácz, R., Radics, K. (2013): *Megújuló energiaforrások*, Eötvös Lóránd Tudományegyetem, Budapest
- Békési, Gy. (2009): *Szélergia: Az energia jövője*, Springer Hungarica Kiadó, Budapest
- Büki, G. (2004): *Erőművek*, Műegyetemi kiadó, Budapest
- Erostyák, J., Litz, J. (2002): *A fizika alapjai*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest
- Gööz, L. (1999): *A természeti erőforrásokról*, Nyíregyházi Főiskola, Nyíregyháza
- dr. Halász, T. (2009): *Fizika 9*, Mozaik Kiadó, Szeged
- Hallenga, Uwe (2009): *A szélergia hasznosítása*, Cser Könyvkiadó És Ker. Kft.
- Hegedűsné Baranyai, N. szerk. (2008): *Megújuló energiaforrások*, Mezőgazda Kiadó
- Kaderják, P. (2012): *Megújuló energiaforrások és az energiagazdálkodás jövője*, Corvina Kiadó, Budapest
- Kiss, Á., Tasnádi, P. (2012): *Környezetfizika*, Typotex, Budapest
- Laczó, D. (2012): *A megújuló energiaforrások kézikönyve*, Környezettudományi Központ, Budapest
- Láng, I. szerk. (2008): *Megújuló energiaforrások*, Akadémiai Kiadó, Budapest
- Ledács Kiss, A. (1980-82): *A szélergia hasznosításának lehetőségei Magyarországon* Energiagazdálkodási Tudományos Egyesület
- Mádlné Szőnyi, J. (2006): *A geotermikus energia*, Grafon, Nagykovácsi
- Molnár, L. (2007): *A napenergia hasznosítása*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest
- Obádovics J. Gy. (2009): *Valószínűségszámítás és matematikai statisztika*, Scolar, Kiadó, Budapest
- Patay, I. (2003): *A szélergia hasznosítása*, Szaktudás Kiadó Ház, Budapest
- Sági, N. (2010): *Megújuló energiák*, Typotex Kiadó, Budapest
- Szlábik, J. szerk. (2010): *Vízhasznosítás – Vízierő-hasznosítás*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

Szlivka, F., Molnár, I. (2012): *Víz- és szélergia hasznosítás*, Edutus Főiskola Kiadó, Tatabánya

Takács, J. (2010): *Geotermikus energia*, Műszaki Könyvkiadó

Tóth, L., Horváth, G. (2003): *Alternatív energia - Szélmotorok, szélgenerátorok*, Szaktudás Kiadó Ház, Budapest, 2003.

Ujfaludi, L. (2004): *Napenergia, a jövő energiaforrása*, Heves Megyei Önkormányzat, Pedagógiai Intézete, Eger

<http://www.nyf.hu/others/html/kornyezettud/megujulo/vizenergia/Vizenergia.html> (Utolsó letöltés: 2021. december 8.)

<https://www.mgte.hu/geotermikus-villamosenergia-termeles/>

<https://napraforgo-brikett.hu/fa-futoertek-tablazar/> (Utolsó letöltés: 2025. március 25.)

https://www.hds.bme.hu/letoltesek/targyak/BMEGEENAEK6/VH_foliak_1_2_3.pdf

<https://x-engineer.org/wave-energy/>

<https://slideplayer.hu/slide/11926176/>

<https://greendex.hu/geotermikus-energia/>

<https://greendex.hu/biomassza/>