



ÓBUDAI EGYETEM
ÓBUDA UNIVERSITY



Mérnöki Szimpózium a Bánkiban
(ESB 2025)



Szálerősített kompozit sporteszközök végeselem szimulációja

Finite element simulation of fiber-reinforced composite sports equipment

¹Mónus László József, ²Fábián Enikő Réka

¹Óbudai Egyetem, Anyagtudományok és Technológiák Doktori Iskola, Budapest
Magyarország, monuslaszlojosef@gmail.com

²Óbudai Egyetem, Bánki Donát Gépész és Biztonságtechnikai Mérnöki Kar, Budapest
Magyarország, fabian.reka@bgk.uni-obuda.hu

Összefoglalás

A csigás íjkarok a lövési ciklus során nagy intenzitású mechanikai terheléseknek vannak kitéve, amelyek a csigarendszer miatt a húzóerő többszörösét is elérhetik, különösen üresoldás esetén. Az íjkarokra ható erőket analitikus előszámításokkal határoztuk meg, majd a lehajlást Euler–Bernoulli rúdelmélet és Timoshenko rúdelmélet alkalmazásával vizsgáltuk. Az eredmények szerint a kis lehajlás is jelentős hatással van a feszültségállapatra és a dinamikai viselkedésre. A végeselem szimuláció segítségével meghatároztuk a szerkezet sajátfrekvenciáját. Az eredmények alapján megállapítható, hogy nagy terhelés esetén a csigás íjkarok akár az anyaguk terhelhetőségi határát is elérhetik, illetve egyes esetekben túl is léphetik azt.

Kulcsszavak: Timoshenko rúdelmélet, Euler–Bernoulli rúdelmélet, sajátfrekvencia, végeselem szimuláció, csigás íj.

Abstract

The limbs of compound bows are subjected to high-intensity mechanical loads during the shooting cycle, which, due to the cam system, may reach several times the applied draw force, particularly under dry-fire conditions. The forces acting on the bow limbs were determined using analytical pre-calculations, and the deflection was analyzed using Euler–Bernoulli beam theory and Timoshenko beam theory. The results indicate that even small deflections have a significant influence on the stress state and dynamic behavior of the limbs. Finite element simulations were used to determine the natural frequency of the structure. Based on the results, it can be concluded that under high loading conditions, compound bow limbs may reach or, in some cases, exceed their material load-bearing limits.

Keywords: Timoshenko beam theory, Euler–Bernoulli beam theory, natural frequency, finite element simulation, compound bow limb.

1 Bevezetés

A modern csigás íjak nagy terhelésnek kitéve, összetett szerkezetek, amelyeknél a nem megfelelő használat súlyos károsodásokhoz vezethet. Az egyik legkritikusabb jelenség az üresoldás („dry fire”), amikor a felhalmozott energia nem a nyílvevőn keresztül, hanem közvetlenül az íj

szerkezetére hat, extrém igénybevételt okozva. A sérülések jellemzően a csigák felőli oldalon alakulnak ki, ahol a repedések száírányban terjednek, ami a kompozit anyag felépítéséből adódik. Az ilyen károsodások nemcsak az íj teljesítményét rontják, hanem komoly balesetveszélyt is jelentenek, ezért a csigás íjak körültekintő és szabályszerű használata elengedhetetlen. [1][2]

2 Végeselem szimulációt megelőző számítások

A csigás íjak szerkezeti vizsgálata során alapvető fontosságú, hogy a végeselem szimulációt megelőzően számításokkal meghatározzuk a karokra ható fő erőhatásokat, mivel ezek segítenek azonosítani a leginkább igénybevett szerkezeti részeket. Bár a névleges húzóerő önmagában nem tűnik extrémnek, a csigarendszer áttétele és geometriai kialakítása miatt a karokra ható eredő erők és nyomatékok jelentősen megnövekednek, különösen a maximális feszítés közelében. Ez a megnövekedett mechanikai igénybevétel a kompozit karok belső szerkezetében repedésekhez, rétegelválásokhoz vagy törésekhez vezethet, ezért a keresztmetszet, anyagvastagság és rétegrend megfelelő megválasztása kritikus a biztonságos működéshez. Az 1. ábrán láthatóak a csigásíj karjához tartozó peremfeltételek. [3]



1. ábra Az íjkarhoz tartozó peremfeltételek

Az íjkar csiga felőli oldalára ható erő:

$$F_{\text{húzó}} = 60 \text{ lbf} = 60 \times 4,448 = 267 \text{ N} \quad (1)$$

$$F_{\text{csiga}} = 2 F_{\text{húzó}} = 2 \times 267 \text{ N} = 534 \text{ N} \quad (2)$$

A csiga ellipszis alakú, két hozzá tartozó sugárral 65 mm és 40 mm. A csiga hajlítónyomatéka:

$$534 \text{ N} \times 0,0525 \text{ m} = 28,035 \text{ Nm} \quad (3)$$

Az íjkarra ható erő növelve a csiga áttételével:

$$R = \frac{r_1}{r_2} = \frac{40\text{mm}}{65\text{mm}} = 0,615 \quad (4)$$

$$F_{\text{kar}} = \frac{F_{\text{húzó}}}{R} = \frac{267\text{N}}{0,615} = 434\text{N} \quad (5)$$

3 Euler-Brenoulli rúdelmélet

Az Euler–Bernoulli rúdelmélet a szilárdságtan egyik fontos pillére, amely a rúdak, gerendák hajlítás alatti viselkedését írja le olyan feltételezések mellett, mint a sík és merev keresztmetszetek

fennmaradása, a lineárisan rugalmas anyagviselkedés és a kis alakváltozások. A modell szerint a deformációt döntően a hajlítás határozza meg, míg a nyírási hatások elhanyagolhatók, így a lehajlás és a feszültségeloszlás egyetlen rugalmassági modulus, a Young-modulus segítségével jellemezhető:

$$\kappa(x) = \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (6)$$

Ahol $v(x)$ a lehajlás függvényét jelenti, x pedig a gerenda hosszirányú koordinátája. Ez az összefüggés alapvető szerepet játszik a szerkezeti analízisben, hiszen a görbület közvetlenül kapcsolódik a hajlítónyomatékhöz. [4][5]

A hajlítónyomatékot a következő módon határozzuk meg:

$$M(x) = EI \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (7)$$

Az E rugalmassági modulus és az I keresztmetszeti másodrendű nyomaték szorzataként definiált hajlítómerevség (EI) határozza meg a gerenda hajlítással szembeni ellenállását, és ez a kapcsolat teszi lehetővé a lehajlások, feszültségek és belső erők számítását különböző terhelési esetekben, miközben a függőleges elmozdulás a szerkezeti biztonság és működőképesség egyik legfontosabb mérnöki jellemzője, ami miatt az Euler–Bernoulli-elmélet egyszerűsítései ellenére is alapvető és széles körben alkalmazott modell marad. [4][5]

Az íjkar lehajlásának meghatározásához a keresztmetszet másodrendű nyomatéka szükséges, amely téglalap keresztmetszet esetén a klasszikus képlettel számítható ki:

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (8)$$

$$I = \frac{0,018 \times (0,012)^3}{12} = 2,592 \times 10^{-9} \text{ m}^4 \quad (9)$$

Az Euler–Bernoulli rúdelmélet differenciálegyenlete:

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} = q(x) \quad (10)$$

A csigás íj karjára koncentrált erő hat, ezért a maximális lehajlás a konzolos gerendákra ismert képlettel számítható ki:

$$v_{\max} = \frac{FL^3}{3EI} \quad (11)$$

$$v_{\max} = \frac{434 \text{ N} \times (0,25 \text{ mm})^3}{3 \times 18 \times 10^9 \text{ Pa} \times 2,592 \times 10^{-9} \text{ m}^4} = 0,0485 \text{ mm} \quad (12)$$

A számítások elvégzésével a maximális lehajlás 0,0485 mm értéket mutatott. A modell eredményei tehát egyértelműen azt mutatják, hogy a kar merev, mégis érzékeny lehet a hajlításra. [4][5]

4 Timoshenko rúdelmélet

A Timoshenko rúdelmélet az Euler–Bernoulli-modell továbbfejlesztett változata, amely a nyírási alakváltozást és a keresztmetszet elfordulását is figyelembe veszi, így pontosabban írja le a gerendák viselkedését rövid, vastag kompozit szerkezetek esetén. A modell szerint a teljes lehajlás

nemcsak a hajlítási deformációból, hanem a nyírási elmozdulásból is adódik, ezért a nyíróerő közvetlen hatással van a függőleges elmozdulásra. A keresztmetszet forgási tehetetlenségének figyelembevétele különösen fontossá teszi a Timoshenko modellt dinamikus és rezgésvizsgálatok során, ahol a klasszikus rúdelmélet már nem ad elegendő pontosságot. [6][7]

A Timoshenko rúdelmélet két alapvető kapcsolaton alapul:

$$M(x) = EI \frac{d\phi}{dx} \quad (13)$$

$$V(x) = kGA \left(\frac{dv}{dx} - \phi \right) \quad (14)$$

A kompozit íjkar végeelem szimulációs vizsgálata során a következő eredményeket kaptuk. A Timoshenko-féle hajlítás két összetevőből áll [6][7]:

$$V = V_{\text{hajlítás}} + V_{\text{nyírás}} \quad (15)$$

$$V_{\text{nyírás}} = \frac{FL}{kGA} \quad (16)$$

Ahol $k = 0,833$ - nyírási korrekciós tényező, G - nyírási modulus, A - keresztmet.

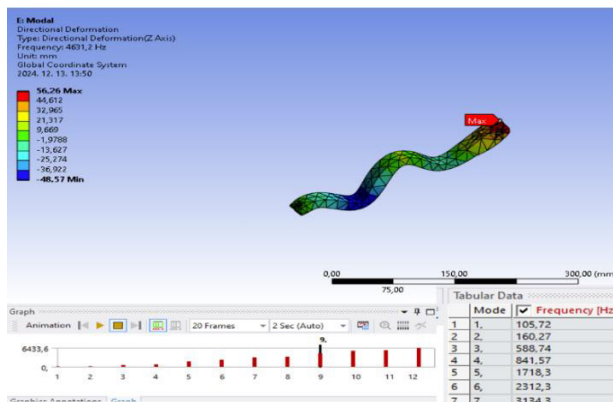
$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (17)$$

$$G = \frac{18 \times 10^9}{2(1 + 0,25)} = 7,2 \times 10^9 \text{ Pa} \quad (18)$$

$$V_{\text{nyírás}} = \frac{FL}{kGA} = \frac{434 \text{ N} \times 0,25 \text{ mm}}{0,833 \times 7,2 \times 10^9 \times 2,16 \times 10^{-4}} = 8,4 \times 10^{-5} \text{ mm} \quad (19)$$

5 A szerkezet sajátfrekvenciája

A csigás íjkar sajátfrekvenciájának meghatározása alapvető a szerkezet dinamikai biztonságának értékeléséhez, mivel rezonancia esetén a rezgés amplitúdója jelentősen megnövekedhet, ezért az anyagtulajdonságok (E , ρ) és a geometriai jellemzők (I , A) figyelembevételével számított első sajátfrekvencia kritikus szerepet játszik a szerkezeti viselkedés megértésében. A 2. ábrán láthatók a Timoshenko rúdelmélet alkalmazása mellett számított sajátfrekvenciák. [8][9]



2. ábra Timoshenko rúdelmélet segítségével végeelem szimulált sajátfrekvencia értékek

$$f_1 = \frac{\beta^2}{2\pi \times L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (20)$$

$$f_1 = \frac{1,875^2}{2\pi \times 0,25^2} \sqrt{\frac{18 \times 10^9 \times 2,592 \times 10^{-9}}{1900 \times 2,16 \times 10^{-4}}} = 105 \text{ Hz} \quad (21)$$

6 Konklúzió

A csigás íj szerkezete rendkívül összetett, számos mechanikai kapcsolattal felépített rendszer. Kutatásaink során végecs elem szimulációs vizsgálatokkal kutattuk azokat a területeket, ahol ezen sporteszközök továbbfejlesztése nemcsak lehetséges, hanem szükséges is. Euler–Bernoulli- és a Timoshenko rúd elmélet alkalmazásával, valamint a saját frekvencia vizsgálatokkal pontosabb képet kaptunk a terhelés hatására a szerkezetben bekövetkező mechanikai változásokról. Kutatásunk célja továbbá ezen eredmények gyakorlati alkalmazása annak érdekében, hogy a csigás íj a fellépő terheléseket és szerkezeti változásokat károsodás nélkül legyen képes elviselni.

7 Szakirodalom

- [1] Vathivellu, Sharveenesh A/L, Analysis of an Archery Bow Using Finite Element Method and the Development of an Archery Bow, Universiti Malaysia Pahang, (2013) 30-60.
- [2] Heo, W. W., Manufacture and Vibration-Damping Effect of Composites for Archery Bows, Basel, (2023), Vol. 16, pp. 4048.
- [3] Bott, S. Optimal Design of the Limb in Compound Bows Columbia, Missouri, USA, University of Missouri, (2019), pp. 18-47.
- [4] Boreši, A. P.; Schmidt, R. J.; Sidebottom, O. M., Advanced Mechanics of Materials New York, USA, (1993). pp. 239–312.
- [5] Gere, J. M.; Goodno, B. J., Mechanics of Materials Boston, USA, Cengage Learning, (2012), pp. 460–525.
- [6] Timoshenko, S. P.; Gere, J. M., Theory of Elastic Stability, New York, USA, (1961), pp. 210–265.
- [7] Timoshenko, S. P.; Young, D. H.; Weaver, W., Vibration Problems in Engineering, New York, USA, (1974), pp. 255–315.
- [8] Blevins, R. D., Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, New York, (1979), pp. 85–140.
- [9] Meirovitch, L. Elements of Vibration Analysis New York, (1986), pp. 201–260.