

számom	24					
1. lépés	1	600000,00	200060,00	0	0	
	2	600040,00	200150,00	40	90	0
	3	600180,00	200170,00	180	110	4400
	4	600300,00	200150,00	300	90	16200
	5	600280,00	200000,00	280	-60	-18000
	6	600098,00	200020,00	98	-40	-11200
	1	600000,00	200060,00	0	0	
	2	600040,00	200150,00	40	90	0
	3	600180,00	200170,00	180	110	4400
	7	600104,00	200096,45	104	36	6561
	1	600000,00	200060,00	0	0	
	7	600104,00	200096,45	104	36	0
	3	600180,00	200170,00	180	110	11440
	4	600300,00	200150,00	300	90	16200
	6	600098,00	200020,00	98	-40	-12000
	6	600098,00	200020,00	0	0	
	4	600300,00	200150,00	202	130	0
	5	600280,00	200000,00	182	-20	-4040
2. lépés	Be1	282709,05	28,27			
	Be2	412536,60	41,25			
	Be3	228525,00	22,85			
	Bsum	923770,65	92,38			
3. lépés	d15	102	5	41		
		280,0	-60,0	77,9	102,1	
	d15L	12	5	41	12,1	
4. lépés	t12	98,49		d12	23	57
	t13	210,95		d13	58	34
	t14	313,21		d14	73	18
	t15	286,36		d15	102	5
	t16	105,85		d16	112	12
	t17	110,20		d17	70	41
	t23	141,42		d23	81	52
	t24	260,00		d24	90	0
	t25	283,02		d25	122	0
	t26	142,35		d26	155	57
	t27	83,45		d27	129	55
	t34	121,66		d34	99	27
	t35	197,23		d35	149	32
	t36	170,95		d36	208	39
	t37	105,76		d37	225	56
	t45	151,33		d45	187	35
	t46	240,22		d46	237	14
	t47	203,18		d47	254	43
	t56	183,10		d56	276	16
	t57	200,70		d57	298	43
	t67	76,69		d67	4	29

* A szögeket karakterhármassal adom meg, mert a sok betű, meg s

Előmentszések	11 *			
,1/2/11	11	52	4	12
d211	192	5	41	192
d21	203	57	45	204
,1/11/2	79	53	29	80
d111	292	12	13	292
d112	12	5	41	12
t12	98,49			
t111	20,57			
d	112	12	13	112
kiind	600000,00	200060,00		
	11 600019,044686	200052,226659		
	21			
,1/2/11	11	52	4	12
d211	192	5	41	192
d21	203	57	45	204
,2/21/1	121	24	34	121
d211	250	41	8	251
d212	12	5	41	12
t12	98,49			
t111	23,73			
d	70	41	8	71
kiind	600000,00	200060,00		
	21 600022,3944	200067,848806		
	16			
,2/7/16	62	10	30	62
d716	12	5	41	12
d72	309	55	11	310
,2/16/7	69	46	31	70
d162	261	52	12	262
d167	192	5	41	192
t27	83,45			
t216	78,65			
d	81	52	12	82
kiind	600040,00	200150,00		
	16 600117,859528	200161,12279		
	12			
,1/12/7	79	53	29	80
d127	12	5	41	12
d121	292	12	13	292
,7/1/12	41	31	5	42
d17	70	41	8	71
d112	112	12	13	112
t17	110,20			
t712	74,2			
d	192	5	41	192
kiind	600104,00	200096,45		

	12 600088,452942 200023,897061			
	15			
,6/15/3	110	13	29	110
d153	81	52	12	82
d156	192	5	41	192
,15/6/3	16	34	9	17
d63	28	39	50	29
d615	12	5	41	12
t36	170,95			
t315	51,95			
d	261	52	12	262
kiind	600180,00	200170,00		
	15 600128,572124 200162,653161			
	22			
,22/6/3	16	34	9	17
d63	28	39	50	29
d622	12	5	41	12
,3/22/6	146	9	22	146
d223	45	56	19	46
d226	192	5	41	192
t36	170,95			
t322	87,53			
d	225	56	19	226
kiind	600180,00	200170,00		
	22 600117,101422 200109,129073			
	23			
,3/23/6	134	51	31	135
d233	12	5	41	12
d236	237	14	10	237
,3/6/23	28	34	20	29
d63	28	39	50	29
d623	57	14	10	57
t36	170,95			
t323	115,34			
d	192	5	41	192
kiind	600180,00	200170,00		
	23 600155,832915 200057,22027			
	13			
,6/13/3	95	49	25	96
d133	12	5	41	12
d136	276	16	16	276
,3/6/13	67	36	26	68
d63	28	39	50	29
d613	96	16	16	96
t36	170,95			
t313	158,88			
d	192	5	41	192
kiind	600180,00	200170,00		

	13 600146,710018 200014,646752				
	14				
	,5/4/14	4	30	0	5
	d45	187	35	41	188
	d414	192	5	41	192
	,4/14/5	84	10	35	84
	d144	12	5	41	12
	d145	96	16	16	96
	t45	151,33			
	t514	11,94			
	d	276	16	16	276
	kiind	600280,00	200000,00		
	14 600268,131446 200001,304237				
	600019,044686	200052,226659	11		
	600088,452942	200023,897061	12		
	600146,710018	200014,646752	13		
	600268,131446	200001,304237	14		
	600128,572124	200162,653161	15		
	600117,859528	200161,12279	16		
	600022,3944	200067,848806	21		
	600117,101422	200109,129073	22		
	600155,832915	200057,22027	23		
	Területjegyzék		Területjegyzék ell		E1 E2 E3
	TSUM	38559,70			
	E1	8339,05	ACEG	8339,05	
	E2	16370,32	BDFHJ	16370,32	
	E3	13850,33	IKL	13850,33	
	TRAP1	1012,27	AB	1012,27	
	TRAP2	8868,43	CD	8868,43	
	TRAP3	1453,00	EF	1453,00	
	TRAP4	7428,36	GHI	7428,36	
	TRAP5	18894,39	JK	18894,39	
	TRAP6	903,25	L	903,25	
	A	850,55			
	B	161,72			
	C	5540,85			
	D	3327,58			
	E	613,54			
	F	839,46			
	G	1334,11			
	H	5033,06			
	I	1061,19			
	J	7008,50			
	K	11885,89			
	L	903,25			
6.lépés	d15	d15	102	5	41
		280,0	-60,0	77,9	102,1
	t12	98,49 d12	23	57	45

			40,00	90,00	24,0	24,0
t116		155,29 d116		49	22	17
			117,86	101,12	49,4	49,4
t115		164,52 d115		51	23	46
			128,57	102,65	51,4	51,4
t13		210,95 d13		58	34	14
			180,00	110,00	58,6	58,6
t14		313,21 d14		73	18	3
			300,00	90,00	73,3	73,3
t54		151,33 d54		7	35	41
			20,00	150,00	7,6	7,6
7.lépés	Területfolt	ei	Bi			
A	850,55	33,9	28833,64	2,88 T1		32908,99
B	161,72	25,2	4075,34	0,41	T2	271689,83
C	5540,85	33,9	187834,82	18,78 T3		41953,40
D	3327,58	25,2	83855,02	8,39	T4	189569,08
E	613,54	33,9	20799,01	2,08 T5		372731,39
F	839,46	25,2	21154,39	2,12 T6		14903,63
G	1334,11	33,9	45226,33	4,52		SZUM
H	5033,06	25,2	126833,11	12,68		Ell.:
I	1061,19	16,5	17509,64	1,75		
J	7008,50	25,2	176614,20	17,66		
K	11885,89	16,5	196117,19	19,61		
L	903,25	16,5	14903,63	1,49		
8.lépés		T2ben	Osztóvonal 1.	terület		27,17
		t	ei	becshosszak	maradék	25,44
	h011,21	15,98	25,2	0,04		
	h021,2	84,02	33,9	0,28		
		b0		0,33		
	hn16,7	66,14	33,9	0,22		
	hn7,12	74,20	25,2	0,19		
		bn		0,41	v'	
		bi		0,41	M1	
c	t2,16		78,65			
d	t11,12		74,97			
	ci		74,14			
	bi		70,67			
	2	600040	200150			
	11	600019,04	200052,23			
d2,16	81	52	19	78	11	
d11,,12	112	12	11	69	-28	
	31	600113,393877	200160,482146			
	33	600084,469592	200025,524621			
d21,31	44	29	29	91	93	
d21,32	70	41	14	82	29	

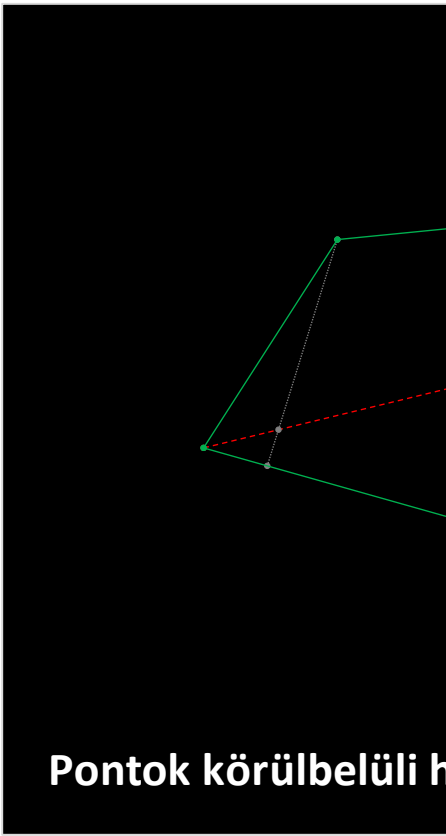
	312132	26	11	45		
d32,31		12	5	41	280	-60
d32,21		250	41	14	-82	-29
	313221					
t21,31		129,85				
t3132		67,16				
	32	600099,32	1904	200094,81	2936	
Ell		21	600022,39	200067,85	0	0
		2	600040	200150	-18	-82
		31	600113,39	200160,48	-91	-93
		32	600099,32	200094,81	-77	-27
		11	600019,04	200052,23	0	0
		21	600022,39	200067,85	-3	-16
		32	600099,32	200094,81	-80	-43
		33	600084,47	200025,52	-65	27
9.lépés	T4ben		Osztóvonal 1.		terület	18,96
	t		ei	becshosszak	maradék	17,88
h022,15		54,74	33,9	0,19		
h06,22		91,15	25,2	0,23		
			b0	0,42		
hn23,3		115,34	25,2	0,29		
hn13,23		43,54	16,5	0,07		
			bn	0,36	v'	
			bi	0,37	M1	
t15,3		51,95				
t6,13		49,00				
ci		48,81				
bi		46,04				
	15,00	600128,57	200162,65			
	6	600098	200020			
d15,3		81	52	0	51	7
d6,13		96	16	4	49	-5
	41	600176,88	7905	200169,55	5242	
	44	600143,76	201	200014,97	3789	
d42,41		12	5	46	24	113
d42,22		225	56	23	-63	-61
	224241	146	9	23		
d41,22		224	41	42	-60	-60
d41,42		192	5	46	-33	-155
	224142	32	35	56		
t22-41		85,01				
t3132		82,24				
	42	600176,19	8295	200166,32	0989	

d43,6		237	14	3	-58	-37
d43,44		192	5	46	-33	-155
	64344	45	8	18		
d6,43		57	14	3	58	37
d6,44		96	16	22	46	-5
	43644	39	2	19		
t44,6		46,04				
t44,43		40,91				
	43	600152,33	2719	200054,97	1707	
EII		15	600128,57	200162,65	0	0
		41	600176,89	200169,56	-48	-7
		42	600176,2	200166,32	-48	-4
		22	600117,1	200109,13	11	54
		22	600117,1	200109,13	0	0
		42	600176,2	200166,32	-59	-57
		43	600152,33	200054,97	-35	54
		6	600098	200020	19	89
		6	600098	200020	0	0
		43	600152,33	200054,97	-54	-35
		44	600143,76	200014,97	-46	5
		32	600099,32	200094,81	0	0
		31	600113,39	200160,48	-14	-66
		16	600117,86	200161,12	-19	-66
		7	600104	200096,45	-5	-2
		33	600084,47	200025,52	0	0
		32	600099,32	200094,81	-15	-69
		7	600104	200096,45	-20	-71
		12	600088,45	200023,9	-4	2
10.		Végső területek (koordinátákból)				
		41	600176,89	200169,56	0	0
		3	600180	200170	-3	0
		42	600176,2	200166,32	1	3
		23	600155,83	200057,22	0	0
		3	600180	200170	-24	-113
		42	600176,2	200166,32	-20	-109

	43	600152,33	200054,97	4	2
	44	600143,76	200014,97	0	0
	43	600152,33	200054,97	-9	-40
	23	600155,83	200057,22	-12	-42
	13	600146,71	200014,65	-3	0

Alakzat neve	Területe	ei	AK	b1	28,73
A	851	33,9	2,88	2,88	
B	162	25,2	0,41	0,41	
C'	5259	33,9	17,83	17,83	
C''	282	33,9	0,96		
D'	3021	25,2	7,61	7,61	28,73
D''	307	25,2	0,77		
E	614	33,9	2,08		
F	839	25,2	2,12		
G'	1329	33,9	4,51		
G''	5	33,9	0,02		
H'	4695	25,2	11,83		
H''	338	25,2	0,85		
I'	937	16,5	1,55		
I''	125	16,5	0,21		
J	7009	25,2	17,66		
K	11886	16,5	19,61		
L	903	16,5	1,49		

		38560	
		Koordinátajegyzék	
1		VOLT	
2	1	600000,00	200060,00
3	2	600040,00	200150,00
4	3	600180,00	200170,00
5	4	600300,00	200150,00
6	5	600280,00	200000,00
7	6	600098,00	200020,00
	7	600104,00	200096,45
11		LETT	
12	11	600019,04	200052,23
13	12	600088,45	200023,90
14	13	600146,71	200014,65
15	14	600268,13	200001,30
16	15	600128,57	200162,65
21	16	600117,86	200161,12
22	21	600022,39	200067,85
23	22	600117,10	200109,13
	23	600155,83	200057,22
31		osztópontok	
32	31	600113,39	200160,48



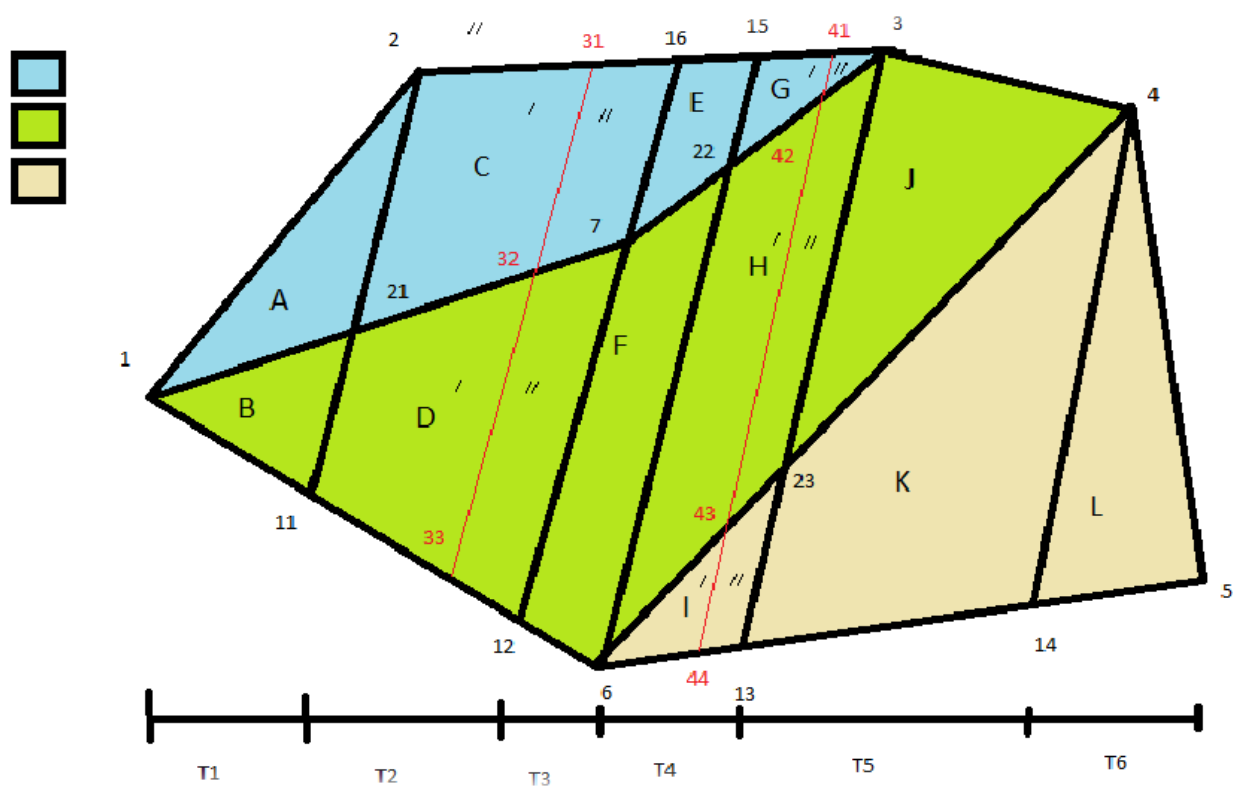
33	32	600099,32	200094,81
	33	600084,47	200025,52
41	osztópontok 2.		
42	41	600176,89	200169,56
43	42	600176,2	200166,32
44	43	600152,33	200054,97
	44	600143,76	200014,97

0				
16200				
33000				
25200				
-5880				
	-8600	68520 Tsum	Ell	
0		-77120	38560	38560
16200				
11440				
	10961	27640 Te1		
0		-16679	8339,5	
6561				
33000				
8820				
	15640	48381 Te2		
0		-32741	16370,5	
23660				
	-4040	23660 Te3		
		-27700	13850	

E tábla (alapadatokból)	
e1	33,9
e2	25,2
e3	16,5

45	40	90	24	24	204	203	57	45	d21
14	180	110	59	59	239	238	34	14	d31
3	300	90	73	73	253	253	18	3	d41
41	280	-60	78	102	282	282	5	41	d51
13	98	-40	68	112	292	292	12	13	d61
8	104	36	71	71	251	250	41	8	d71
12	140	20	82	82	262	261	52	12	d32
0	260	0	90	90	270	270	0	0	d42
19	240	-150	58	122	302	302	0	19	d52
21	58	-130	24	156	336	335	57	21	d62
11	64	-54	50	130	310	309	55	11	d72
44	120	-20	81	99	279	279	27	44	d43
4	100	-170	30	150	330	329	32	4	d53
50	-82	-150	29	209	29	28	39	50	d63
19	-76	-74	46	226	46	45	56	19	d73
41	-20	-150	8	188	8	7	35	41	d54
10	-202	-130	57	237	57	57	14	10	d64
8	-196	-54	75	255	75	74	43	8	d74
16	-182	20	84	276	96	96	16	16	d65
24	-176	96	61	299	119	118	43	24	d75
15	6	76	4	4	184	184	29	15	d76

szám megkavarna. A középső karakter a szög csúcsa, a másik kettő a két szára!



magasságok

alfa1ben

78,1 t'

20,255

20,255

20,25

	78,0	7	56		
alfa1ben	52,7 t'		94,054	73,799	73,80
alfa1ben	50,7 t'		104,207	10,153	10,15
alfa1ben	43,5 t'		152,956	48,749	48,75
alfa1ben	28,8 t'		274,484	121,528	121,53
				274,484	274,48
				11,876	11,88
alfa5ben	85,5 t'		11,874	11,874	11,87
			SZUM		286,35
			t15		286,36

B trap		T (AK)		
3,29	32908,99	3,29	1.oh	3,29
27,17	271689,83	27,17	28,73	30,46
4,2	41953,4	4,20	2.oh	34,66
18,96	189569,08	18,96	23,81	53,61
37,27	372731,39	37,27		90,89
1,49	14903,63	1,49		92,38
	923756,32	92,38	52,54	
	923770,65			

b1	28,73	b3 (marai	39,84
b2	23,81	bSUM	92,38

B2
dBi

0,0011667 69,57	Trapézmagasságok	
	T1	20,25
	T2	73,80
	T3	10,15
	T4	48,75
	T5	121,53
	T6	11,87

82	82
68	112
44	44
71	71

		26
78	12	
71	251	
		121

		0			
0	7476				
1631	7126				
2453		4085	14602 K		
			-10517	5259	
	0			5259 C'	178264,85
0	1254			A	28833,64
143	2786			B	4075,34
-2144		-2002	4040 K		
			-6042	3021	
				3021 D'	76124,41
					287298,25
					28,73
					28,73

B2
dBi

-0,0010824
45,80

82	82
84	96

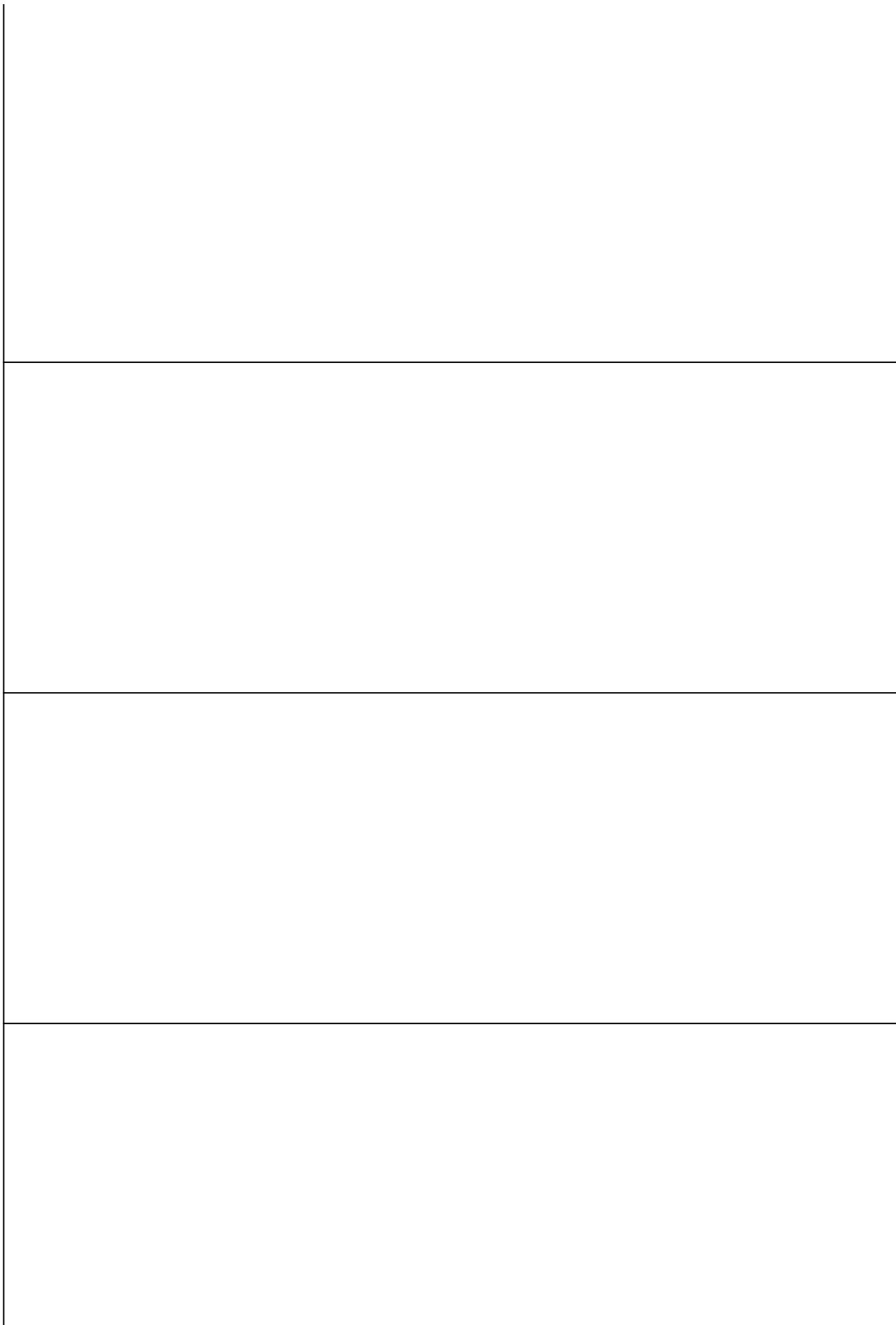
12	12
46	226
	146
45	225
12	192
	33

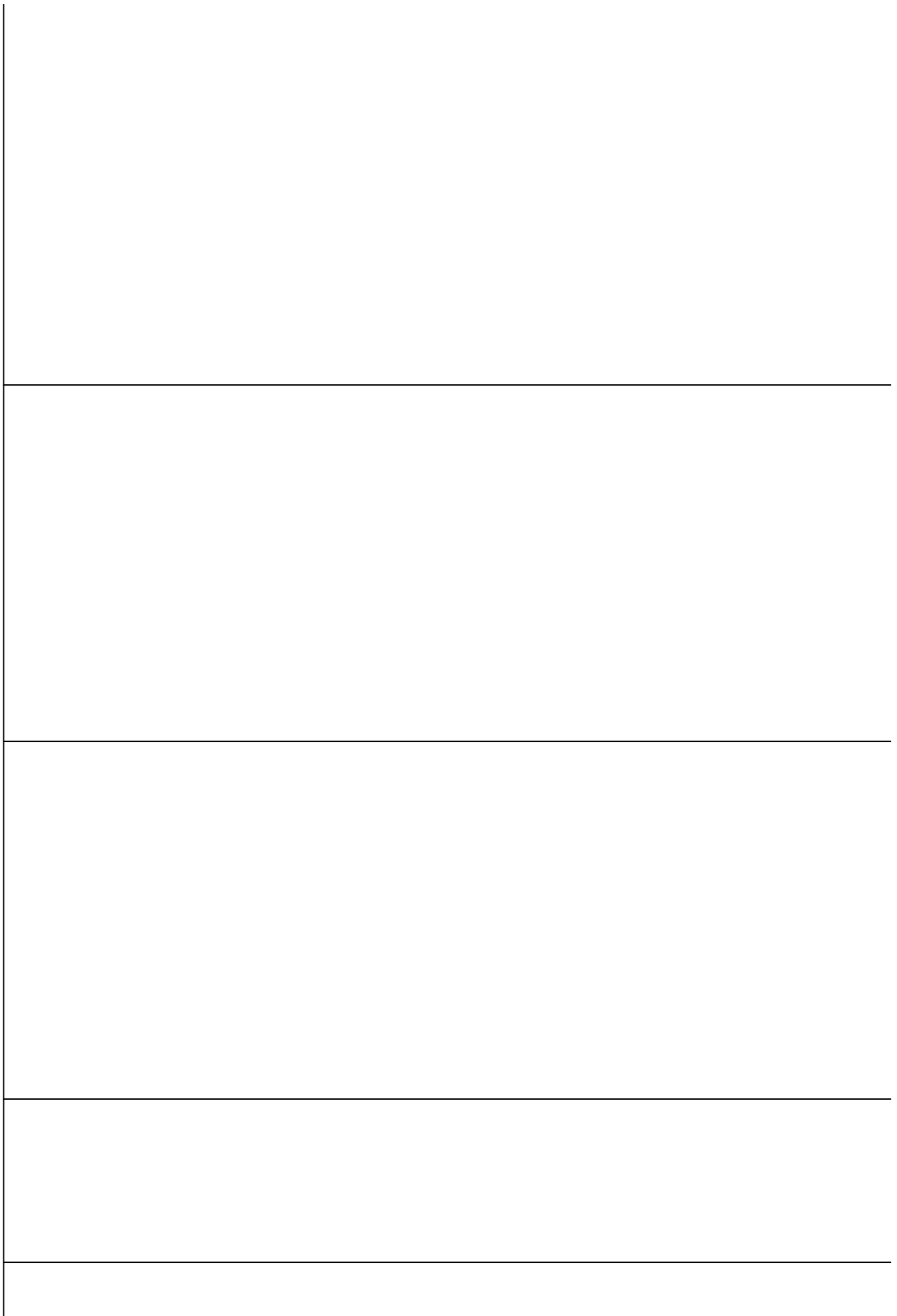
57	237	
12	192	
		45
57	57	
84	96	
		39

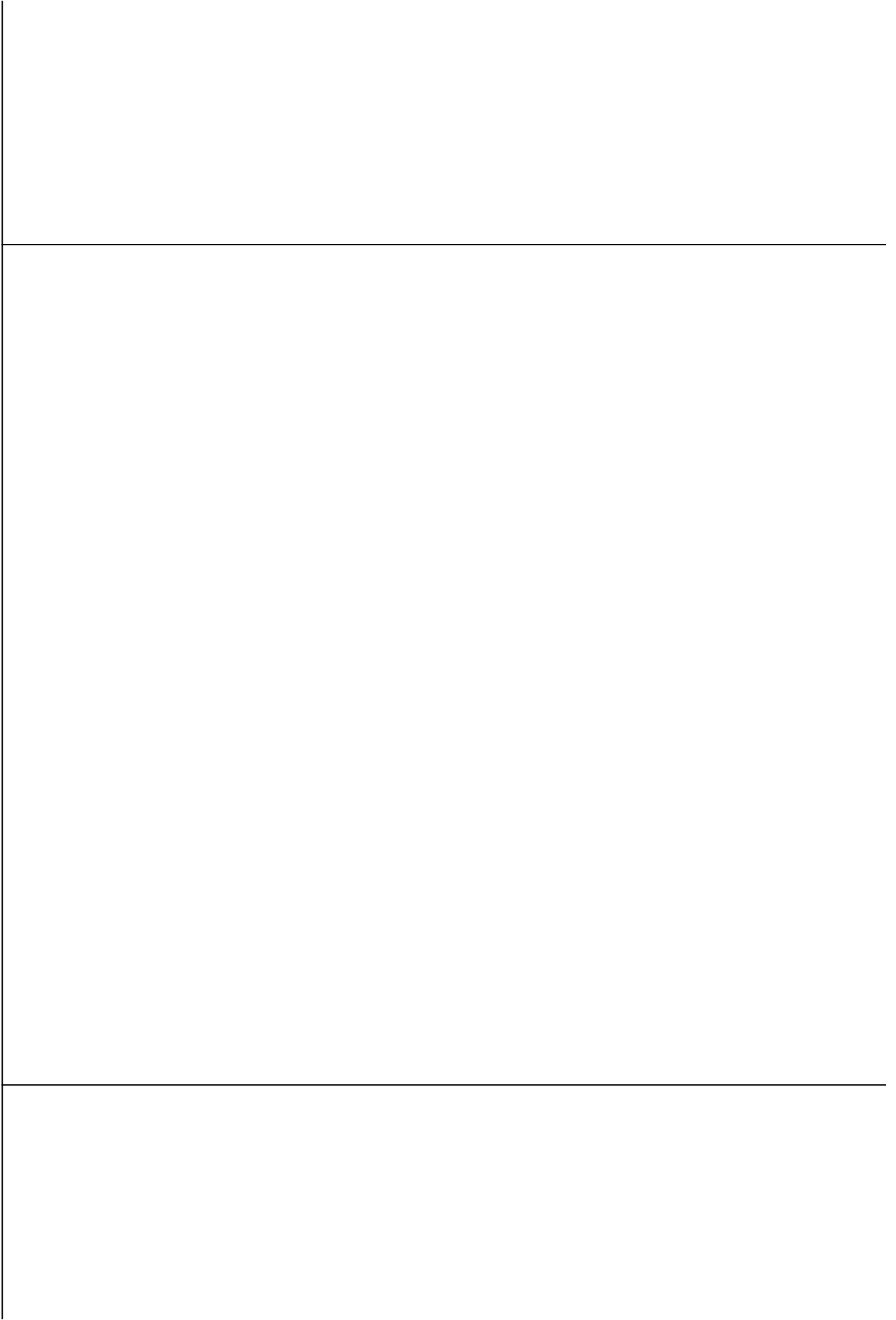
	0			
0	329			
177	-42			
-2549		-2372	<u>287 K</u>	
			<u>-2659</u>	1329
				1329
	0			45067,68 G'
0	2015			20799,01 E
-3201	1034			21154,39 F
-3140		-6341	<u>3049</u>	
			<u>-9390</u>	4695
				4695
				118316,02 H'
	0			
0	1600			
-273		-273	<u>1600</u>	
			<u>-1874</u>	937
				937
				15456,38 I'
	0			
0	1218			
933	310			
30		963	<u>1528 K</u>	
			<u>-564</u>	282
				282
				9567,60 C''
	0			
0	1353			
1053	282			
-32		1022	<u>1636 K</u>	
			<u>-614</u>	307
				307
				<u>7734,64 D''</u>
				<u>238095,70</u>
				23,81
				23,81

	0			
0	0			
-10		-10	<u>0</u>	
			<u>-10</u>	5
				5
				165,77 G''
	0			
0	2297			
2637	-382			

[illegible]







TESZT	1	600000,00	200060,00
	2	600040,00	200150,00
	2	600040,00	200150,00
	3	600180,00	200170,00
	3	600180,00	200170,00
	4	600300,00	200150,00
	4	600300,00	200150,00
	5	600280,00	200000,00
	5	600280,00	200000,00
	6	600098,00	200020,00
	6	600098,00	200020,00
	1	600000,00	200060,00
	11	600019,04	200052,23
	21	600022,39	200067,85
	21	600022,39	200067,85
	2	600040,00	200150,00
	33	600084,47	200025,52
	32	600099,32	200094,81
	32	600099,32	200094,81
	31	600113,39	200160,48
	12	600088,45	200023,90

7	600104,00	200096,45
7	600104,00	200096,45
16	600117,86	200161,12
6	600098,00	200020,00
22	600117,10	200109,13
22	600117,10	200109,13
15	600128,57	200162,65
44	600143,76	200014,97
43	600152,33	200054,97
43	600152,33	200054,97
42	600176,20	200166,32
42	600176,20	200166,32
41	600176,89	200169,56
14	600268,13	200001,30
4	600300,00	200150,00
6	600098,00	200020,00
4	600300,00	200150,00
1	600000,00	200060,00
7	600104,00	200096,45
7	600104,00	200096,45
3	600180,00	200170,00
3	600180	200170
23	600155,83	200057,22
23	600155,83	200057,22
13	600146,71	200014,65

200099,4

n	24
r	102
útszél	12

O1	1	604325,00	206275,00	0	0		0
	2	604320,00	206485,00	5	-210	0	34650
	3	604490,00	206415,00	-165	-140	-700	22400
	4	604485,00	206245,00	-160	30	-4950	-5650

16 t1,16 d		102					
		100	37	11			
		160	-30	79	101		
	1	604325,00	206275,00				
	16	604425,25	206256,20				
	16	604425,25	206256,20				

11 t1,11 d		114					
		100	37	11			
		160	-30	79	101		
	1	604325,00	206275,00				
	11	604437,05	206253,99				
	11	604437,05	206253,99				

S1	d2,3	112	22	48	170	-70	68	112
	d2,1	178	38	10	5	-210	1	179
	alfa	66	15	21				66
	t1,2	210,06						
	2	604320,00	206485,00					
	t2,S1	84,58						
	d2,S1	112	22	48				112
	S1	604398,21	206452,80					
	1	604325,00	206275,00					
	t1,S1	192,28						
	d1,S1	22	22	48				22
	S1	604398,21	206452,80					
	S1	604398,21	206452,8					

O2	tO1,O2	216						
	tO1,S1	192,28						
	fi1	27	6	13	27,10347	0,473045	0,890185	
	fi2	62	53	47	62,89653	1,097751	0,890185	
	tS1,O2	98,41						
	tS1,O2	98,41						
	tS1,O2	98,41						
	dS1,O2	112	22	48	112			
	S1	604398,21	206452,80					
	O2	604489,21	206415,33					

O2	604489,21	206415,33		
14 tO2,14	102			
d	292	22	48	
	-91	37	68	292
O2	604489,21	206415,33		
14	604394,89	206454,16		
14	604394,89	206454,16		

15 tO2,15	114			
d	292	22	48	
	-91	37	68	292
O2	604489,21	206415,33		
15	604383,79	206458,73		
15	604383,79	206458,73		

18 tO2,18	102			
d	229	29	2	
	-164	-140	49	229
O2	604489,21	206415,33		
18	604411,67	206349,06		
18	604411,67	206349,06		

17 tO2,18	114			
d	229	29	2	
	-164	-140	49	229
O2	604489,21	206415,33		
17	604402,54	206341,27		
17	604402,54	206341,27		

Ívhosszak

o1,o2	49	29	1	
	164	140	49	49
o1,4	100	37	11	
	160	-30	79	101
fi1	51	8	10	51
o2,o1	229	29	1	
	-164	-140	49	229
o2,2	292	22	44	
	-169	70	68	292
fi2	62	53	43	63
i1	91,034274832 i3		101,7442	
i2	111,96827689 i4		125,141	
i17,16	91,03			
i18,11	101,74		i15,16	216,17
i14,18	111,97		i14,11	213,71
i15,17	125,14			

magasság

fi1rad	0,8924928905	
fi2rad	1,0977282048	
	-0,205235314	0,205235

tervezési t	1020 m2	tervezési t	1020 m2
T	7140	T	7140
hj	206,73945877	hb	222,8458
Mj	33,963654138	Mb	32,52731
Mj	33,96	Mb	32,53

13 r-Mj	68,04				20 r+út+mb
d	292	22	48		d
	-170	70	68	292	
O2	604489,21	206415,33			O2
13	604426,29	206441,24			20
13	604426,29	206441,24			20

19 r-Mj	68,04				22 r+út+mb
d	229	29	1		d
	-164	-140	49	229	
O2	604489,21	206415,33			O2
19	604437,48	206371,13			22
19	604437,48	206371,13			22

Ell

19 r+Mj+út	147,96				22 r-mb
d	49	29	1		d
	164	140	49	49	
O1	604325,00	206275,00			O1
19	604437,48	206371,12			22
19	604437,48	206371,12			22

Ell

12 r+Mj+út	147,96				21 r-mb
d	100	37	11		d
	160	-30	79	101	
O1	604325,00	206275,00			O1
12	604470,43	206247,73			21
12	604470,43	206247,73			21

JOB
FELSŐ

Tnagy	5710,3821216	
Tkicsi	2540,9343085	
T	3169,4478131 marad	109,4478
1db	1020 fil	20,2411
2db	2040 fill	40,48219
3db	3060 filll	60,72329

100 r-Mj	68,04			
d	272	8	21	
	-170	70	68	272
O2	604489,21	206415,33		
100	604421,22	206417,87		
100	604421,22	206417,87		

101 r-Mj	
d	
O2	
101	
101	

102 r-Mj	68,04			
d	251	53	53	
	-170	70	68	252
O2	604489,21	206415,33		
102	604424,54	206394,19		
102	604424,54	206394,19		

103 r-Mj	
d	
O2	
103	
103	

104 r-Mj	68,04			
d	231	39	25	
	-170	70	68	232
O2	604489,21	206415,33		
104	604435,85	206373,12		
104	604435,85	206373,12		

105 r-Mj	
d	
O2	
105	
105	

JOB
ALSÓ

Tnagy	9769,2992929		
Tkicsi	5799,4188025		
T	3969,8804904 marad	909,8805 SUMmarac	1019,328

1db	1020 fil	13,13863
2db	2040 fill	26,27726
3db	3060 filll	39,41589

111 r+út	114			
d	87	28	52	
	160	-30	79	87
O1	604325,00	206275,00		
111	604438,89	206280,01		
111	604438,89	206280,01		

110 r+út+mj	
d	
O1	
110	
110	

109 r+út	114			
d	74	20	33	
	160	-30	79	74
O1	604325,00	206275,00		
109	604434,77	206305,77		
109	604434,77	206305,77		

108 r+út+mj	
d	
O1	
108	
108	

107 r+út	114			
d	61	12	14	
	160	-30	79	61
O1	604325,00	206275,00		
107	604424,90	206329,91		

106 r+út+mj	
d	
O1	
106	

107 **604424,90** **206329,91** 106

TELL	14	604394,89	206454,16	0	0	0	
	13	604426,29	206441,24	-31	13	0	-340
	100	604421,22	206417,87	-26	36	-1140	276
	101	604387,28	206419,14	8	35	-922	-2062
	103	604392,26	206383,64	0	0		0
	102	604424,54	206394,19	-32	-11	0	460
	104	604435,85	206373,12	-44	11	-340	-178
	105	604409,21	206352,05	-17	32	-1377	-1717
	107	604424,9	206329,91	0	0		0
	106	604454,66	206346,27	-30	-16	0	696
	108	604467,47	206314,93	-43	15	-446	-148
	109	604434,77	206305,77	-10	24	-1028	-1473
	111	604438,89	206280,01	0	0		0
	110	604472,82	206281,5	-34	-1	0	47
	12	604470,43	206247,73	-32	32	-1095	59
	11	604437,05	206253,99	2	26	-821	-1916

JOBB	T (É->D)	16	999
		15	999
		14	999
		13	1014
		12	1011
		11	1011
		10	1011
		sum	7044

BAL			
FELSŐ	Tnagy	11784,683592	
	Tkicsi	7133,037875	
	T	4651,6457165 marad	571,6457
	1db	1020 fil	13,79148
	2db	2040 fill	27,58297
	3db	3060 filll	41,37445
	4db	4080 filV	55,16594

200 r+út	114				201 r+út+mb
d	278	35	19		d
	-170	70	68	279	
O2	604489,21	206415,33			O2
200	604376,49	206432,35			201
200	604376,49	206432,35			201
202 r+út	114				203 r+út+mb
d	264	47	50		d
	-170	70	68	265	

O2	604489,21	206415,33	O2
202	604375,68	206404,99	203
202	604375,68	206404,99	203

204 r+út	114				205 r+út+mb
d	251	0	20		d
	-170	70	68	251	
O2	604489,21	206415,33			O2
204	604381,42	206378,23			205
204	604381,42	206378,23			205

206 r+út	114				207 r+út+mb
d	237	12	51		d
	-170	70	68	237	
O2	604489,21	206415,33			O2
206	604393,37	206353,60			207
206	604393,37	206353,60			207

BAL
ALSÓ

Tnagy	4642,7480164	
Tkicsi	2153,6214461	
T	2489,1265703 marad	449,1266 SUMmarac 1020,772

1db	1020 fill	20,95466
2db	2040 fill	41,90932

210 r	102				211 r-mb
d	79	39	54		d
	160	-30	79	80	
O1	604325,00	206275,00			O1
210	604425,35	206293,30			211
210	604425,35	206293,30			211

208 r	102				209 r-mb
d	58	42	37		d
	160	-30	79	59	
O1	604325,00	206275,00			O1
208	604412,16	206327,98			209
208	604412,16	206327,98			209

TELL	15	604383,79	206458,73	0	0	0	
	20	604353,72	206471,12	30	-12	0	-489
	201	604344,32	206437,21	39	22	647	157
	200	604376,49	206432,35	7	26	1041	1688
	202	604375,68	206404,99	0	0	0	
	203	604343,28	206402,04	32	3	0	74
	205	604350,66	206367,64	25	37	1210	-214

204	604381,42	206378,23	-6	27	670	1880
206	604393,37	206353,6	0	0	0	
207	604366,02	206335,98	27	18	0	159
209	604384,37	206311,08	9	43	1163	-799
208	604412,16	206327,98	-19	26	231	1394
210	604425,35	206293,3	0	0	0	
211	604393,34	206287,46	32	6	0	187
21	604393,28	206262,2	32	31	996	3
16	604425,25	206256,2	0	37	1190	2185

BAL	T (É->D)	2	1010
		3	1010
		4	1010
		5	1010
		6	1017
		7	998
		8	997
	sum		7053

TELLfull

1

20	604353,72	206471,12	0	0	0	
201	604344,32	206437,21	9,4	33,91	0	354
203	604343,28	206402,04	10,44	69,08	649	211
205	604350,66	206367,64	3,06	103,48	1080	-1273
207	604366,02	206335,98	-12,3	135,14	414	-4142
209	604384,37	206311,08	-30,65	160,04	-1968	-6341
211	604393,34	206287,46	-39,62	183,66	-5629	-7266
21	604393,28	206262,20	-39,56	208,92	-8277	6000
1	604325,00	206275,00	28,72	196,12	-7759	6613
2	604320	206485	33,72	-13,88	-399	0

-21889

2->8

15	604383,79	206458,73	0	0	0	
20	604353,72	206471,12	30,07	-12,39	0	-489
201	604344,32	206437,21	39,47	21,52	647	872
203	604343,28	206402,04	40,51	56,69	2238	1878
205	604350,66	206367,64	33,13	91,09	3690	1619
207	604366,02	206335,98	17,77	122,75	4067	-71
209	604384,37	206311,08	-0,58	147,65	2624	-1410
211	604393,34	206287,46	-9,55	171,27	-99	-1625
21	604393,28	206262,20	-9,49	196,53	-1877	-8148
16	604425,25	206256,20	-41,46	202,53	-1922	-8417
210	604425,35	206293,3	-41,56	165,43	-6859	-4693
208	604412,16	206327,98	-28,37	130,75	-5434	-1253
206	604393,37	206353,6	-9,58	105,13	-2983	249
204	604381,42	206378,23	2,37	80,5	-771	653
202	604375,68	206404,99	8,11	53,74	127	392
200	604376,49	206432,35	7,3	26,38	214	0

-6338

14	604394,89	206454,16	0	0	0	
----	-----------	-----------	---	---	---	--

9

15	604383,79	206458,73	11,1	-4,57	0	-84	
200	604376,49	206432,35	18,4	21,81	242	419	
202	604375,68	206404,99	19,21	49,17	905	662	
204	604381,42	206378,23	13,47	75,93	1459	115	
206	604393,37	206353,6	1,52	100,56	1355	-1737	
208	604412,16	206327,98	-17,27	126,18	192	-3843	
210	604425,35	206293,3	-30,46	160,86	-2778	-4884	
16	604425,25	206256,20	-30,36	197,96	-6030	-8346	
11	604437,05	206253,99	-42,16	200,17	-6077	-8807	
111	604438,89	206280,01	-44	174,15	-7342	-6945	
109	604434,77	206305,77	-39,88	148,39	-6529	-4453	
107	604424,9	206329,91	-30,01	124,25	-4955	-1779	
105	604409,21	206352,05	-14,32	102,11	-3064	269	
103	604392,26	206383,64	2,63	70,52	-1010	537	
101	604387,28	206419,14	7,61	35,02	92	0	-33542

10->16

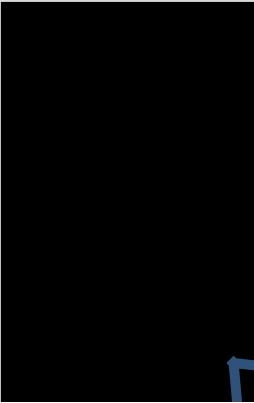
13	604426,29	206441,24	0	0		0	
14	604394,89	206454,16	31,4	-12,92	0	-504	
101	604387,28	206419,14	39,01	22,1	694	752	
103	604392,26	206383,64	34,03	57,6	2247	984	
105	604409,21	206352,05	17,08	89,19	3035	124	
107	604424,9	206329,91	1,39	111,33	1902	-944	
109	604434,77	206305,77	-8,48	135,47	188	-1707	
111	604438,89	206280,01	-12,6	161,23	-1367	-1735	
11	604437,05	206253,99	-10,76	187,25	-2359	-8265	
12	604470,43	206247,73	-44,14	193,51	-2082	-9004	
110	604472,82	206281,5	-46,53	159,74	-7051	-6578	
108	604467,47	206314,93	-41,18	126,31	-5877	-3583	
106	604454,66	206346,27	-28,37	94,97	-3911	-908	
104	604435,85	206373,12	-9,56	68,12	-1933	119	
102	604424,54	206394,19	1,75	47,05	-450	239	
100	604421,22	206417,87	5,07	23,37	41	0	-16923

17

3	604490,00	206415,00	0	0		0	
13	604426,29	206441,24	63,71	-26,24	0	-1805	
100	604421,22	206417,87	68,78	-2,87	-183	-188	
102	604424,54	206394,19	65,46	20,81	1431	1127	
104	604435,85	206373,12	54,15	41,88	2741	1480	
106	604454,66	206346,27	35,34	68,73	3722	1548	
108	604467,47	206314,93	22,53	100,07	3536	1719	
110	604472,82	206281,5	17,18	133,5	3008	2613	
12	604470,43	206247,73	19,57	167,27	2874	836	
4	604485,00	206245	5	170	3327	0	20456

	T
-62700	31350
57050	

d1,4	112	22	48	170	-70	68	112
------	-----	----	----	-----	-----	----	-----



146,53			
292	22	48	
-170	70	68	292
604489,21	206415,33		
604353,72	206471,12		
604353,72	206471,12		

146,53			
229	29	1	
-164	-140	49	229
604489,21	206415,33		
604377,81	206320,13		
604377,81	206320,13		

69,47			
49	29	1	
164	140	49	49
604325,00	206275,00		
604377,81	206320,13		
604377,81	206320,13		

69,47			
100	37	11	
160	-30	79	101
604325,00	206275,00		
604393,28	206262,20		
604393,28	206262,20		



102			
272	8	21	
-170	70	68	272
604489,21	206415,33		
604387,28	206419,14		
604387,28	206419,14		

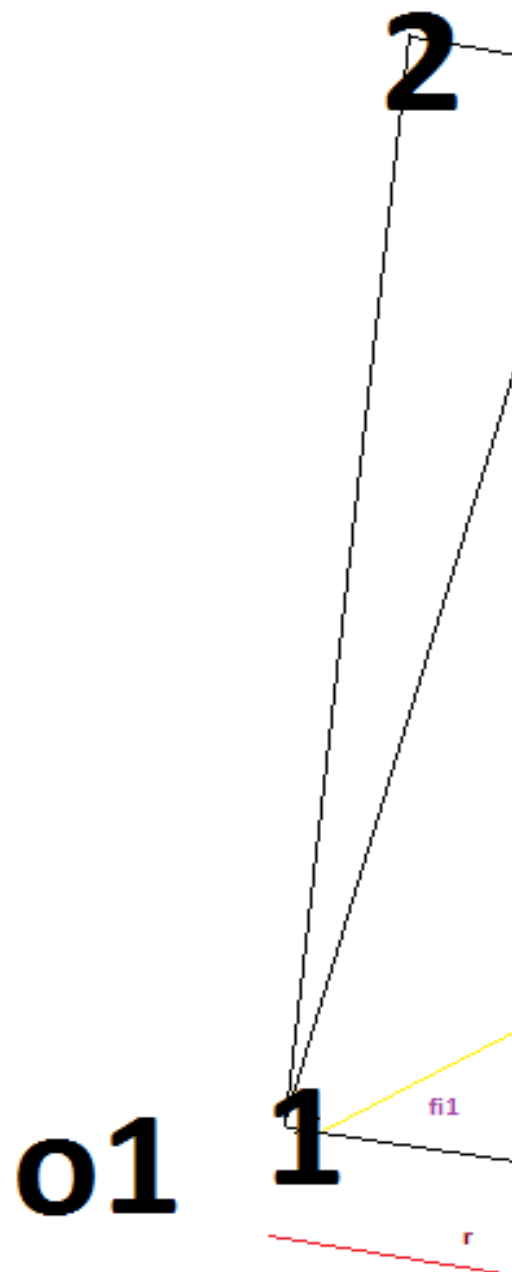
102			
251	53	53	
-170	70	68	252
604489,21	206415,33		
604392,26	206383,64		
604392,26	206383,64		

102			
231	39	25	
-170	70	68	232
604489,21	206415,33		
604409,21	206352,05		
604409,21	206352,05		

147,96			
87	28	52	
160	-30	79	87
604325,00	206275,00		
604472,82	206281,50		
604472,82	206281,50		

147,96			
74	20	33	
160	-30	79	74
604325,00	206275,00		
604467,47	206314,93		
604467,47	206314,93		

147,96			
61	12	14	
160	-30	79	61
604325,00	206275,00		
604454,66	206346,27		



604454,66 206346,27

T							
-1998	999	0	0	0			
-64		34	-1	0	-37	T	
T		29	34	1162	-114	1998	999
-1998	999	-3	24	686		1848	-150
282		0	0	0			
T		27	21	0	231	T	
-2022	1011	11	43	1151	-813	2027	1014
549		-19	27	294		1445	-582
T		0	0	0			
-2022	1011	33	9	0	262	T	
106		29	35	1142	-187	2022	1011
T		-5	33	955		2097	75
-2022	1011						

146,53
 278 35 19
 -170 70 68 279

604489,21 206415,33

604344,32 206437,21

604344,32 206437,21

146,53
 264 47 50
 -170 70 68 265

604489,21	206415,33
604343,28	206402,04
604343,28	206402,04

146,53			
251	0	20	
-170	70	68	251
604489,21	206415,33		
604350,66	206367,64		
604350,66	206367,64		

146,53			
237	12	51	
-170	70	68	237
604489,21	206415,33		
604366,02	206335,98		
604366,02	206335,98		

69,47			
79	39	54	
160	-30	79	80
604325,00	206275,00		
604393,34	206287,46		
604393,34	206287,46		

69,47			
58	42	37	
160	-30	79	59
604325,00	206275,00		
604384,37	206311,08		
604384,37	206311,08		

	T						
2020	1010	0	0	0			
-332		-32	5	0	-152	T	
		-31	32	-1037	34	-2021	1010
T		1	35	-1103	-2139	-119	
2020	1010	0	0	0			

-141		-31	-11	0	452		T
		-43	14	-432	-216	-2021	1010
T		-15	32	-1352		-1784	237
2034	1017	0	0		0		
-640		-28	-17	0	693		T
		-41	18	-494	-159	-1995	998
T		-9	24	-968		-1462	533
1995	997						
190							

	T
-16047	8023
-5842	

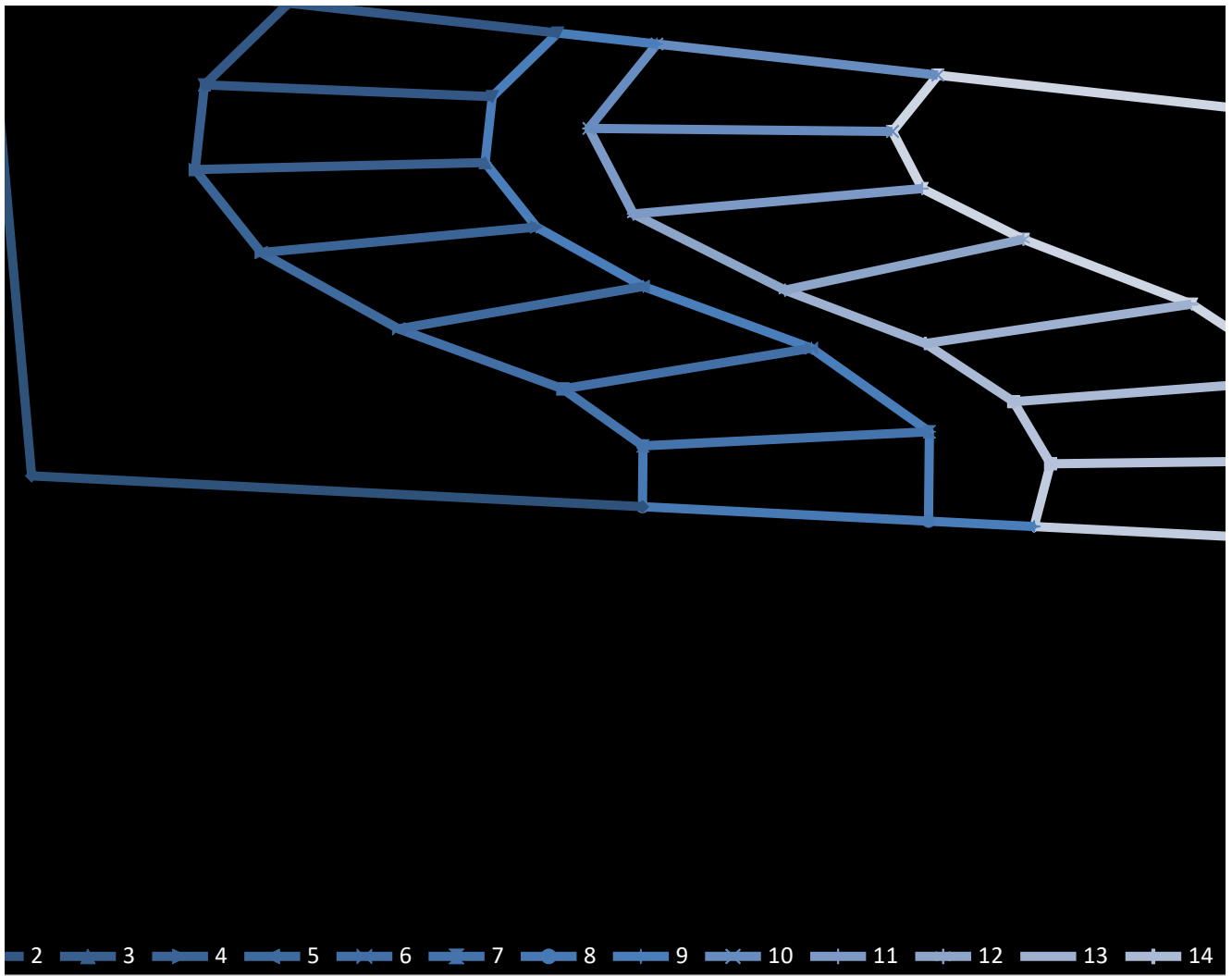
	T
14106	7053
-20444	

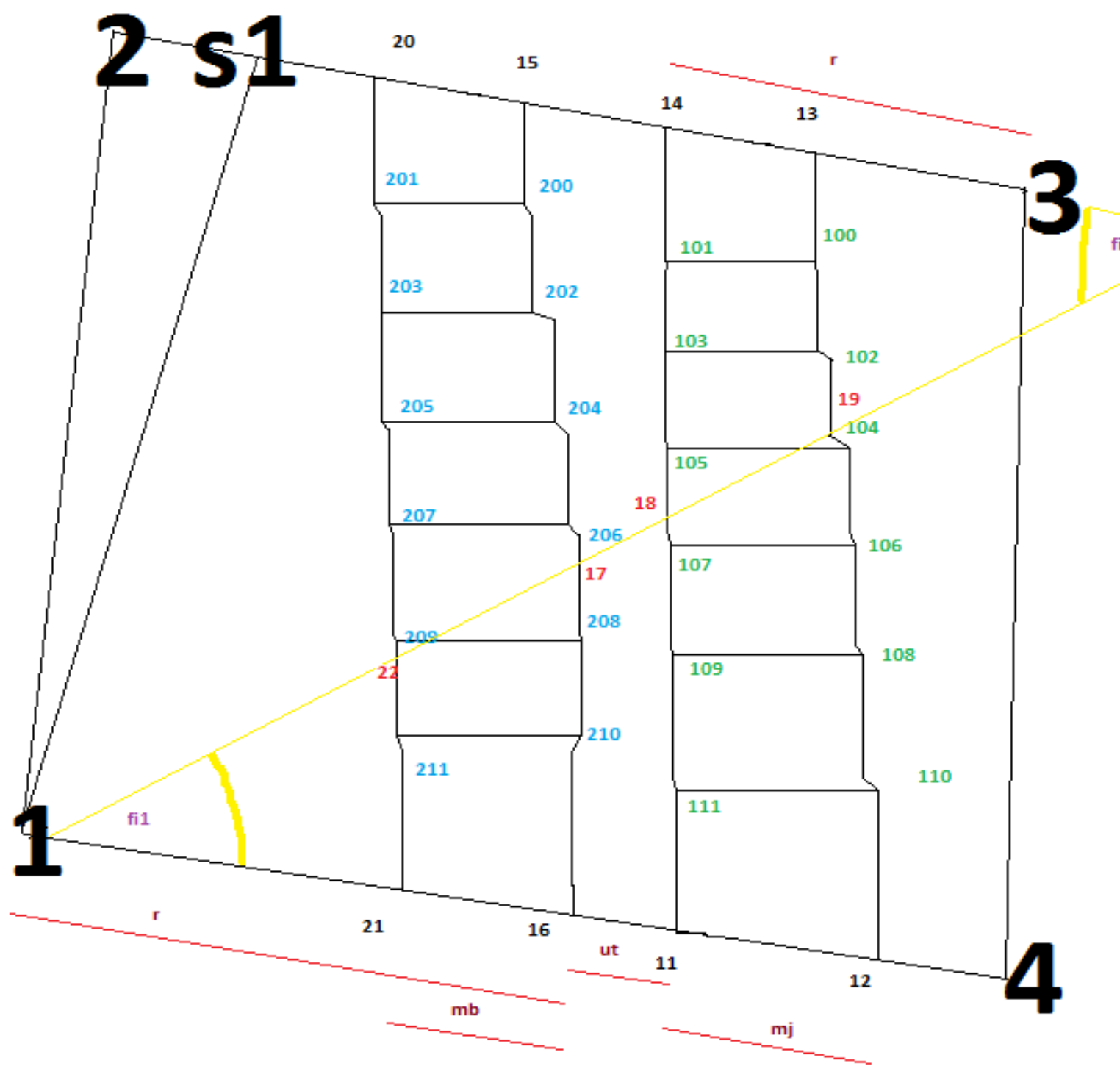
	T	
5335		2668
-38877		

	T	
14088		7044
-31011		

	T	
13126		6563
7331		
SUM		31350
Adott		31350

**Segéd
diagramm**



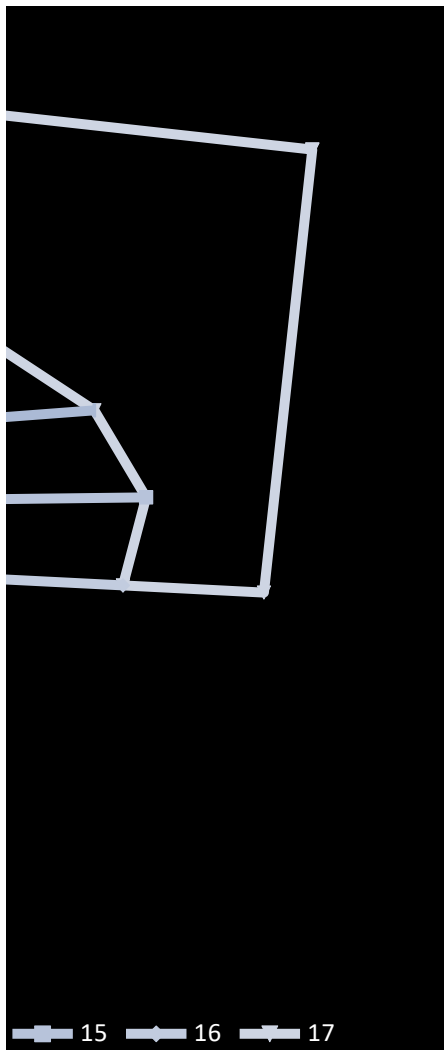


Adott pontok		
1	604325,00	206275,00
2	604320,00	206485,00
3	604490,00	206415,00
4	604485,00	206245,00
Kerületi pontok		
Fenn		
13	604426,29	206441,24
14	604394,89	206454,16
15	604383,79	206458,73
20	604353,72	206471,12
Lenn		
12	604470,43	206247,73
11	604437,05	206253,99
16	604425,25	206256,20
21	604393,28	206262,20
jj		
100	604421,22	206417,87
102	604424,54	206394,19
104	604435,85	206373,12
106	604454,66	206346,27
108	604467,47	206314,93
110	604472,82	206281,5
jb		
101	604387,28	206419,14
103	604392,26	206383,64
105	604409,21	206352,05
107	604424,9	206329,91
109	604434,77	206305,77
111	604438,89	206280,01
bj		
200	604376,49	206432,35
202	604375,68	206404,99
204	604381,42	206378,23
206	604393,37	206353,6
208	604412,16	206327,98
210	604425,35	206293,3
bb		

201	604344,32	206437,21
203	604343,28	206402,04
205	604350,66	206367,64
207	604366,02	206335,98
209	604384,37	206311,08
211	604393,34	206287,46
Segédpontok		
18	604411,67	206349,06
17	604402,54	206341,27
22	604377,81	206320,13
19	604437,48	206371,13
S1	604398,21	206452,8
O2	604489,21	206415,33

Diagramm

1	20	604353,7	206471,1
	2	604320	206485
	1	604325	206275
	21	604393,3	206262,2
2	15	604383,8	206458,7
	20	604353,7	206471,1
	201	604344,3	206437,2
	200	604376,5	206432,4
3	201	604344,3	206437,2
	203	604343,3	206402
	202	604375,7	206405
4	203	604343,3	206402
	205	604350,7	206367,6
	204	604381,4	206378,2
5	205	604350,7	206367,6
	207	604366	206336
	206	604393,4	206353,6
6	207	604366	206336
	209	604384,4	206311,1
	208	604412,2	206328
7	209	604384,4	206311,1
	211	604393,3	206287,5
	210	604425,4	206293,3
8	211	604393,3	206287,5
	21	604393,3	206262,2
	16	604425,3	206256,2
9	14	604394,9	206454,2
	15	604383,8	206458,7
	200	604376,5	206432,4
	202	604375,7	206405
	204	604381,4	206378,2
	206	604393,4	206353,6
	208	604412,2	206328



	210	604425,4	206293,3
	16	604425,3	206256,2
	11	604437,1	206254
10	13	604426,3	206441,2
	14	604394,9	206454,2
	101	604387,3	206419,1
	100	604421,2	206417,9
11	101	604387,3	206419,1
	103	604392,3	206383,6
	102	604424,5	206394,2
12	103	604392,3	206383,6
	105	604409,2	206352,1
	104	604435,9	206373,1
13	105	604409,2	206352,1
	107	604424,9	206329,9
	106	604454,7	206346,3
14	107	604424,9	206329,9
	109	604434,8	206305,8
	108	604467,5	206314,9
15	109	604434,8	206305,8
	111	604438,9	206280
	110	604472,8	206281,5
16	111	604438,9	206280
	11	604437,1	206254
	12	604470,4	206247,7
17	3	604490	206415
	13	604426,3	206441,2
	100	604421,2	206417,9
	102	604424,5	206394,2
	104	604435,9	206373,1
	106	604454,7	206346,3
	108	604467,5	206314,9
	110	604472,8	206281,5
	12	604470,4	206247,7
	4	604485	206245
	3	604490	206415



Kiinduló adatok		
d_1	253,653	m^2
p_1	49	cm^{-2}
d_2	120,820	m^2
p_2	1	cm^{-2}
d_3	175,12	m^2
p_3	2	cm^{-2}
μ_0	3,5	

Részeredmények		
d	549,593	m
$\mu_1(\pm)$	0,5	cm
$\mu_2(\pm)$	3,5	cm
$\mu_3(\pm)$	2,5	cm
$\mu_d(\pm)$	4,3	cm
p_d	0,66	cm^{-2}

Kiinduló adatok		
d_1	253,653	m^2
p_1	8,33252	cm^{-2}
d_2	120,820	m^2
p_2	1	cm^{-2}
d_3	175,12	m^2
p_3	2	cm^{-2}
μ_0	3,5	

Részeredmények		
d	549,593	m
$\mu_1(\pm)$	1,2	cm
$\mu_2(\pm)$	3,5	cm
$\mu_3(\pm)$	2,5	cm
$\mu_d(\pm)$	4,5	cm
p_d	0,62	cm^{-2}

Végeredmény	
$d = 549.593 \text{ m} \pm 4.32 \text{ cm}$	

Végeredmény	
$d = 549,593 \text{ m} \pm 4,45 \text{ cm}$	

$\mu_d \text{ max}$	5,3
$\mu_d \text{ min}$	3,3
$\mu_d \text{ rand}$	4,454789
μ_1	1,212495
p_1	8,33252

	°	'	"	tizedfok
φ_F	46	30	0	46,50
φ_L	46	20	0	46,33
λ_B	17	20	0	17,33
$\Delta\varphi$		2		0,03
ξ_{BL}			3,3	
ξ_{BF}			-2,6	
η			2,3	

φ	ξ interpoláció	η	Geoidundulációs értékek (U)
46,50	-2,6	2,3	3,15
46,47	-1,4		6,76
46,43	-0,2		8,26
46,40	0,9		7,63
46,37	2,1		4,88
46,33	3,3		0,00

ρ'	3437,8	'
ρ''	206265	"
R	6378	km
c	0,45	cm

N
6389399,8367273
6389387,3673355
6389374,8972733
6389362,4265576
6389349,9552052
6389337,483233

Ellipszoid neve	WGS84
Közlés éve	1984
a (m)	6378137
b (m)	6356752,3142
e ²	0,00669438

Magassági értékek (H)	Ell. magassági értékek (h)
359	361,753
253	259,369
482	489,862
547	554,233
310	314,480
228	227,605

Normálisok hossza	
N+U	N+h
6389402,98	6389761,590
6389394,13	6389646,737
6389383,15	6389864,760
6389370,05	6389916,659
6389354,83	6389664,436
6389337,48	6389565,089

Kiinduló adatok:			
Elektrooptikai távmérővel:	d_1	253,653	m ²
	p_1	49	cm ⁻²
Optikai távmérővel:	d_2	120,820	m ²
	p_2	1	cm ⁻²
Mérőszalaggal:	d_3	175,12	m ²
	p_3	2	cm ⁻²
A súlyegység középhibája:	μ_0	3,5	
A távolság:	d	549,593	m
A mérési eredmények középhibái:	$\mu_1(\pm)$	0,5	cm
	$\mu_2(\pm)$	0,3	cm
	$\mu_3(\pm)$	3,5	cm
A távolság középhibája:	$\mu_d(\pm)$	3,5	cm
A távolság súlya:	p_d	0,97	cm ⁻²
Végeredmény:			
$d = 549.593 \text{ m} \pm 3.55 \text{ cm}$			

Mérési eredm	
d_{AC}	
$\mu_d(\pm)$	35,4
	°
δ_{AC}	78
$\mu_{\delta AC}(\pm)$	
A koord	
Δy	
Δx	
$\mu_{\Delta y}^2$	
$\mu_{\Delta x}^2$	
$\mu_{\Delta y}(\pm)$	
$\mu_{\Delta x}(\pm)$	

nények és középhibáik:		
549,593		m
984372871002		mm
'	"	tizedfok
52	40	78,87778
3		"
inátakülönbségek:		
539,271		m
106,018		m
1215,6		mm ²
108,4		mm ²
34,9		mm
10,4		mm

Mérési eredmények és középhibáik				
H _A	158,23			m
μ _{HA} (±)	2			cm
h	1,42			m
μ _h (±)	1			cm
l	3,82			m
μ _l (±)	1,5			cm
d _f	549,593			m
μ _{df} (±)	3,5			cm
	°	'	"	tizedfok
α	3	43	56	3,73
μ _α (±)	6			"
Eredmények				
H _B	191,6049			m
μ _{HB} (±)	3,14			cm
p _{HB}	0,102			cm ⁻²
Végeredmény				
HB = 191.6049 m ± 0.0314 m				

PSz	IUGG/1967							
	φ			λ			φ	λ
	°	'	"	°	'	"	tizedfok	
0	46	39	1,91119	19	31	21,15852	46,65053	19,52254
PSz	WGS84							
	φ			λ			φ	λ
	°	'	"	°	'	"	tizedfok	
0	46	39	0,96182	19	31	17,15614	46,65027	19,52143
51	46	0					46,00000	19,52143
52	46	20					46,33333	19,52143
53	46	40					46,66667	19,52143
54	47	0					47,00000	19,52143
55	47	20					47,33333	19,52143
56	47	40					47,66667	19,52143
57	48	0					48,00000	19,52143
Alapadatok							EOV	
							y	x
							m	m
							686281,517	145210,824
Ellipszoid neve					Közlés éve		a (m)	b (m)
WGS84					1984		6378137	6356752,3142
IUGG/1967					1967		6378160	6356774,5160

Első numerikus excentricitás:		
WGS84	e^2	0,00669438

Az IUGG/1967 ellipszoid Gauss-gömbjének görbületi sugara:		
R	6379357,754	m
M	6369251,981	m
N	6389479,562	m
e^2	0,006694605	

Segéd táblázat az ábrához				
WGS84 (kép sarkai)				
	°	'	"	tizedfok
$\varphi_{minb}=$	45	34	50,2	45,58
$\lambda_{minl}=$	15	38	21	15,64
$\varphi_{maxb}=$	48	44	36,3	48,74
$\lambda_{minf}=$	15	25	50,3	15,43
$\varphi_{maxj}=$	48	43	25,3	48,72
$\lambda_{maxf}=$	23	15	41,1	23,26
$\varphi_{minj}=$	45	33	43,2	45,56
$\lambda_{maxl}=$	23	1	7,2	23,02

H-U táblázat				
Google Earth	leolvasható a mellékelt ábráról			Ellipszoidi magasság
Tengerszint feletti magasság	Geoid-unduláció	Geoid-unduláció		
H (m)	U (m)	Utérkép (m)	U-Utérkép (m)	h (m)
107	43,273			
112	44,223	leolv	#VALUE!	156,223
126	43,857	leolv	#VALUE!	169,857
108	43,258	leolv	#VALUE!	151,258
128	43,063	leolv	#VALUE!	171,063
171	42,852	leolv	#VALUE!	213,852
160	42,943	leolv	#VALUE!	202,943
298	43,206	leolv	#VALUE!	341,206

Feladat szám (0-20 ahol 0 a PL)

0

Normálisok hossza

φ	N	N+U	N+h=N+U+H	N+(200*U)
	(m)	Ngeoid (m)	Nterep (m)	(m)
46°	6389212,733	6389256,956	6389368,956	6398057,333
46°20'	6389337,483	6389381,340	6389507,340	6398108,883
46°40'	6389462,173	6389505,431	6389613,431	6398113,773
47°	6389586,786	6389629,849	6389757,849	6398199,386
47°20'	6389711,304	6389754,156	6389925,156	6398281,704
47°40'	6389835,712	6389878,655	6390038,655	6398424,312
48°	6389959,992	6390003,198	6390301,198	6398601,192

zerk. pontok metszeteinek ítméretezett koordinátái	
Az ellipszoidon	
xellipszoid	Zellipszoid
(m)	(m)
4438320,10572	4565247,54078
4411592,74991	4590908,01746
4384714,98673	4616414,06091
4357687,7093	4641764,78877
4330511,81617	4666959,32367
4303188,21126	4691996,79321
4275717,80381	4716876,33007
A geoidon	
xgeoid	Zgeoid
(m)	(m)
4444464,081	4565279,352
4417649,066	4590939,742
4390652,075	4616445,526
4363561,488	4641796,283
4336320,250	4666990,833
4308972,141	4692028,538
4281499,895	4716908,438
A terepen	
xterep	Zterep
(m)	(m)
4460024,429	4565359,918
4435048,700	4591030,887
4405474,894	4616524,082
4381020,646	4641889,896
4359498,685	4667116,571
4330522,308	4692146,817
4321380,079	4717129,896

Térbeli koordináták számítása:			
Ellipszoid			
φ	Xellipszoid	Yellipszoid	Zellipszoid
	(m)	(m)	(m)
46°	4183190,199	1483106,577	4565247,541
46°20′	4157999,224	1474175,379	4590908,017
46°40′	4132666,487	1465193,921	4616414,061
47°	4107192,830	1456162,501	4641764,789
47°20′	4081579,101	1447081,419	4666959,324
47°40′	4055826,151	1437950,979	4691996,793
48°	4029934,837	1428771,483	4716876,330
Geoid			
φ	Xgeoid	Ygeoid	Zgeoid
	(m)	(m)	(m)
46°	4183219,153	1483116,843	4565279,352
46°20′	4158027,764	1474185,498	4590939,742
46°40′	4132694,466	1465203,840	4616445,526
47°	4107220,511	1456172,315	4641796,283
47°20′	4081606,474	1447091,124	4666990,833
47°40′	4055853,408	1437960,642	4692028,538
48°	4029962,085	1428781,143	4716908,438
Terep			
φ	Xterep	Yterep	Zterep
	(m)	(m)	(m)
46°	4183292,482	1483142,841	4565359,918
46°20′	4158109,762	1474214,569	4591030,887
46°40′	4132764,319	1465228,606	4616524,082
47°	4107302,788	1456201,485	4641889,896
47°20′	4081715,704	1447129,850	4667116,571
47°40′	4055954,965	1437996,648	4692146,817
48°	4030150,024	1428847,775	4717129,896

Xn	1,329173485E+11	Xh	66496354	Xf	4183292	G	6,672000000E-11	Ff
	4,576711338E+10		-377119564		1483143	Mn	1,988920000E+30	
	5,116552940E+10		33502667		4565360	Mh	7,360000000E+22	
						Mf	5,974200000E+24	
						ω	7,272205217E-05	
Xn	1,329173485E+11	Xh	66496354	Xf	4158110	G	6,672000000E-11	Ff
	4,576711338E+10		-377119564		1474215	Mn	1,988920000E+30	
	5,116552940E+10		33502667		4591031	Mh	7,360000000E+22	
						Mf	5,974200000E+24	
						ω	7,272205217E-05	
Xn	1,329173485E+11	Xh	66496354	Xf	4132764	G	6,672000000E-11	Ff
	4,576711338E+10		-377119564		1465229	Mn	1,988920000E+30	
	5,116552940E+10		33502667		4616524	Mh	7,360000000E+22	
						Mf	5,974200000E+24	
						ω	7,272205217E-05	
Xn	1,329173485E+11	Xh	66496354	Xf	4107303	G	6,672000000E-11	Ff
	4,576711338E+10		-377119564		1456201	Mn	1,988920000E+30	
	5,116552940E+10		33502667		4641890	Mh	7,360000000E+22	
						Mf	5,974200000E+24	
						ω	7,272205217E-05	
Xn	1,329173485E+11	Xh	66496354	Xf	4081716	G	6,672000000E-11	Ff
	4,576711338E+10		-377119564		1447130	Mn	1,988920000E+30	
	5,116552940E+10		33502667		4667117	Mh	7,360000000E+22	
						Mf	5,974200000E+24	
						ω	7,272205217E-05	
Xn	1,329173485E+11	Xh	66496354	Xf	4055955	G	6,672000000E-11	Ff
	4,576711338E+10		-377119564		1437997	Mn	1,988920000E+30	
	5,116552940E+10		33502667		4692147	Mh	7,360000000E+22	
						Mf	5,974200000E+24	
						ω	7,272205217E-05	
Xn	1,329173485E+11	Xh	66496354	Xf	4030150	G	6,672000000E-11	Ff
	4,576711338E+10		-377119564		1428848	Mn	1,988920000E+30	
	5,116552940E+10		33502667		4717130	Mh	7,360000000E+22	
						Mf	5,974200000E+24	
						ω	7,272205217E-05	

-6,459422658		-0,000005371		-0,005268827		0,022123329		-6,442573527	
-2,290121122	Fh	0,000032633	Fn	-0,001814201	Fc	0,007843596	Fg	-2,284059093	g
-7,049373053		-0,000002494		-0,002028078		0,000000000		-7,051403625	

-6,420872945		-0,000005373		-0,005268826		0,021990150		-6,404156994	
-2,276453722	Fh	0,000032634	Fn	-0,001814201	Fc	0,007796379	Fg	-2,270438909	g
-7,089381402		-0,000002492		-0,002028076		0,000000000		-7,091411970	

-6,382164676		-0,000005376		-0,005268825		0,021856111		-6,365582766	
-2,262730107	Fh	0,000032635	Fn	-0,001814200	Fc	0,007748857	Fg	-2,256762816	g
-7,129227472		-0,000002490		-0,002028075		0,000000000		-7,131258036	

-6,343156890		-0,000005378		-0,005268824		0,021721458		-6,326709635	
-2,248900303	Fh	0,000032636	Fn	-0,001814200	Fc	0,007701117	Fg	-2,242980750	g
-7,168752194		-0,000002488		-0,002028073		0,000000000		-7,170782755	

-6,303882811		-0,000005381		-0,005268824		0,021586141		-6,287570875	
-2,234976086	Fh	0,000032637	Fn	-0,001814200	Fc	0,007653142	Fg	-2,229104508	g
-7,207987538		-0,000002486		-0,002028071		0,000000000		-7,210018095	

-6,264495702		-0,000005383		-0,005268823		0,021449905		-6,248320003	
-2,221011797	Fh	0,000032638	Fn	-0,001814200	Fc	0,007604841	Fg	-2,215188518	g
-7,247105508		-0,000002484		-0,002028069		0,000000000		-7,249136061	

-6,224597388		-0,000005386		-0,005268822		0,021313436		-6,208558160	
-2,206866264	Fh	0,000032639	Fn	-0,001814199	Fc	0,007556457	Fg	-2,201091368	g
-7,285643028		-0,000002482		-0,002028068		0,000000000		-7,287673578	

9,820691049
9,821213946
9,821836057
9,822338966
9,822770248
9,823366870
9,823501607

Nyugat-magyarországi Egyetem Geoinformatikai Kar

Dr. Bácsatyai László

MATEMATIKAI GEODÉZIAI SZÁMÍTÁSOK

MGS-1

1 Ellipszoidi számítások, ellipszoid, geoid és terep metszete

SZÉKESFEHÉRVÁR

2011

**Jelen szellemi terméket a szerzői jogról szóló 1999. évi LXXVI. törvény védi.
Egészének vagy részeinek másolása, felhasználás kizárólag a szerző írásos engedélyével lehetséges.**

Ez a modul a
TÁMOP - 4.1.2-08/1/A-2009-0027 „Tananyagfejlesztéssel a GEO-ért” projekt
keretében készült.

A projektet az EU és a Magyar Állam 44 706 488 Ft összegben támogatta.

**Lektor:
Dr. Benedek Judit**

**Projektvezető:
Dr. h.c. Dr. Szepes András**

**Projekt szakmai vezetője:
Dr. Mélykúti Gábor dékán**

Copyright © Nyugat-magyarországi Egyetem 2011

Tartalom

1	Ellipszoidi számítások, ellipszoid, geoid és terep metszete.....	1
1.1	A feladat megfogalmazása.....	5
1.2	A feladatban szereplő fogalmak.....	6
1.2.1	A harántgörbületi sugár.....	6
1.2.2	Magyarázó ábrák és képletek	7
1.2.3	Segédanyagok	11
1.2.4	Számpélda.....	13

1.1 A feladat megfogalmazása

Egy IUGG/1967 ellipszoidi földrajzi koordinátaival adott pont alapján számítsa ki a pont „ y , x ” EOVS és „ Fi , $Lambda$, h ” WGS84 ellipszoidi koordinátáit (zérus tengerszint feletti magasságnál a h érték az U geoidundulációval egyezik meg)! A számításhoz használja HUNG_331. EXE programot!

Számítsa ki az ezen a ponton áthaladó WGS84 ellipszoidi meridián ívpontjaihoz tartozó N harántgörbületi sugár, valamint a megfelelő geoidi és terepi normálisok 20 percenkénti értékeit (összesen 7 pontban) 0,001 m élességgel, a $\varphi = 46^\circ$ és a $\varphi = 48^\circ$ földrajzi szélességek között! Szerkessze meg ezen a szakaszon a meridián 20 ívperc sűrűségű metszetét (N) és ábrázolja a geoid (N_{geoid}) és a terep (N_{terep}) metszéspontjait is! A metszetek ábrázolásának méretaránya olyan legyen, hogy a rajz ráférjen egy A4-es lapra, ill. kitöltse azt. Hossz- és magassági irányban a méretarányok különbözhetnek!

A számításhoz és szerkesztéshez használja a tengerszint (geoid) feletti magassági adatokat (H) és a geoidundulációkat (U)! A H értékeket olvassa le a Google Earth világhálós térképről, az U értékek meghatározásához használja a HUNG_331.EXE programot. A Magyarország területére eső U értékeket ellenőrizze a Magyarország WGS84 ellipszoidra vonatkozó geoidunduláció (U) térképén és számítsa ki az eltéréseket! A későbbi számításokhoz a számított U értékeket használja!

Az ellipszoidi meridián ívpontjaiban számítsa ki az X , Y , Z térbeli koordinátákat az ellipszoid, a geoid és a terep megfelelő pontjaiban!

A kiinduló alappontban az IUGG/1967 ellipszoid paramétereivel számítsa ki a Gauss-gömb sugarát (R)!

Leadandók különálló borítólapba foglalva:

- Kiinduló adatok (feladatlapba foglalva),
- H - U táblázat (a tengerszint feletti és terepi magasságok, valamint a geoidundulációk összefoglaló táblázata)
- Harántgörbületi sugarak számítása (táblázat),
- Magassági adatok listája és a metszet adatainak számítása (geoidi, valamint a terepi normálisok számítása, táblázat),
- Grafikus ábrázolás hagyományosan vagy grafikus szerkesztővel (az U és H értékek kicsik, ezért a rajzi ábrázoláshoz az U és a H számított értékeit összeadás előtt szorozzuk meg 50-nel),
- Térbeli koordináták (táblázat) és a Gauss-gömb sugarának számítása,
- Szöveges műszaki leírás

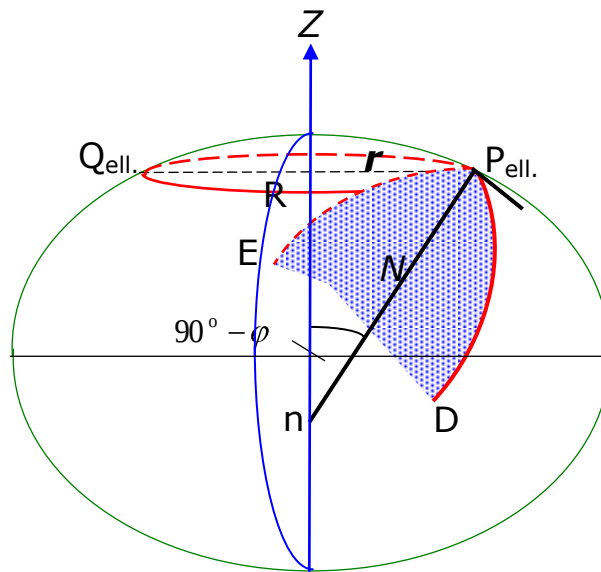
A feladat megoldásához tetszőleges eszközök (pl. Excel) használhatók. A feladatot – táblázatonként a felhasznált képletek és tájékoztató szöveges információkkal együtt – különálló borítólapba foglalva – kézzel írott, vagy Microsoft Word formátumban kell leadni.

1.2 A feladatban szereplő fogalmak

1.2.1 A harántgörbületi sugár

A háromdimenziós felület P felületi pontjában húzott érintő egyeneshez illeszkedő ferdemetszet¹ görbületi sugara egyenlő az ugyanazon érintőhöz illeszkedő normálmetszet² görbületi sugarának és a két metszeti sík közbezárt szöge cosinusának (Meusnier-tétel) szorzatával. Forgási ellipszoid esetén a $P_{ell.}$ pontban a normálisra illeszkedő és a meridiánra merőleges normálmetszet $P_{ell.}DE$ síkja (1. ábra) a $P_{ell.}$ ponton átmenő ferdemetszet (szélességi kör)³ $P_{ell.}RQ_{ell.}$ síkjával φ szöget zár be, azaz

$$r = \overline{P_{ell.}n} \cdot \cos \varphi.$$



1. ábra

A fenti összefüggés és a Meusnier-tétel alapján következik, hogy a P pontból az ellipszoidhoz húzott normális $\overline{P_{ell.}n}$ szakasza, ahol az n pont a normális és a Z tengely metszéspontja, maga az N harántgörbületi sugár (az első vertikális síkba eső görbületi sugár):

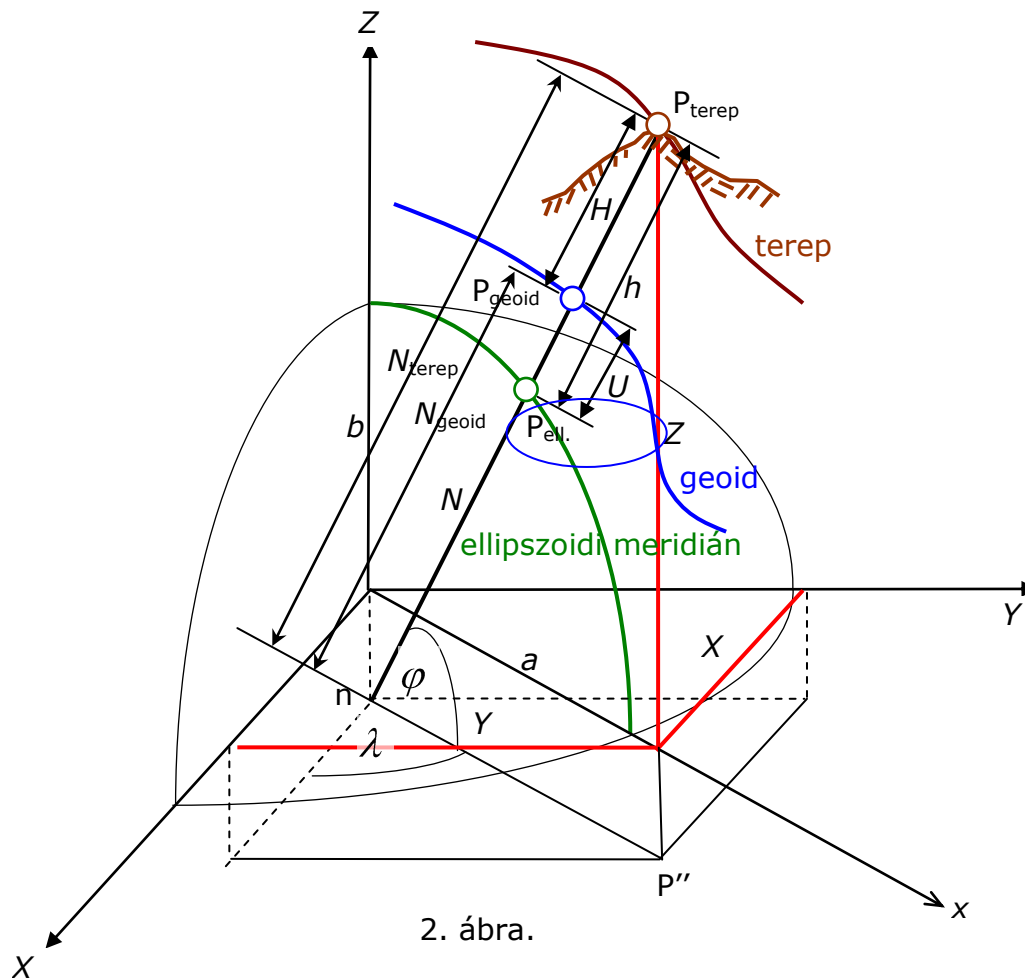
$$N = \overline{P_{ell.}n}.$$

¹ Ferdemetszet alatt a P ponton áthaladó tetszőleges sík által kimetszett görbét értjük.

² A felület P pontbeli normálisára illeszkedő síkok a felületet normálmetszetekben metszik.

³ A forgási ellipszoid $P_{ell.}$ pontjában felvett normál metszetek közül az ellipszoidi főmetszetek (a $P_{ell.}$ ponton átmenő meridián, illetve a $P_{ell.}DE$ a $\overline{P_{ell.}n}$ normálison áthaladó és a meridiánra merőleges, ún. első vertikális sík) és ferdemetszetek közül a szélességi kör.

1.2.2 Magyarázó ábrák és képletek



Első numerikus excentricitás:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

Geoidunduláció:

$$U = h - H .$$

Jelölések:

a – ellipszoid fél nagytengelye

b – ellipszoid fél kistengelye

h – ellipszoidi magasság

H – geoid (tengerszint) feletti magasság

Munkaképletek:

Harántgörbületi sugár:

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} .$$

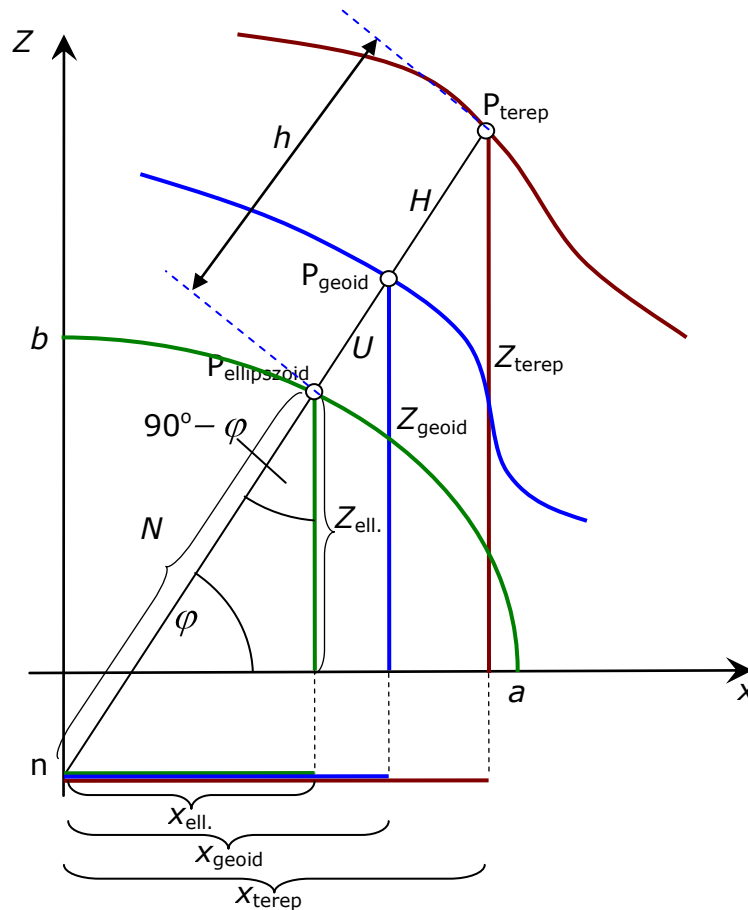
Normálisok hossza:

$$N_{\text{geoid}} = N + U ,$$

$$N_{\text{terep}} = N + h = N_{\text{geoid}} + H .$$

φ – ellipszoidi szélesség

Az alábbi ábrától eltérően az U és H értékek kicsik, ezért a rajzi ábrázolás plasztikussága végett az U és a H számított értékeit összeadás előtt szorozzuk meg 50-nel!



3. ábra.

A $\varphi = 46^\circ$ és a $\varphi = 48^\circ$ tartományban szerkesztendő 7 pont x (kis x) és Z koordinátái az ábra szerint (xZ a meridián síkja):

Az ellipszoidon:

$$x_{\text{ell.}} = N \cdot \cos \varphi .$$

$$Z_{\text{ell.}} = \frac{b^2}{a^2} \cdot N \cdot \sin \varphi .$$

A geoidon:

$$x_{\text{geoid}} = (N + U) \cdot \cos \varphi .$$

$$Z_{\text{geoid}} = \left(\frac{b^2}{a^2} \cdot N + U \right) \cdot \sin \varphi .$$

A terepen:

$$x_{\text{terep}} = (N + h) \cdot \cos \varphi .$$

$$Z_{\text{terep}} = \left(\frac{b^2}{a^2} \cdot N + h \right) \cdot \sin \varphi .$$

Térbeli koordináták:

Ellipszoid:

$$X_{\text{ell.}} = N \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda$$

$$Y_{\text{ell.}} = N \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda \quad .$$

$$Z_{\text{ell.}} = \frac{b^2}{a^2} \cdot N \cdot \sin \varphi .$$

Geoid:

$$X_{\text{geoid}} = (N + U) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda$$

$$Y_{\text{geoid}} = (N + U) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda \quad .$$

$$Z_{\text{geoid}} = \left(\frac{b^2}{a^2} \cdot N + U \right) \cdot \sin \varphi .$$

Terep:

$$X_{\text{terep}} = (N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda$$

$$Y_{\text{terep}} = (N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda \quad .$$

$$Z_{\text{terep}} = \left(\frac{b^2}{a^2} \cdot N + h \right) \cdot \sin \varphi .$$

A Gauss-gömb⁴ sugara:

$$R = \sqrt{M \cdot N} ,$$

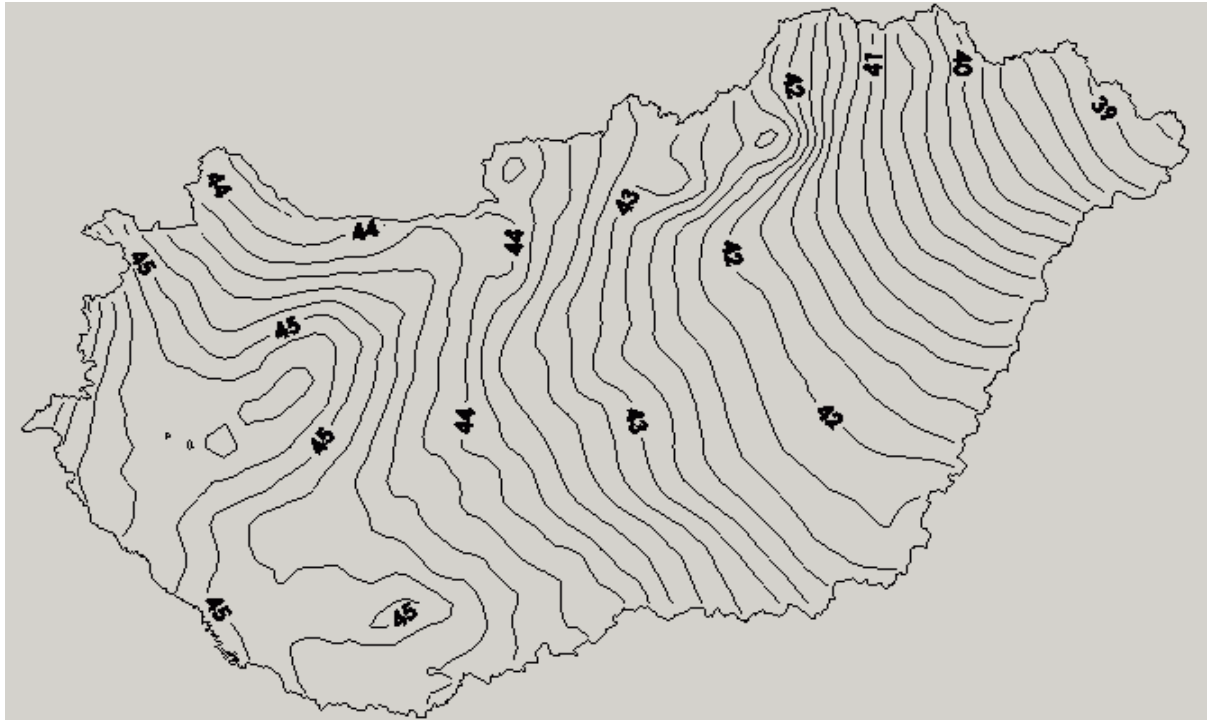
ahol

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - \text{meridián irányú görbületi sugár.}$$

⁴ A kettős (közvetett) vetítésű vetületeknél a vetítés első lépése (a vetítést első lépésben az ellipszoidról gömbre (Gauss-gömb), második lépésben a Gauss-gömbről a síkra végezzük el).

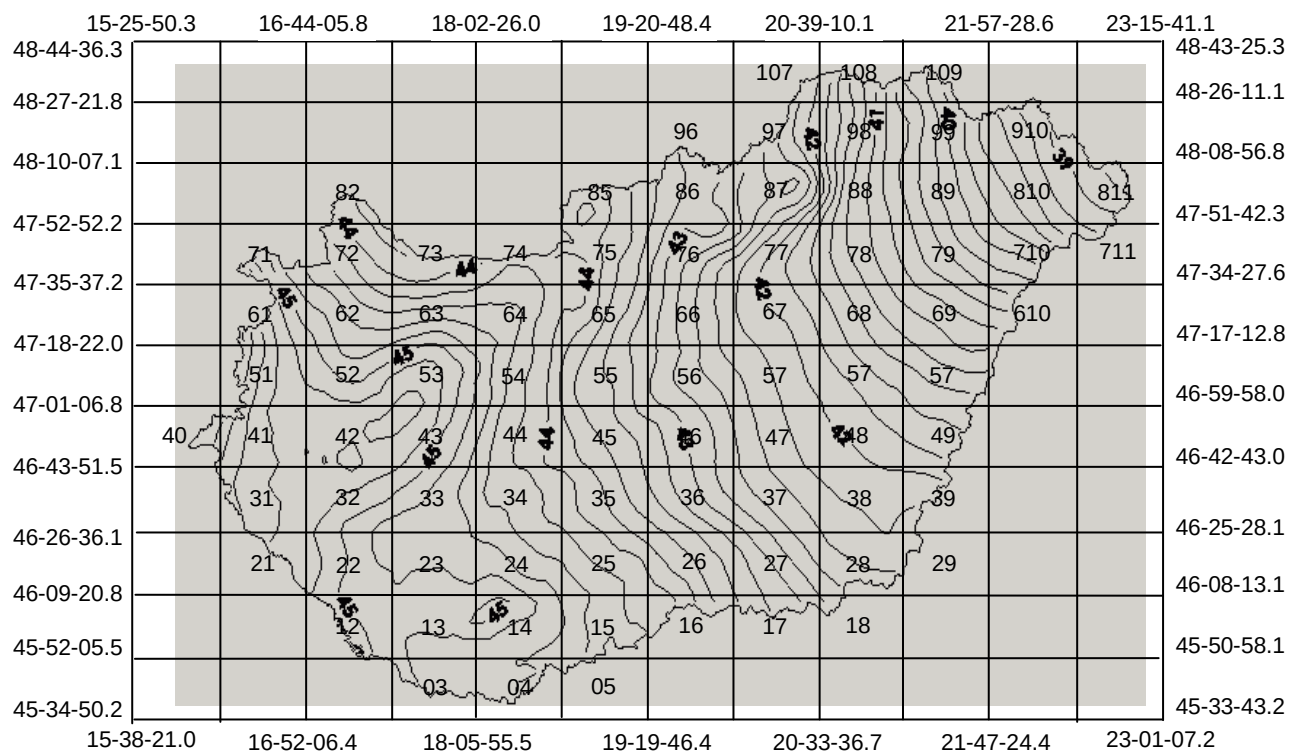
1.2.3 Segédanyagok

Magyarország WGS84 ellipszoidra vonatkozó geoidunduláció térképe⁵:



Magyarország WGS84 ellipszoidra vonatkozó geoidunduláció térképe + az EOV szelvényhálózata WGS84 ellipszoidi felületi koordinátákkal:

⁵ EGG97 jel_ európai geoidmegoldás eredménye alapján. Szintvonalköz: 0,2 m. (Ádám et al, 2000, Tóth et al. 2000)



1.2.4 Számpélda

Ellipszoidi számítások, ellipszoid, geoid és terep metszete

Alapadatok:

Az ellipszoid neve	Közlésének éve	$a(m)$	$b(m)$
WGS84	1984	6378137	6356752,3142
IUGG/1967	1967	6378160	6356774,516

A pont WGS84 ellipszoidi szélessége $\varphi = 46-39-00,96182$

ellipszoidi hosszúsága: $\lambda = 19-31-17,15614$

A pont IUGG/1967 ellipszoidi szélessége $\varphi = 46-39-01,91139$

ellipszoidi hosszúsága: $\lambda = 19-31-21,16007$

A pont EOVS - koordinátái: $y = 686281,550$ m; $x = 145210,830$ m

H-U táblázat

φ	Tengerszint feletti magasság (Google Earth)	Geoidunduláció (HUNG_331-el számított) U (m)	Geoidunduláció (térképről mért) $U_{\text{térkép}}$ (m)	$U - U_{\text{térkép}}$ (m)	Ellipszoidi magasság h (m)
46°	112	44,243	N. a.	N. a.	156,243
46°20'	125	43,895	44,0	-0,105	168,895
46°40'	107	43,356	43,4	-0,044	150,356
47°	127	43,055	43,0	0,055	170,055
47°20'	171	42,904	43,0	-0,096	213,904
47°40'	159	43,003	43,0	0,003	202,003
48°	297	43,272	43,2	0,072	340,272

Számítások

Első numerikus excentricitás:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 0,00669438$$

Ellipszoidi magasság:

$$h = U + H.$$

Harántgörbületi sugár:

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} .$$

Normálisok hossza:

$$N_{\text{geoid}} = N + U ,$$

$$N_{\text{terep}} = N + h = N_{\text{geoid}} + H .$$

Ell. szélesség	N (m)	$N+U$ N_{geoid} (m)	$N+h=N+U+H$ N_{terep} (m)	$N+(50*U)$ (m)	$N+(50*U)+$ $+(50*H)$ (m)
46°	6389212,733	6389256,976	6389368,976	6391424,883	6397024,883
46°20′	6389337,483	6389381,378	6389506,378	6391532,233	6397782,233
46°40′	6389462,173	6389505,529	6389612,529	6391629,973	6396979,973
47°	6389586,786	6389629,841	6389756,841	6391739,536	6398089,536
47°20′	6389711,304	6389754,208	6389925,208	6391856,504	6400406,504
47°40′	6389835,712	6389878,715	6390037,715	6391985,862	6399935,862
48°	6389959,992	6390003,264	6390300,264	6392123,592	6406973,592

A $\varphi = 46^\circ$ és a $\varphi = 48^\circ$ tartományban szerkesztendő 7 pont x (kis x) és Z metszeti koordinátái

Az ellipszoidon:

$$x_{\text{ell.}} = N \cdot \cos \varphi .$$

$$Z_{\text{ell.}} = \frac{b^2}{a^2} \cdot N \cdot \sin \varphi .$$

Szélesség	$x_{\text{ellipszoid}}$ (m)	$Z_{\text{ellipszoid}}$ (m)
46°	4438320,106	4565247,541
46°20′	4411592,75	4590908,017
46°40′	4384714,987	4616414,061
47°	4357687,709	4641764,789
47°20′	4330511,816	4666959,324
47°40′	4303188,211	4691996,793
48°	4275717,804	4716876,33

A geoidon:

$$x_{\text{geoid}} = (N + U) \cdot \cos \varphi .$$

$$Z_{\text{geoid}} = \left(\frac{b^2}{a^2} \cdot N + U \right) \cdot \sin \varphi .$$

Szélesség	x_{geoid} (m)	Z_{geoid} (m)
46°	4438350,839	4565279,367
46°20′	4411623,058	4590939,77
46°40′	4384744,739	4616445,597
47°	4357717,073	4641796,277
47°20′	4330540,894	4666990,871
47°40′	4303217,171	4692028,583
48°	4275746,758	4716908,487

A terepen:

$$x_{\text{terep}} = (N + h) \cdot \cos \varphi .$$

$$Z_{\text{terep}} = \left(\frac{b^2}{a^2} \cdot N + h \right) \cdot \sin \varphi .$$

Szélesség	x_{terep} (m)	Y_{terep} (m)
46°	4438428,641	4565359,933
46°20′	4411709,365	4591030,191
46°40′	4384818,167	4616523,426
47°	4357803,687	4641889,159
47°20′	4330656,786	4667116,609
47°40′	4303324,249	4692146,122
48°	4275945,49	4717129,201

Térbeli koordináták számítása

Ellipszoid:

$$X_{\text{ell.}} = N \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda$$

$$Y_{\text{ell.}} = N \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda$$

$$Z_{\text{ell.}} = \frac{b^2}{a^2} \cdot N \cdot \sin \varphi$$

Szélesség	$X_{\text{ellipszoid}}$ (m)	$Y_{\text{ellipszoid}}$ (m)	$Z_{\text{ellipszoid}}$ (m)
46°	4183190,199	1483106,577	4565247,541
46°20′	4157999,224	1474175,379	4590908,017
46°40′	4132666,487	1465193,921	4616414,061
47°	4107192,830	1456162,501	4641764,789
47°20′	4081579,101	1447081,419	4666959,324
47°40′	4055826,151	1437950,979	4691996,793
48°	4029934,837	1428771,483	4716876,330

Geoid:

$$X_{\text{geoid}} = (N + U) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda$$

$$Y_{\text{geoid}} = (N + U) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda$$

$$Z_{\text{geoid}} = \left(\frac{b^2}{a^2} \cdot N + U \right) \cdot \sin \varphi$$

Szélesség	X_{geoid} (m)	Y_{geoid} (m)	Z_{geoid} (m)
46°	4183219,166	1483116,847	4565279,367
46°20'	4158027,789	1474185,507	4590939,770
46°40'	4132694,529	1465203,863	4616445,597
47°	4107220,506	1456172,313	4641796,277
47°20'	4081606,507	1447091,136	4666990,871
47°40'	4055853,446	1437960,656	4692028,583
48°	4029962,127	1428781,158	4716908,487

Terep:

$$X_{\text{terep}} = (N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda$$

$$Y_{\text{terep}} = (N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda$$

$$Z_{\text{terep}} = \left(\frac{b^2}{a^2} \cdot N + h \right) \cdot \sin \varphi$$

Szélesség	X_{terep} (m)	Y_{terep} (m)	Z_{terep} (m)
46°	4183292,496	1483142,846	4565359,933
46°20′	4158109,136	1474214,347	4591030,191
46°40′	4132763,736	1465228,399	4616523,426
47°	4107302,141	1456201,256	4641889,159
47°20′	4081715,737	1447129,862	4667116,609
47°40′	4055954,368	1437996,437	4692146,122
48°	4030149,435	1428847,566	4717129,201

Az IUGG/1967 ellipszoid Gauss-gömbjének görbületi sugara:

$$R = \sqrt{M \cdot N} = 6379357,75 \text{ m}$$

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = 6369251,98 \text{ m}$$

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} = 6389479,56 \text{ m}$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 0,006694605$$

Irodalomjegyzék

Bácsatyai László: Vetülettan, elektronikus jegyzet pdf formátumban, NYME Geoinformatikai Kar, Székesfehérvár

http://www.geo.info.hu/geodezia/index.php?option=com_content&task=view&id=26&Itemid=41

Bácsatyai László: Magyarországi vetületek, tankönyv, Szaktudás Kiadó Ház, Budapest, 2006.

Bácsatyai László: Magyarországi vetületek, elektronikus tankönyv

http://www.geo.info.hu/geodezia/index.php?option=com_content&task=view&id=26&Itemid=41

Hazay István: Földi vetületek. Akadémia Kiadó, Budapest, 1954.

Németh Gyula: Vetülettan, EFE Geoinformatikai Kar, Székesfehérvár, 2003.

Varga József: Alaphálózatok I. (Vetülettan). Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.

Tóth Gy.–Rózsa Sz.–Andritsanos, V. D.–Ádám J.–Tziavos, I. N. (2000): Towards a cm-geoid for Hungary – Recent Efforts and Results. *Phys. Chem. Earth (A)*, Vol. 25 (2000), No. 1, 47–52

Ádám A., Gázsó M., Kenyeres A., Virág G. (2000): Az Állami Földmérésnél 1969 és 1999 között végzett geoidmeghatározási munkálatok, *Geodézia és Kartográfia*, 52 (2000), 2, pp. 7-14.

Nyugat-magyarországi Egyetem Geoinformatikai Kar

Dr. Bácsatyai László

MATEMATIKAI GEODÉZIAI SZÁMÍTÁSOK

MGS-2

2 Geodéziai vonal és ábrázolása gömbön és vetületben

SZÉKESFEHÉRVÁR

2011

**Jelen szellemi terméket a szerzői jogról szóló 1999. évi LXXVI. törvény védi.
Egészének vagy részeinek másolása, felhasználás kizárólag a szerző írásos engedélyével lehetséges.**

Ez a modul a
TÁMOP - 4.1.2-08/1/A-2009-0027 „Tananyagfejlesztéssel a GEO-ért” projekt
keretében készült.

A projektet az EU és a Magyar Állam 44 706 488 Ft összegben támogatta.

**Lektor:
Dr. Benedek Judit**

**Projektvezető:
Dr. h.c. Dr. Szepes András**

**Projekt szakmai vezetője:
Dr. Mélykúti Gábor dékán**

Copyright © Nyugat-magyarországi Egyetem 2011

Tartalom

2 Geodéziai vonal és ábrázolása gömbön és vetületben	1
2.1 A feladat megfogalmazása.....	5
2.2 Fogalmak és képletek	6
2.2.1 Ortodróma és loxodróma	6
2.2.2 Az ortodróma gömbi földrajzi koordinátáinak számítása.....	7
2.2.3 A pontok térbeli koordinátáinak számítása	9
2.2.4 A pontok vetületi koordinátáinak számítása	11
2.2.5 Segédanyagok	14
2.2.6 Számpélda a képzetes vetületre	16

2.1 A feladat megfogalmazása

Számítsa ki a Budapest-Ferihegy ($\varphi = 47^\circ 25'$ és $\lambda = 19^\circ 15'$) repülőtérrel megadott azimuttal induló és oda visszatérő geodéziai vonal pontjainak φ és λ földrajzi koordinátáit, a $\theta = 15^\circ, 30^\circ, \dots, 345^\circ, 360^\circ$ helyeken. Nyomtassa ki a gömb megadott axonometrikus képét, szerkessze meg az X, Y, Z gömbi axonometrikus koordinátarendszert, mérje le mm-ben a rövidült gömbi sugarakat, majd a rövidült sugarak alapján számítsa ki a 24 pont X, Y, Z rajzi koordinátáit. Szerkessze meg a gömb felszínén a látható pontokat, majd rajzolja meg a geodéziai vonalat.

Számítsa ki mm-ben a megadott vetületi egyenletek felhasználásával a 24 pont y, x síkkordinátáit és szerkessze fel azokat a vetület kinyomtatott képére. Ellenőrizze a pontok helyét a földrajzi hálózat segítségével, majd rajzolja meg a geodéziai vonal képét.

Földrajzi atlaszon azonosítsa, és táblázatban sorolja fel azokat az államokat, amelyeken a geodéziai vonal áthalad.

Leadandók különálló borítólapba foglalva:

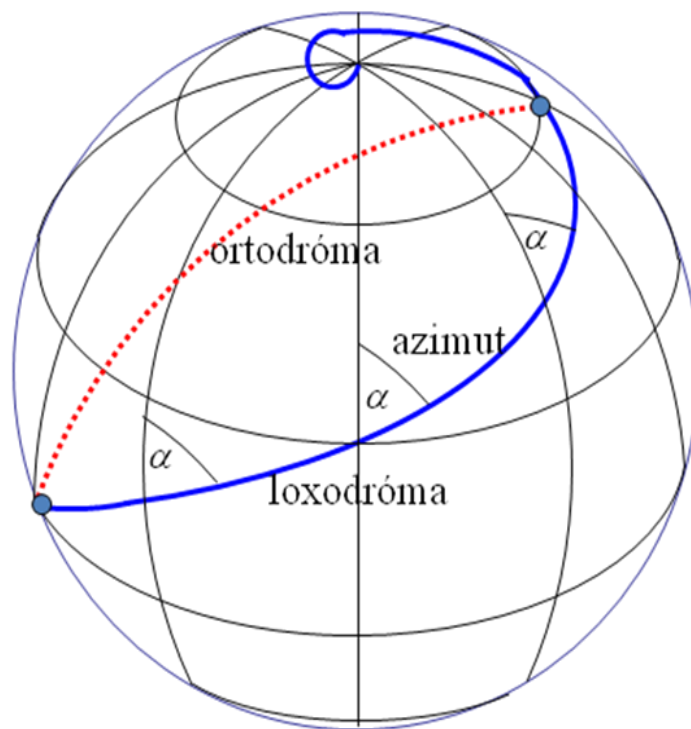
- Kiinduló adatok,
- Számítások képletei,
- Számítások eredményei táblázatos formában,
- Geodéziai vonal szerkesztése és ábrázolása gömbön hagyományosan vagy grafikus szerkesztővel,
- Geodéziai vonal szerkesztése és ábrázolása vetületben hagyományosan vagy grafikus szerkesztővel.

A feladat megoldásához tetszőleges eszközök (pl. Excel) használhatók. A feladatot – táblázatonként a felhasznált képletek és tájékoztató szöveges információkkal együtt – különálló borítólapba foglalva - kézzel írott, vagy Microsoft Word formátumban kell leadni.

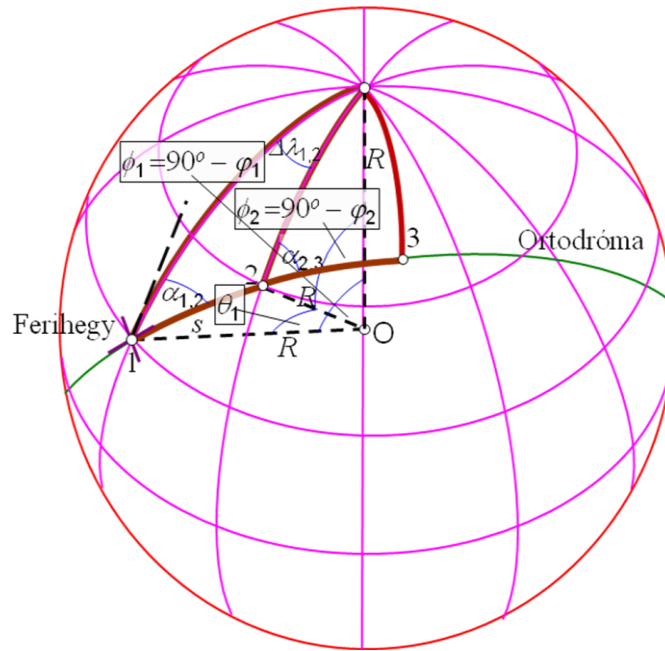
2.2 Fogalmak és képletek

2.2.1 Ortodróma és loxodróma

Az ortodróma görög szó, szó szerinti fordításban „egyenes futást” jelent. Az a hajó, amely e vonal mentén törekszik céljának elérésére, a legrövidebb utat, vagyis a legnagyobb gömbi körívet követi. Az ortodróma és a gömbi geodéziai vonal ekvivalens kifejezések. Látjuk, hogy a meridiánokat mindig más-más szög alatt metszik, az e szerinti tájékozódás nem egyszerű. A loxodróma „ferde futást” jelent és azimutja állandó. A loxodróma a meridiánok és az egyenlítő mentén megegyezik a legnagyobb gömbi körrel, a szélességi körök mentén pedig a megfelelő gömbi szélességű gömbi körrel. Más irányban egy olyan csavarvonal, amely aszimptotikusan közeledik, csavarodik a pólushoz. A régi hajósok csak arra ügyeltek, hogy iránytűjük segítségével ezt a szöget tartsák. A navigálás így egyszerű, de idővesztéses volt, a loxodróma ugyanis hosszabb, mint az ortodróma.



2.2.2 Az ortodróma gömbi földrajzi koordinátáinak számítása



Első geodéziai főfeladat a gömbön¹

Adottak:

Az 1 pont gömbi pólustávolsága: $\phi_1 = 90^\circ - \varphi_1$

Az s gömbi íveknek megfelelő középponti szögek: $\theta = \frac{s}{R} \cdot \rho^\circ$, ahol $\rho^\circ = \frac{180}{\pi}$.

Az 1 pont gömbi hosszúsága: λ_1

Az 12 gömbi szakasz gömbi azimutja: $\alpha_{1,2}$

Keressük: $\varphi_2; \lambda_2; \varphi_3; \lambda_3; \dots$

Számítás:

A földrajzi szélességeket a gömbháromszögtan cosinus-tétele(i)vel számítjuk:

Az oldal cosinus-tétele alapján

$$\cos \phi_2 = \cos \phi_1 \cdot \cos \theta_1 + \sin \phi_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \cos \alpha_{1,2}; \quad \varphi_2 = 90^\circ - \phi_2$$

$$\cos \phi_3 = \cos \phi_1 \cdot \cos \theta_2 + \sin \phi_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \alpha_{1,2}; \quad \varphi_3 = 90^\circ - \phi_3$$

.....

$$\cos \phi_{25} = \cos \phi_1 \cdot \cos \theta_{24} + \sin \phi_1 \cdot \sin \theta_{24} \cdot \cos \alpha_{1,2}; \quad \varphi_{25} = 90^\circ - \phi_{25}$$

A ϕ_{25} és a φ_{25} a kiinduló-befejező Ferihegy pontra vonatkozik, ha Ferihegy pontot 1-gyel jelöljük.

¹ A gömbön az ortodroma, geodéziai vonal és a gömbi főkör fogalmak egybeesnek.

Ponthelyek az ortodróma mentén: $\theta_1 = 15^\circ, \theta_2 = 30^\circ, \dots, \theta_{23} = 345^\circ, \theta_{24} = 360^\circ$.

A földrajzi hosszúságokat a gömbháromszögtan sinus-tétele(i)-vel számítjuk:

$$\frac{\sin \Delta\lambda_{1,2}}{\sin \alpha_{1,2}} = \frac{\sin \Delta\theta}{\sin \phi_2} \longrightarrow \sin \Delta\lambda_{1,2} = \sin \alpha_{1,2} \cdot \frac{\sin \Delta\theta}{\sin \phi_2} \longrightarrow \lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_{1,2}$$

$$\frac{\sin \Delta\lambda_{2,3}}{\sin \alpha_{2,3}} = \frac{\sin \Delta\theta}{\sin \phi_3} \longrightarrow \sin \Delta\lambda_{2,3} = \sin \alpha_{2,3} \cdot \frac{\sin \Delta\theta}{\sin \phi_3} \longrightarrow \lambda_3 = \lambda_2 + \Delta\lambda_{2,3}$$

.....

$$\frac{\sin \Delta\lambda_{24,25}}{\sin \alpha_{24,25}} = \frac{\sin \Delta\theta}{\sin \phi_{25}} \longrightarrow \sin \Delta\lambda_{24,25} = \sin \alpha_{24,25} \cdot \frac{\sin \Delta\theta}{\sin \phi_{25}} \longrightarrow \lambda_{25} = \lambda_{24} + \Delta\lambda_{24,25}$$

A fenti képletekben $\Delta\theta = 15^\circ$.

Azimutok számítása:

$$\sin \alpha_{2,3} = \sin \alpha_{12} \cdot \frac{\sin \phi_1}{\sin \phi_2}$$

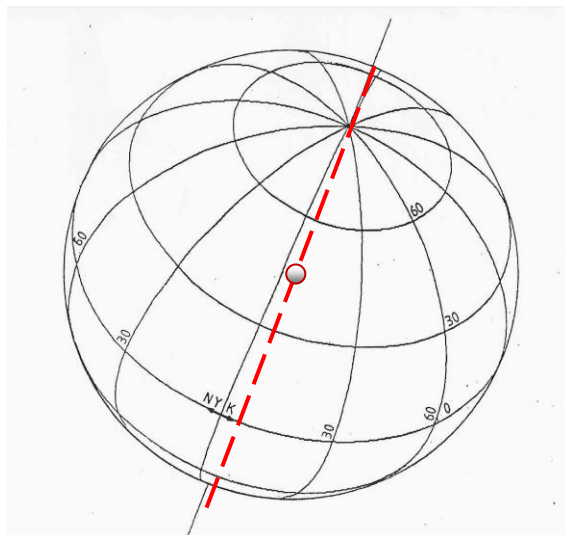
.....

$$\sin \alpha_{24,25} = \sin \alpha_{23,24} \cdot \frac{\sin \phi_{23}}{\sin \phi_{24}}.$$

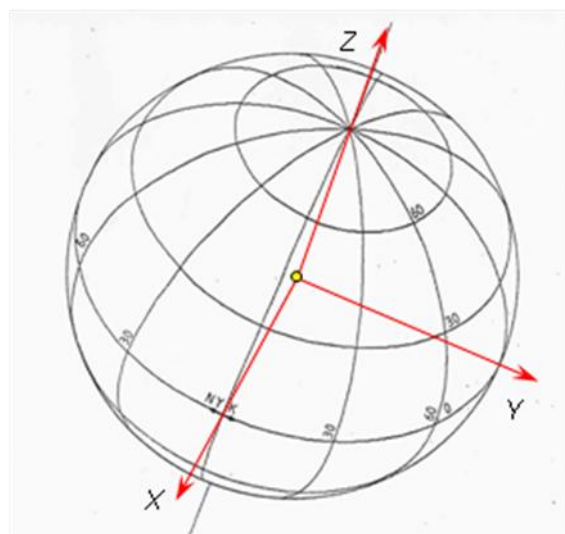
A $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{25}$ földrajzi koordináták számítását folyamatosan végezzük a fenti képletek egymás utáni alkalmazásával.

2.2.3 A pontok térbeli koordinátáinak számítása

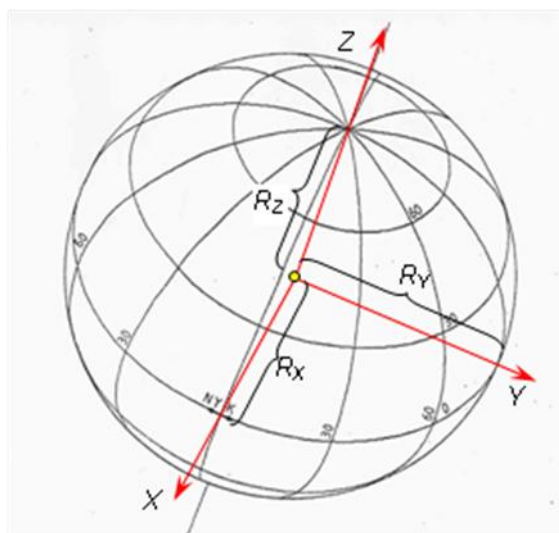
A gömb megadott képének nyomtatása A4 papírra és középpontjának szerkesztése:



X, Y, Z gömbi axonometrikus koordinátarendszer szerkesztése:



Látszólag rövidült sugarak hossza:



A 24 pont rajzi koordinátái a gömb axonometrikus képén:

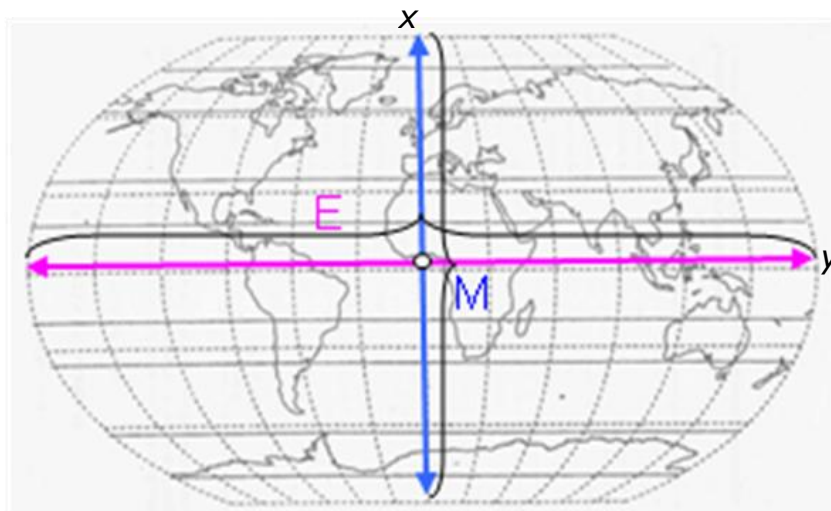
$$X = R_x \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda$$

$$Y = R_y \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda$$

$$Z = R_z \cdot \sin \varphi$$

2.2.4 A pontok vetületi koordinátáinak számítása

Képzetes vetület¹:



1. Vetület nyomtatása fekvő A4 papírra és az egyenlítői E és a kezdő (fél) meridián M képi hosszának mérése.
2. Vetületi egyenletek:

$$y = \frac{\sqrt{3} \cdot \cos \psi \cdot R \cdot \lambda}{2}; \quad x = R \cdot \varphi = R \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} \sin \psi.$$

A képletekben φ és λ radiánban értendő. A ψ és a φ között az alábbi kapcsolat áll fenn:

$$\sin \psi = \frac{\sqrt{3} \cdot \varphi^\circ}{180} = \frac{\sqrt{3} \cdot \varphi_{\text{rad}}}{\pi}; \quad \varphi_{\text{rad}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{3} \cdot \sin \psi.$$

Példa: ha $\varphi = 0$, akkor $\psi = 0$; ha $\varphi = 90^\circ$ ($\pi/2$ rad), akkor $\psi = 60^\circ$ ($\pi/3$ rad).

Az egyenlítőn $\lambda \in [-\pi, \pi]$ és $\varphi = 0$; a kezdő meridiánon $\lambda = 0$, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

3. A $(\varphi, \lambda) = (0, \pi)$ koordinátákat helyettesítve a vetületi egyenletekbe, a sík koordinátarendszerben kapjuk:

$$R_y = \frac{2 \cdot E}{\sqrt{3} \cdot \cos \psi \cdot \lambda} = \frac{2 \cdot E}{\sqrt{3} \cdot \lambda} = \frac{E}{\sqrt{3} \cdot \pi}.$$

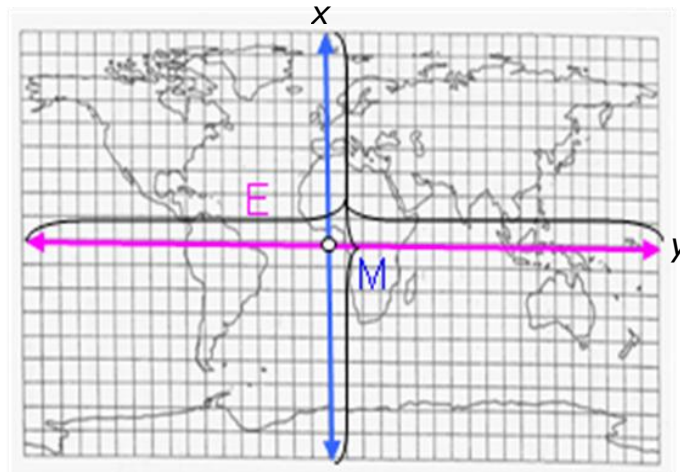
¹ Képzetes vetület: a fokhálózati vonalak képei nem merőlegesek. Az ábra a normális elhelyezésű Kavrajcszkij II. vetületet szemlélteti. A normális elhelyezésű képzetes hengervetület esetén a szélességi körök képei párhuzamos egyenesek; a meridiánok képei tetszőleges törvényszerűséggel leírható görbék; a középméridián képe az y tengely; az egyenlítő képe az x tengely; a vetület nem szögtartó.

A $(\varphi, \lambda)=(\pi/2, 0)$ koordinátákat helyettesítve a vetületi egyenletekbe, kapjuk:

$$R_x = \frac{M}{2 \cdot \varphi} = \frac{M}{\pi}.$$

A kinyomtatott ábráról lemért E és M értékekből kapott két sugárnak jó közelítéssel egyeznie kell.

Valódi vetület¹:



1. Vetület nyomtatása fekvő A4 papírra és az egyenlítői E és a kezdő (fél) meridián M képi hosszának mérése
2. Vetületi egyenletek:

$$y = R \cdot \lambda; \quad x = R \cdot \varphi$$

A képletekben φ és λ radiánban értendő.

Az egyenlítőn $\lambda \in [-\pi, \pi]$ és $\varphi = 0$; a kezdő meridiánon $\lambda = 0$, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

3. A $(\varphi, \lambda) = (0, \pi)$ koordinátákat helyettesítve a vetületi egyenletekbe, a sík koordinátarendszerben kapjuk:

$$R_y = \frac{E}{2 \cdot \pi}$$

A $(\varphi, \lambda) = (\pi/2, 0)$ koordinátákat helyettesítve a vetületi egyenletekbe, kapjuk:

$$R_x = \frac{M}{\pi}.$$

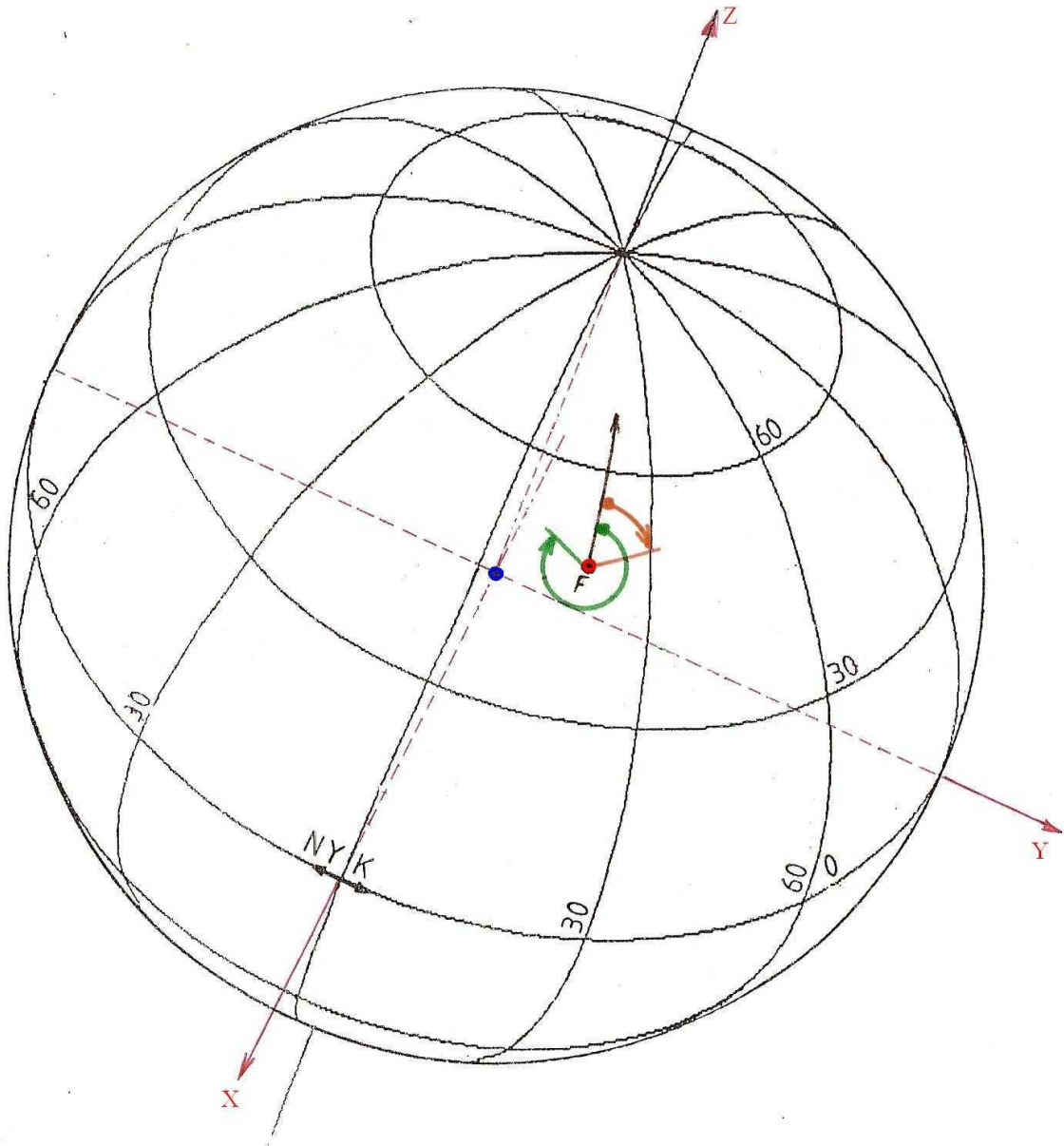
A két sugárnak jó közelítéssel egyeznie kell.

¹ Valódi vetület: a fókálózati vonalak képei merőlegesek. Az ábra a normális elhelyezésű, meridiánokban hossztartó valódi hengervetületet szemlélteti. A valódi hengervetületnél normális elhelyezés esetében a szélességi körök képei párhuzamos egyenesek; a meridiánok képei párhuzamos egyenesek; a meridiánok képei a szélességi körök képeit merőlegesen metszik; a meridiánok képének távolsága arányos a hosszkülönbséggel.

2.2.5 Segédanyagok

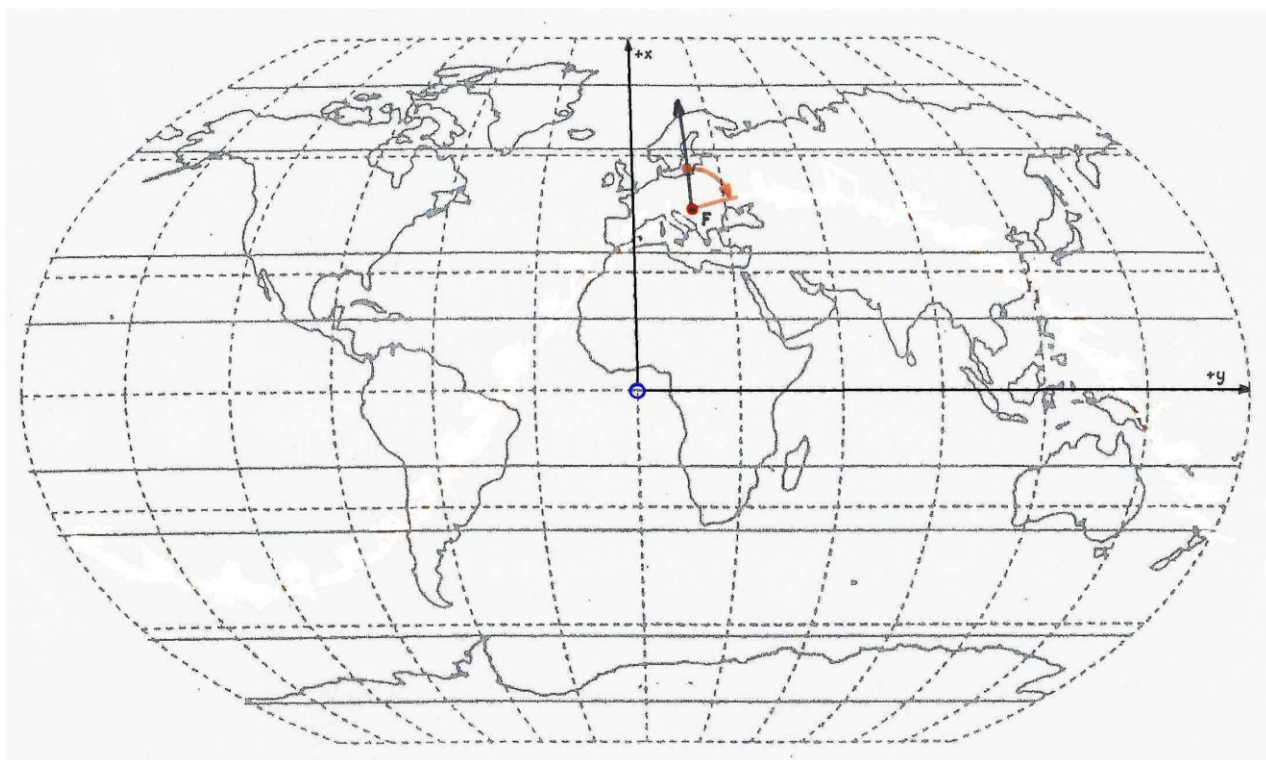
A gömb képét az itt látható méretben álló helyzetű A4 lapra, a vetületek képeit nagyítva, fekvő helyzetű A4 lapra másoljuk át és nyomtatjuk ki.

A gömb

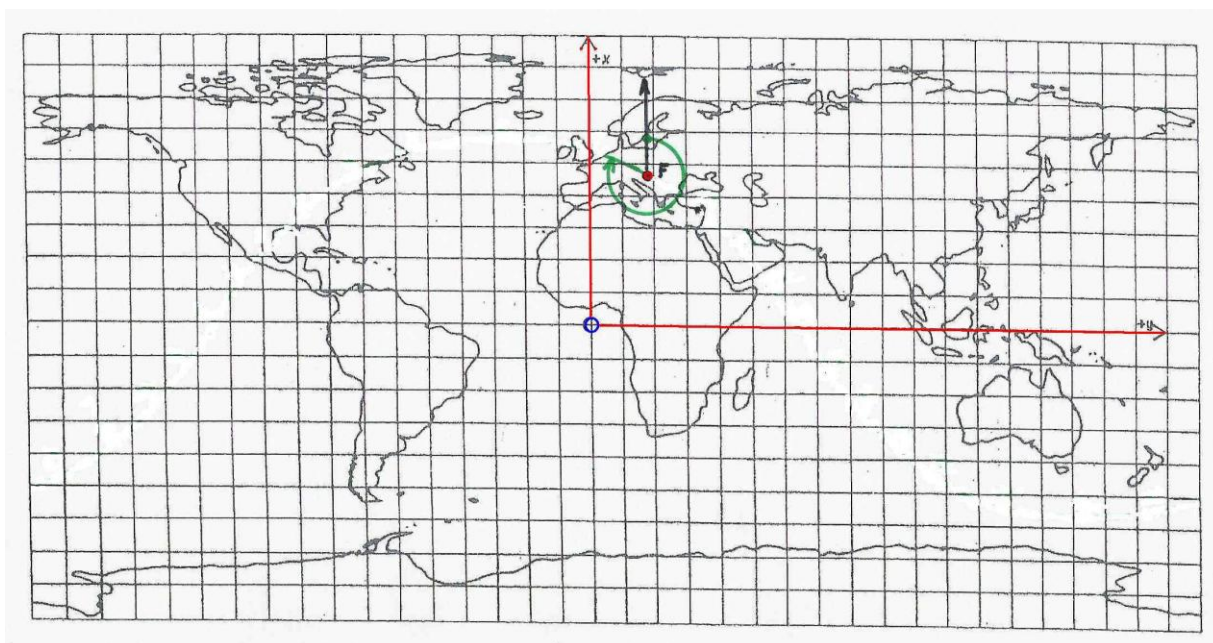


Megjegyzés: Az ábrán a barna, ill. a zöld színű szögek a kiinduló azimutokat jelölik: a barna színnel jelölt szög azt jelzi, hogy a képzetes vetületben a kiinduló azimut értéke 0° és 90° között van, a zöld színnel jelölt szög pedig azt, hogy a valódi vetületet tartalmazó feladatok kiinduló azimutja 270° és 360° közé esik.

Képzetes vetület



Valódi vetület



A barna és zöld színű szögek értelmezése megegyezik a gömbnél elmondottakkal.

2.2.6 Számpélda a képzetes vetületre

Geodéziai vonal és ábrázolása a gömbön és vetületen

Számítjuk egy repülőgép Föld megkerülése során megtett geodéziai vonal pontjait. A repülőgép Budapest-Ferihegyről indul egy megadott azimut értékkel. A pontok meghatározása 15° -os gömbi középponti szögértékeknél történik $/15^\circ, 30^\circ, \dots 360^\circ/$.

Kiinduló adatok:

név	φ	λ	α
Ferihegy	$47^\circ 25'$	$19^\circ 15'$	52°

A megadott adatokból kiszámítható az első pont gömbi pólustávolsága, ϕ :

$$\phi_1 = 90^\circ - \varphi_1; \quad \phi_1 = 42,58^\circ,$$

Itt $\varphi_1 = \varphi$; $\lambda_1 = \lambda$; $\alpha_{1,2} = \alpha$.

A többi pont földrajzi szélességeit hasonlóképpen kapjuk.

Gömbi földrajzi szélességek (φ) meghatározása:

A 24 pont gömbi földrajzi szélességeinek (φ) meghatározása a gömbháromszögtan cosinus tétele felhasználásával, valamint a gömbi ívnek megfelelő középponti szög (θ) kiszámításával történik.

A gömbháromszögtan cosinus tétele:

$$\cos \phi_2 = \cos \phi_1 \cdot \cos \theta_1 + \sin \phi_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \cos \alpha_{1,2}$$

A θ értékét értékét 15° -onként vesszük fel: $15^\circ, 30^\circ, \dots 360^\circ$.

A számított gömbi pólustávolságból meghatározható az új pont földrajzi szélességei (φ):

$$\phi_2 = 90^\circ - \varphi_2 \longrightarrow \varphi_2 = 90^\circ - \phi_2,$$

ill., hasonló módon, a többi pont földrajzi szélessége is.

Pont száma	θ	ϕ (fok, tizedfok)	φ (fok, tizedfok)	φ (áldecimális) (Fok, perc)
1 (Ferihegy)	0°	42,58	47,42	47.25
2	15°	35,01	54,99	54.59
3	30°	32,23	57,77	57.46
4	45°	35,39	54,61	54.36
5	60°	43,20	46,80	46.47
6	75°	53,63	36,37	36.22
7	90°	65,38	24,62	24.37
8	105°	77,77	12,23	12.13
9	120°	90,42	-0,42	-0.25
10	135°	103,07	-13,07	-13.03
11	150°	115,43	-25,43	-25.25
12	165°	127,11	-37,11	-37.06
13	180°	137,42	-47,42	-47.25
14	195°	144,99	-54,99	-54.59
15	210°	147,77	-57,77	-57.46
16	225°	144,61	-54,61	-54.36
17	240°	136,80	-46,80	-46.47
18	255°	126,37	-36,37	-36.22
19	270°	114,62	-24,62	-24.37
20	285°	102,23	-12,23	-12.13
21	300°	89,58	0,42	0.25
22	315°	76,93	13,07	13.03
23	330°	64,57	25,43	25.25
24	345°	52,89	37,11	37.06
25 (Ferihegy)	360°	42,58	47,42	47.25

Gömbi földrajzi hosszúságok (λ) meghatározása:

A földrajzi hosszúságok kiszámításához a gömbháromszögtan sinus tételét használjuk.

A gömbháromszögtan sinus tétele:

$$\frac{\sin \Delta\lambda_{1,2}}{\sin \alpha_{1,2}} = \frac{\sin \Delta\theta}{\sin \phi_2}$$

A végleges koordinátákat innen a

$$\Delta\lambda_{1,2} = \arcsin\left(\sin \alpha_{1,2} \cdot \frac{\sin \Delta\theta}{\sin \phi_2}\right)$$

Az azimutok sinusainak meghatározása:

$$\sin \alpha_{2,3} = \sin \alpha_{1,2} \cdot \frac{\sin \phi_1}{\sin \phi_2}$$

A számítás során a képletek indexeit a pontszámoknak megfelelően módosítjuk.

A gömbi pólustávolság (Φ) már ismert a ϕ érték kiszámításánál.

A $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{25}$ földrajzi hosszúságok számítását folyamatosan végezzük a

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_{1,2} \dots\dots$$

képletek egymás utáni alkalmazásával.

Pont száma	Azimutok sorszáma	ϕ (fok, tizedfok)	$\Delta\lambda$ (fok, tizedfok)	λ (fok, tizedfok)	λ (áldecimális) (Fok, perc)
1 (Ferihegy)		42,58		19,25	19.15
2	1_2	35,01	20,82	40,07	40.04
3	2_3	32,23	26,81	66,88	66.53
4	3_4	35,39	26,54	93,43	93.25
5	4_5	43,20	20,37	113,79	113.47
6	5_6	53,63	14,50	128,29	128.17
7	6_7	65,38	10,87	139,16	139.09
8	7_8	77,77	8,94	148,10	148.05
9	8_9	90,42	8,12	156,21	156.12
10	9_10	103,07	8,14	164,36	164.21
11	10_11	115,43	9,03	173,38	173.23
12	11_12	127,11	11,05	-175,57	-175.34
13	12_13	137,42	14,82	-160,75	-160.45
14	13_14	144,99	20,82	-139,93	-139.55
15	14_15	147,77	26,81	-113,12	-113.06
16	15_16	144,61	26,54	-86,57	-86.34
17	16_17	136,80	20,37	-66,21	-66.12
18	17_18	126,37	14,50	-51,71	-51.42
19	18_19	114,62	10,87	-40,84	-40.50
20	19_20	102,23	8,94	-31,90	-31.54
21	20_21	89,58	8,12	-23,79	-23.47
22	21_22	76,93	8,14	-15,64	-15.38
23	22_23	64,57	9,03	-6,62	-6.36
24	23_24	52,89	11,05	4,43	4.25
25 (Ferihegy)	24_25	42,58	14,82	19,25	19.15

A gömb axonometrikus rajzi koordinátáinak számítása és ábrázolása gömbön:

A rajzi koordináták kiszámítása az alábbi képletekkel történik:

$$X = R_x \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda$$

$$Y = R_y \cdot \cos\varphi \cdot \sin\lambda$$

$$Z = R_z \cdot \sin\varphi$$

Az R_x , R_y és R_z látszólag rövidült sugarak meghatározhatók az A4 lapra nyomtatás után vonalzóval (pl. mm-ben), vagy a gömböt ábrázoló rajz Autocad nevű programba történő beolvasásával, az axonometrikus rajzon a tengelysugarak megszerkesztése után (a hossz mértékegység a számítógépes rajz méretétől függ).

	R_x	R_y	R_z
Mért	540,09	818,61	616,06
Pontszám	X	Y	Z
1	345,03	182,62	453,60
2	237,13	302,36	504,57
3	113,07	401,49	521,15
4	-18,69	473,26	502,22
5	-149,18	512,78	449,06
6	-269,50	517,35	365,30
7	-371,45	486,66	256,65
8	-448,10	422,82	130,50
9	-494,20	330,15	-4,54
10	-506,63	214,99	-139,27
11	-484,53	85,18	-264,51
12	-429,41	-50,44	-371,72
13	-345,03	-182,62	-453,60
14	-237,13	-302,36	-504,57
15	-113,07	-401,49	-521,15
16	18,69	-473,26	-502,22
17	149,18	-512,78	-449,06
18	269,50	-517,35	-365,30
19	371,45	-486,66	-256,65
20	448,10	-422,82	-130,50
21	494,20	-330,15	4,54
22	506,63	-214,99	139,27
23	484,53	-85,18	264,51
24	429,41	50,44	371,72
25	345,03	182,62	453,60

Vetületi koordináták számítása és ábrázolása síkban:

A vetületi koordináták kiszámítása az alábbi képlettel történik:

$$y = \frac{\sqrt{3} \cdot \cos \psi \cdot R \cdot \lambda}{2}; \quad x = R \cdot \varphi$$

A ψ segédmenyiséget az alábbi összefüggésből számítjuk:

$$\sin \psi = \frac{\sqrt{3} \cdot \varphi_{\text{rad}}}{\pi}.$$

A λ és φ értékeket a képletekbe radiánban kell beírni.

Az ábrázoláshoz meg kell határozni az R_y és R_x sugár értékeket:

$$R_y = \frac{E}{\sqrt{3} \cdot \pi}; \quad R_x = \frac{M}{2 \cdot \varphi} = \frac{M}{\pi}.$$

A képletben szereplő E és M értékeket itt is meg lehet határozni rajzról való leméréssel, vagy Autocad programban.

Eredmények:

E	539,56	M	306,95
R_y	99,16	R_x	97,70

Pont száma	y	x
1 (Ferihegy)	25,67	80,86
2	50,96	93,77
3	83,33	98,52
4	119,14	93,12
5	152,29	79,80
6	180,13	62,02
7	202,64	41,98
8	220,42	20,85
9	234,13	-0,72
10	244,39	-22,28
11	251,97	-43,36
12	-245,79	-63,29
13	-214,39	-80,86
14	-177,96	-93,77
15	-140,93	-98,52
16	-110,40	-93,12
17	-88,60	-79,80
18	-72,60	-62,02
19	-59,47	-41,98
20	-47,49	-20,85
21	-35,65	0,72
22	-23,26	22,28
23	-9,61	43,36
24	6,20	63,29
25 (Ferihegy)	25,67	80,86

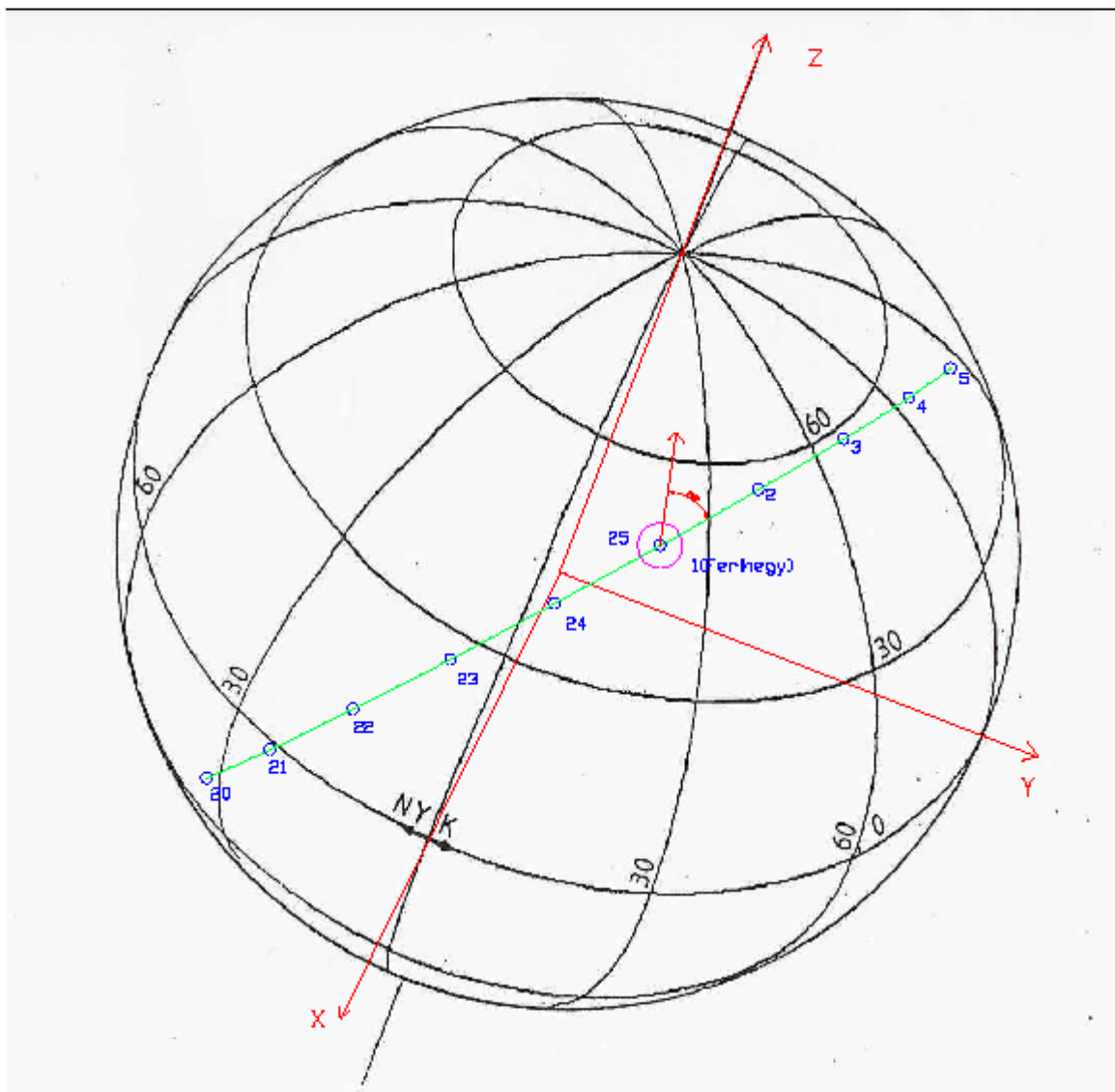
A geodéziai vonal mentén elhelyezkedő országok:

Magyarország – Szlovákia – Lengyelország – Ukrajna – Fehéroroszország – Oroszország – Mongólia – Kína – Észak Korea – Dél Korea – Japán – Chile – Argentína – (Szent – György öböl) – Bissau-Guinea – Szenegál – Gambia – Mauritánia – Algéria – Olaszország – Horvátország – Magyarország

Összefoglaló táblázat:

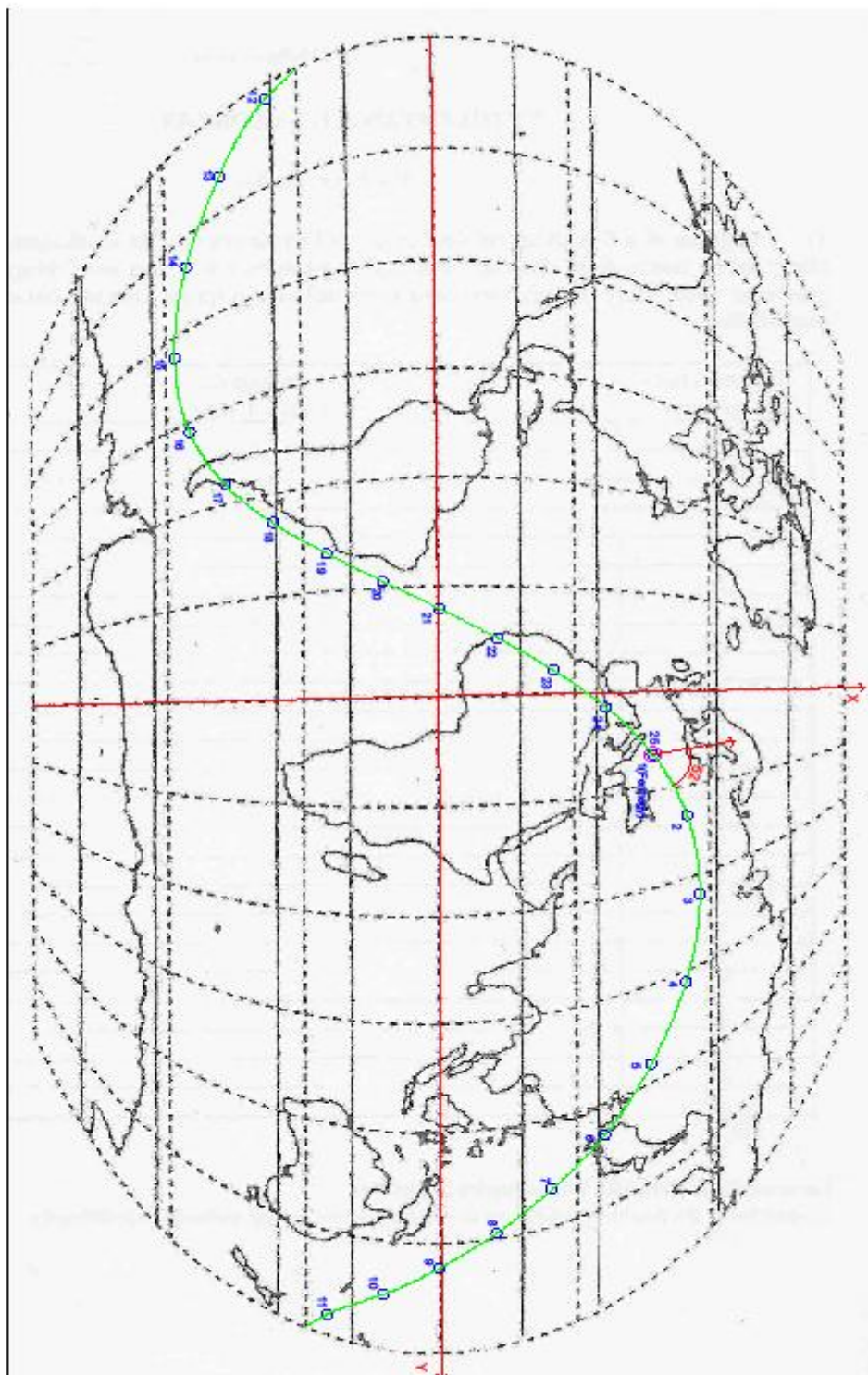
Azimut=52°		Theta=15°	Térbeli koordináták			Ország	Képzetes vetület	
Pont jele	Földrajzi hosszúság (λ) (fok, tizedfok)	Földrajzi szélesség (φ) (fok, tizedfok)	R_x	R_y	R_z		E	M
			540,09	818,61	616,06		539,57	306,95
			AutoCad mértékegység				R_y	R_x
			99,16	97,70				
X	Y	Z	y	x				
1	19,25	47,42	345,03	182,62	453,60	Magyarország	25,67	80,86
2	40,07	54,99	237,13	302,36	504,57	Oroszország	50,96	93,77
3	66,88	57,77	113,07	401,49	521,15	Oroszország	83,33	98,52
4	93,43	54,61	-18,69	473,26	502,22	Oroszország	119,14	93,12
5	113,79	46,80	-149,18	512,78	449,06	Mongólia	152,29	79,80
6	128,29	36,37	-269,50	517,35	365,30	Dél Korea	180,13	62,02
7	139,16	24,62	-371,45	486,66	256,65	Csendes-óceá	202,64	41,98
8	148,10	12,23	-448,10	422,82	130,50	Csendes-óceá	220,42	20,85
9	156,21	-0,42	-494,20	330,15	-4,54	Csendes-óceá	234,13	-0,72
10	164,36	-13,07	-506,63	214,99	-139,27	Csendes-óceá	244,39	-22,28
11	173,38	-25,43	-484,53	85,18	-264,51	Csendes-óceá	251,97	-43,36
12	-175,57	-37,11	-429,41	-50,44	-371,72	Csendes-óceá	-	-63,29
13	-160,75	-47,42	-345,03	-182,62	-453,60	Csendes-óceá	-	-80,86
14	-139,93	-54,99	-237,13	-302,36	-504,57	Csendes-óceá	-	-93,77
15	-113,12	-57,77	-113,07	-401,49	-521,15	Csendes-óceá	-	-98,52
16	-86,57	-54,61	18,69	-473,26	-502,22	Csendes-óceá	-	-93,12
17	-66,21	-46,80	149,18	-512,78	-449,06	Atlanti-óceán	-88,60	-79,80
18	-51,71	-36,37	269,50	-517,35	-365,30	Atlanti-óceán	-72,60	-62,02
19	-40,84	-24,62	371,45	-486,66	-256,65	Atlanti-óceán	-59,47	-41,98
20	-31,90	-12,23	448,10	-422,82	-130,50	Atlanti-óceán	-47,49	-20,85
21	-23,79	0,42	494,20	-330,15	4,54	Atlanti-óceán	-35,65	0,72
22	-15,64	13,07	506,63	-214,99	139,27	Szenegál	-23,26	22,28
23	-6,62	25,43	484,53	-85,18	264,51	Mauritánia	-9,61	43,36
24	4,43	37,11	429,41	50,44	371,72	Földközi	6,20	63,29
25	19,25	47,42	345,03	182,62	453,60	Magyarország	25,67	80,86

Geodéziai vonal képe (a repülőgép útja) a gömbön



Megjegyzés: A piros színnel jelölt szög a kiinduló azimutot jelenti.

Geodéziai vonal képe (a repülőgép útja) a képzetes vetületen



Irodalomjegyzék

Bácsatyai László: Vetülettan, elektronikus jegyzet pdf formátumban, NYME Geoinformatikai Kar, Székesfehérvár

http://www.geo.info.hu/geodezia/index.php?option=com_content&task=view&id=26&Itemid=41

Bácsatyai László: Magyarországi vetületek, tankönyv, Szaktudás Kiadó Ház, Budapest, 2006.

Bácsatyai László: Magyarországi vetületek, elektronikus tankönyv

http://www.geo.info.hu/geodezia/index.php?option=com_content&task=view&id=26&Itemid=41

Hazay István: Földi vetületek. Akadémia Kiadó, Budapest, 1954.

Németh Gyula: Vetülettan, EFE Geoinformatikai Kar, Székesfehérvár, 2003.

Varga József: Alaphálózatok I. (Vetülettan). Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.

Nyugat-magyarországi Egyetem Geoinformatikai Kar

Dr. Bácsatyai László

MATEMATIKAI GEODÉZIAI SZÁMÍTÁSOK

MGS-3

3 Kettős vetítés és EOVSzelvény szám keresése koordinátákból

SZÉKESFEHÉRVÁR

2011

**Jelen szellemi terméket a szerzői jogról szóló 1999. évi LXXVI. törvény védi.
Egészének vagy részeinek másolása, felhasználás kizárólag a szerző írásos engedélyével lehetséges.**

Ez a modul a
TÁMOP - 4.1.2-08/1/A-2009-0027 „Tananyagfejlesztéssel a GEO-ért” projekt
keretében készült.

A projektet az EU és a Magyar Állam 44 706 488 Ft összegben támogatta.

**Lektor:
Dr. Benedek Judit**

**Projektvezető:
Dr. h.c. Dr. Szepes András**

**Projekt szakmai vezetője:
Dr. Mélykúti Gábor dékán**

Copyright © Nyugat-magyarországi Egyetem 2011

Tartalom

3	Kettős vetítés és EOVSzelvényszám keresése koordinátákból.....	1
3.1	A feladat megfogalmazása.....	5
3.2	A feladatban szereplő fogalmak, képletek.....	6
3.2.1	A feladat megoldásához szükséges adatok.....	6
3.2.2	Gauss-gömbi vetületi koordináták.....	6
3.2.3	Egységes Országos Vetületi koordináták.....	7
3.2.4	Lineármódulus és meridiánkonvergencia.....	7
3.2.5	Egységes Országos Vetület szelvényezése	8
3.2.6	Számpélda.....	10

3.1 A feladat megfogalmazása

Számítsa ki adott pont IUGG/1967 ellipszoidi koordinátaiból a Gauss-gömbi földrajzi (és segédföldrajzi) koordinátákat (λ^g és φ^g , $\lambda^{g'}$ és $\varphi^{g'}$) és a Gauss-gömbi földrajzi koordinátákból a pont síkkoordinátáit (y és x) az Egységes Országos Vetületben.

Számítsa ki a pontban jelentkező lineármódulus (l) és meridiánkonvergencia (μ) értékét! Vegye figyelembe, a két metsző segéd szélességi kör földrajzi szélessége $\pm 0^\circ 40' 40,57''$, amelyek mentén hossztorzulás nincs. Így a segéd szélességi körök között hosszrövidülés, a kívül eső területeken hossznövekedés lép fel. A számításokat ellenőrizze a VETÜLET (Bácsatyai-féle, 1993-ból származó) programmal és dokumentálja azokat.

A pont EOVS koordinátái alapján keresse meg azt az 1:1000 méretarányú EOVS szelvényt, amely a pontot tartalmazza. Ábrázolja grafikusan a szelvény szám megkereséséhez szükséges szerkesztést!

Leadandók különálló borítólapba foglalva:

- Kiinduló adatok (feladatlapba foglalva),
- Gömbi földrajzi koordináták, segédkoordináták (képletek, eredmények)
- EOVS síkkoordináták és torzulási jellemzők számítása (képletek, eredmények)
- VETÜLET program eredményeinek dokumentálása
- Grafikus ábrázolás (hagyományosan vagy grafikus szerkesztővel)

A feladat megoldásához tetszőleges eszközök (pl. Excel) használhatók. A feladatot – táblázatonként a felhasznált képletek és tájékoztató szöveges információkkal együtt – különálló borítólapba foglalva - kézzel írott, vagy Microsoft Word formátumban kell leadni.

3.2 A feladatban szereplő fogalmak, képletek

3.2.1 A feladat megoldásához szükséges adatok

Paraméterek	IUGG/1967 ellipszoid
a	6378160 m
b	6356774,516 m
e	0,0818205679407
φ_K	$47^{\circ}08'39,8174''$
λ_K	$19^{\circ}02'54,8584''$
λ_K^g	$0^{\circ}00'00,0000''$
φ_K^g	$47^{\circ}06'00,0000''$
k	1,0031100083
n	1,000719704936
R	6379743,001 m
m_0	0,99993

A táblázat jelölései:

a – az ellipszoid fél nagytengelye

b – az ellipszoid fél kistengelye

e – első, a fél nagytengelyre vonatkozó numerikus excentricitás

φ_K – az EOV kezdőpontjának ellipszoidi földrajzi szélessége

λ_K – az EOV kezdőpontjának ellipszoidi földrajzi hosszúsága

φ_K^g – az EOV kezdőpontjának gömbi földrajzi szélessége

k, n, R – a Gauss-féle gömbi vetület állandói

m_0 – a vetületi méretarány tényező (a redukálás mértéke)

3.2.2 Gauss-gömbi vetületi koordináták

A Gauss-gömbi földrajzi hosszúság:

$$\lambda^g = n \cdot (\lambda - \lambda_K).$$

A Gauss-gömbi földrajzi szélességet a

$$\tan\left(\frac{\varphi^g}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = k \cdot \tan^n\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(\frac{1 - e \cdot \sin \varphi}{1 + e \cdot \sin \varphi}\right)^{n \cdot \frac{e}{2}}$$

képletből kiindulva, az alábbi összefüggéssel számítjuk:

$$\varphi^g = 2 \cdot \left[\arctan \left\{ k \cdot \tan^n \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \left(\frac{1 - e \cdot \sin \varphi}{1 + e \cdot \sin \varphi} \right)^{n \cdot \frac{e}{2}} \right\} - \frac{\pi}{4} \right].$$

A fenti képletekben (φ, λ) és (φ^g, λ^g) az alapfelület (ellipszoid) pontjának és ennek a képfelületen (gömb) megfelelő pontnak a földrajzi koordinátái.

A segédföldrajzi koordináták:

$$\begin{aligned} \sin \varphi^{g'} &= \sin \varphi^g \cdot \cos \varphi_K^g - \cos \varphi^g \cdot \cos \lambda^g \cdot \sin \varphi_K^g, \\ \sin \lambda^{g'} &= \frac{\cos \varphi^g \cdot \sin \lambda^g}{\cos \varphi^{g'}}. \end{aligned}$$

3.2.3 Egységes Országos Vetületi koordináták

Az eredeti EOVS koordináták:

$$\begin{aligned} y &= m_0 \cdot R \cdot \lambda^{g'}, \\ x &= m_0 \cdot R \cdot \ln \tan \left(\frac{\varphi^{g'}}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned}$$

vagy

$$x = m_0 \cdot \frac{R}{2} \cdot \ln \frac{1 + \sin \varphi^{g'}}{1 - \sin \varphi^{g'}}.$$

Az eltolt EOVS koordináták:

$$Y = y + 650000 \text{ m}, > 400000 \text{ m}$$

$$X = x + 200000 \text{ m}, < 400000 \text{ m}$$

3.2.4 Lineármódulus és meridiánkonvergencia

A lineármódulus:

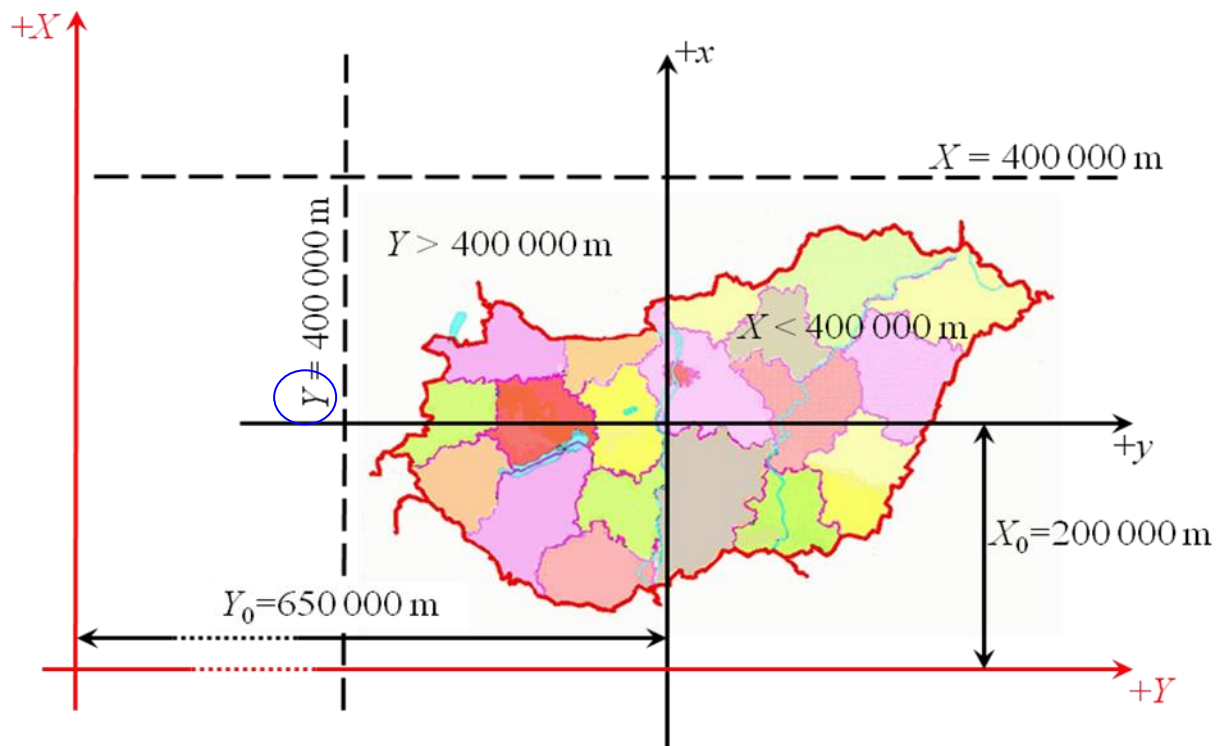
$$l = \frac{m_0}{\cos \varphi^{g'}}.$$

A meridiánkonvergencia:

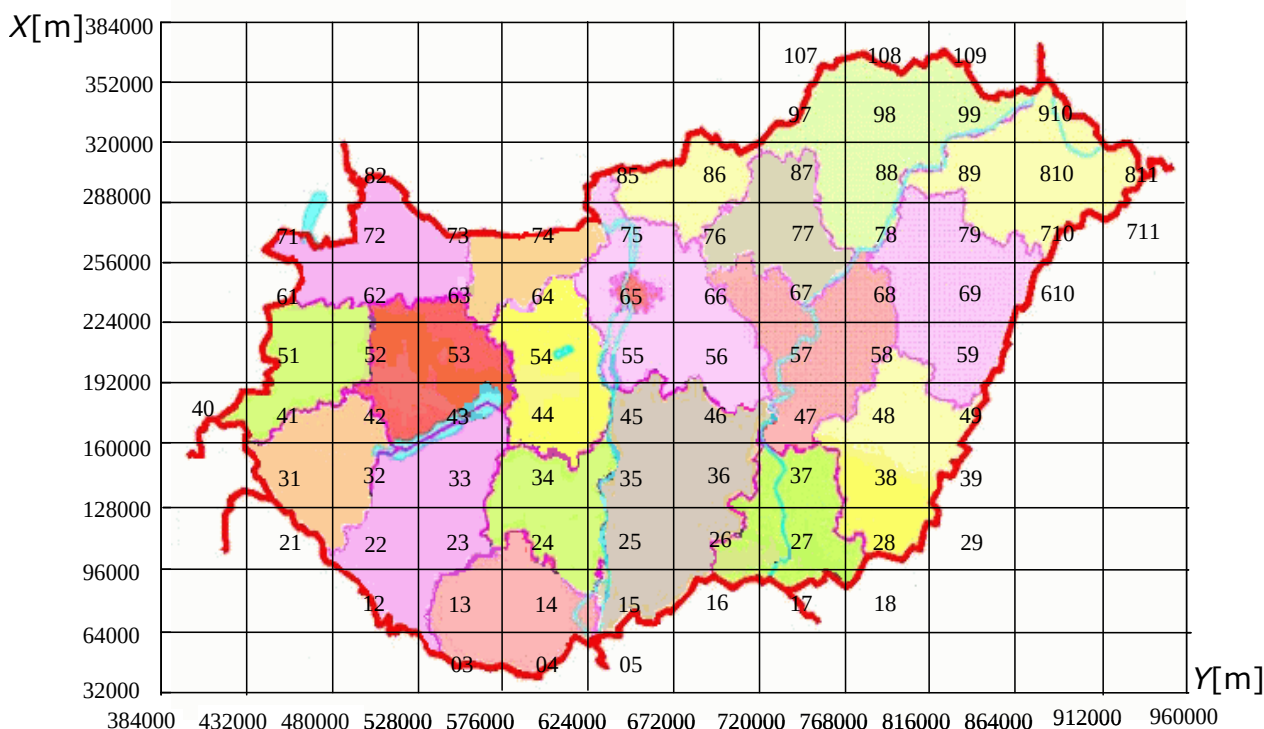
$$\tan \mu = \frac{\sin \varphi_K^g \cdot \sin \lambda^g}{\cos \varphi_K^g \cdot \cos \varphi^g + \sin \varphi_K^g \cdot \sin \varphi^g \cdot \cos \lambda^g}.$$

3.2.5 Egységes Országos Vetület szelvényezése

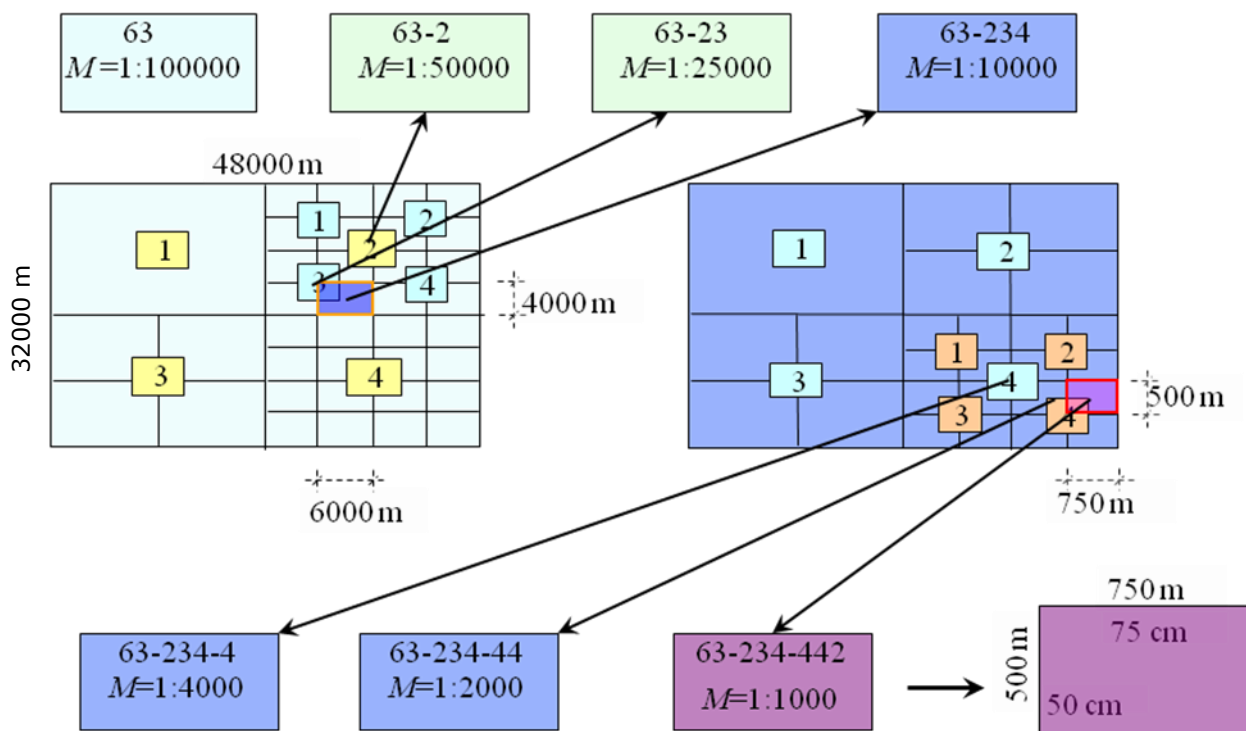
Az Egységes Országos Vetület eredeti (y, x) és eltolt (Y, X) koordinátarendszere



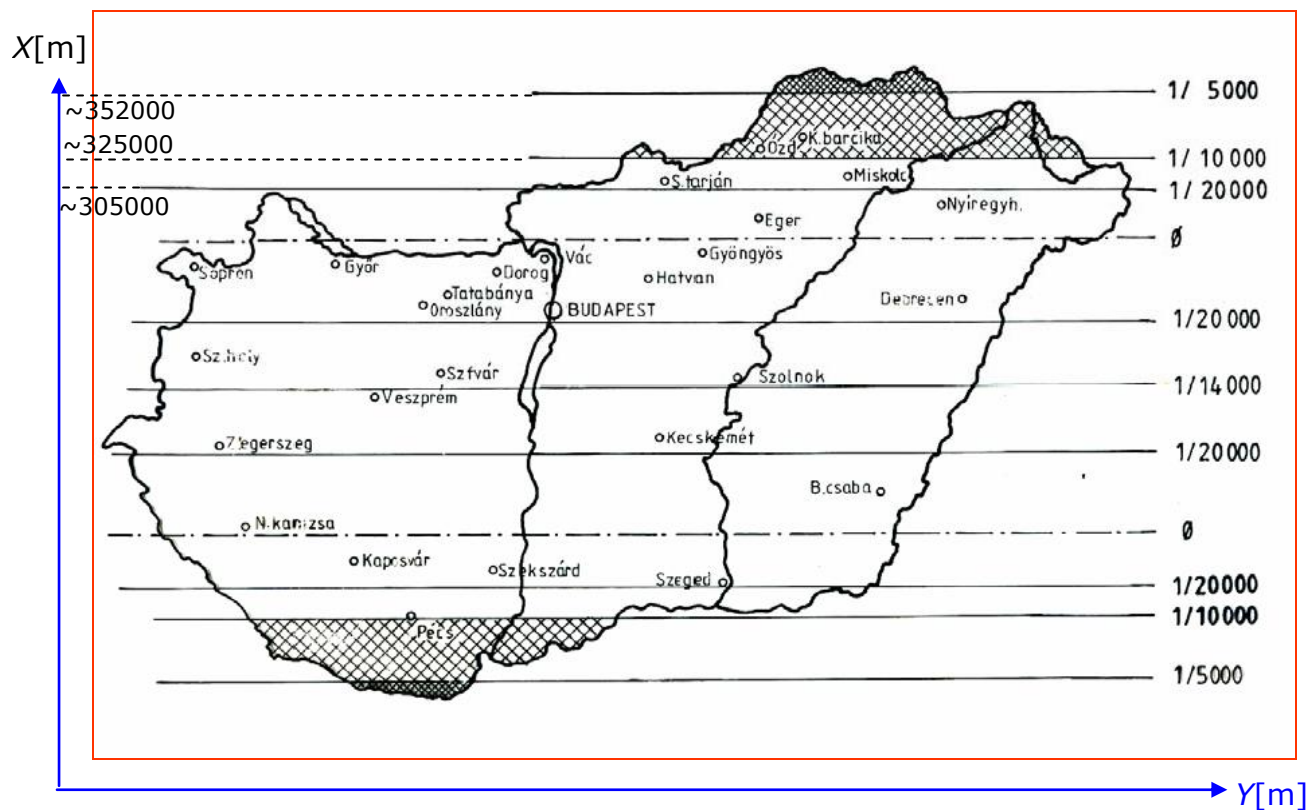
Az Egységes Országos Térképrendszer (EOTR) szelvényhálózata:
1:100 000 méretarányú szelvények



Az Egységes Országos Térképrendszer (EOTR) szelvénytára és számozása



Az EOVS hossztorzulásainak eloszlása



3.2.6 Számpélda

Kettős vetítés és EOVSzelvény szám keresése koordinátákból

Kiinduló adatok:

Az ellipszoid neve	Közlésének éve	$a(m)$	$b(m)$
IUGG/1967	1967	6378160	6356774,516

Paraméterek	IUGG/1967 ellipszoid
a	6378160 m
b	6356774,516 m
e	0,0818205679407
φ_K	$47^{\circ}08'39,8174''$
λ_K	$19^{\circ}02'54,8584''$
λ_K^g	$0^{\circ}00'00,0000''$
φ_K^g	$47^{\circ}06'00,0000''$
k	1,0031100083
n	1,000719704936
R	6379743,001 m
m_0	0,99993

A pont **IUGG/1967** ellipszoidi szélessége (φ): 47-15-49,70647
ellipszoidi hosszúsága (λ): 19-42-37,69262

Számítás:

1. az IUGG/1967 ellipszoidi földrajzi koordinátákkal rendelkező pont vetítése az új Gauss gömbre (az EOVS Gauss-gömbje):

Gauss-gömbi földrajzi hosszúság:

$$\lambda^g = n \cdot (\lambda - \lambda_K) \quad \lambda^g = 1,000719705 \cdot (19,71047017 - 19,04857178)$$

$$\lambda^g = 0-39-44,54916$$

Gauss-gömbi földrajzi szélesség:

$$\varphi^g = 2 \cdot \left[\arctan \left\{ k \cdot \tan^n \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \left(\frac{1 - e \cdot \sin \varphi}{1 + e \cdot \sin \varphi} \right)^{\frac{n-e}{2}} \right\} - \frac{\pi}{4} \right]$$

$$\varphi^g = 2 \cdot \left[\arctan \left\{ 1,003110008 \cdot \tan^{1,000719705} \left(\frac{47,26380735}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \left(\frac{1 - 0,081820568 \cdot \sin 47,26380735}{1 + 0,081820568 \cdot \sin 47,26380735} \right)^{\frac{1,000719705 - 0,081820568}{2}} \right\} - \frac{\pi}{4} \right]$$

$$\varphi^g = 47-13-09,22388$$

2. A Gauss-gömbi földrajzi koordinátákból a segédegénylítőhöz tartozó segédföldrajzi koordináták számítása:

Segéd Gauss-gömbi földrajzi szélesség:

$$\varphi^{g'} = \arcsin(\sin \varphi^g \cdot \cos \varphi_K^g - \cos \varphi^g \cdot \cos \lambda^g \cdot \sin \varphi_K^g)$$

$$\varphi^{g'} = \arcsin(\sin 47,21922886 \cdot \cos 47,1 - \cos 47,21922886 \cdot \cos 0,662374766 \cdot \sin 47,1)$$

$$\varphi^{g'} = 0-07-16,08163$$

Segéd Gauss-gömbi földrajzi hosszúság:

$$\lambda^{g'} = \arcsin \left(\frac{\cos \varphi^g \cdot \sin \lambda^g}{\cos \varphi^{g'}} \right)$$

$$\lambda^{g'} = \arcsin \left(\frac{\cos 47,21922886 \cdot \sin 0,662374766}{\cos 0,121133785} \right)$$

$$\lambda^{g'} = 0-26-59,5581$$

3. A vetített pont továbbvetítése a képfelületre, az EOv ferde tengelyű redukált hengervetületre:

Eredeti EOv koordináták, y:

$$y = m_0 \cdot R \cdot \lambda^{g'}$$

$$y = 0,99993 \cdot 6379743,001 \cdot 0,449877250 \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$y = 50089,2100 \text{ m}$$

Eredeti EOv koordináták, x:

$$x = m_0 \cdot R \cdot \ln \tan \left(\frac{\varphi^{g'}}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$x = 0,99993 \cdot 6379743,001 \cdot \ln \tan \left(\frac{0,121133785}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$x = 13487,0125 \text{ m}$$

4. Az eredeti EOv koordináták eltolása y irányában 650 km-rel és x irányában 200 km-rel:

Eltolt EOv koordináták, Y:

$$Y = y + 650000$$

$$Y = 50089,2100 + 650000$$

$$Y = 700089,2100 \text{ m}$$

Eltolt EOv koordináták, X:

$$X = x + 200000$$

$$X = 13487,0125 + 200000$$

$$X = 213487,0125 \text{ m}$$

5. A pontbeli torzulási jellemzők számítása:

Lineármódulus:

$$l = \frac{m_0}{\cos \varphi^{g'}}$$

$$l = \frac{0,99993}{\cos 0,121133785}$$

$$l = 0,999932235$$

Meridiánkonvergenca:

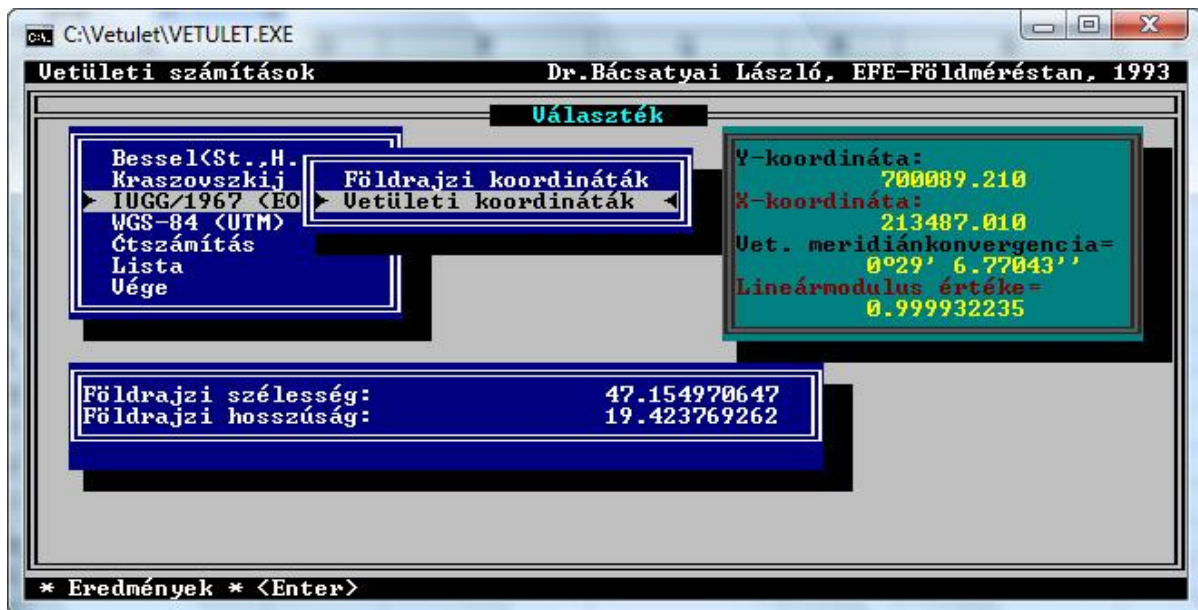
$$\mu = \arctan \left(\frac{\sin \varphi_K^g \cdot \sin \lambda^g}{\cos \varphi_K^g \cdot \cos \varphi^g + \sin \varphi_K^g \cdot \sin \varphi^g \cdot \cos \lambda^g} \right)$$

$$\mu = \arctan \left(\frac{\sin 47,1 \cdot \sin 0,662374766}{\cos 47,1 \cdot \cos 47,21922886 + \sin 47,1 \cdot \sin 47,21922886 \cdot \cos 0,662374766} \right)$$

$$\mu = 0-29-06,77043$$

6. A számítás ellenőrzése:

Ellenőrzésre a Vetület (Bácsatyai, 1993) programot használjuk:



Eredmények összefoglalása:

$$\lambda^g = 0-39-44,54916$$

$$\varphi^g = 47-13-9,22388$$

$$\lambda^{g'} = 0-26-59,5581$$

$$\varphi^{g'} = 0-07-16,08163$$

$$y = 50089,2100 \text{ m}$$

$$x = 13487,0125 \text{ m}$$

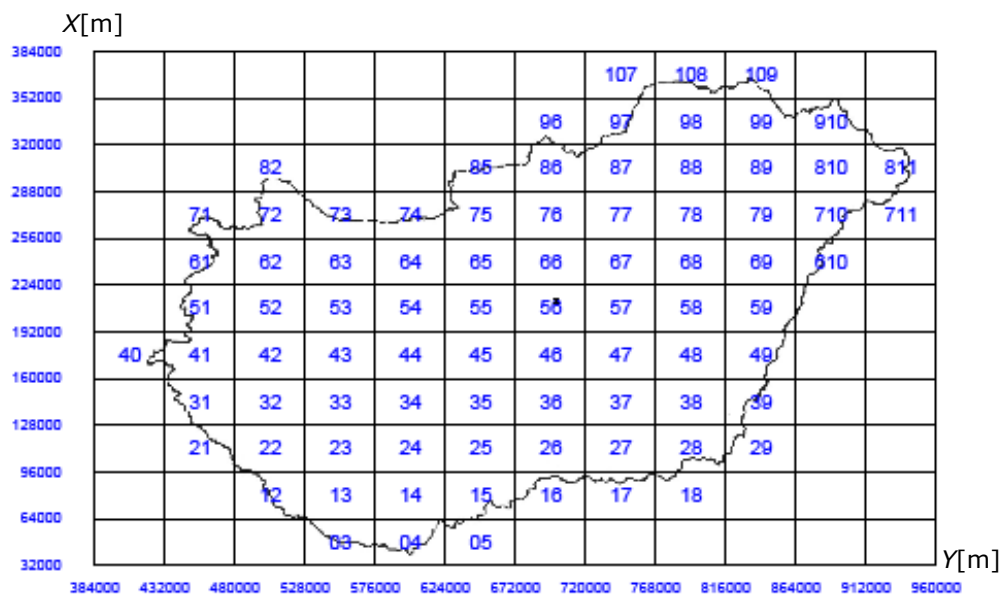
$$Y = 700089,2100 \text{ m}$$

$$X = 213487,0125 \text{ m}$$

$$l = 0,999932235$$

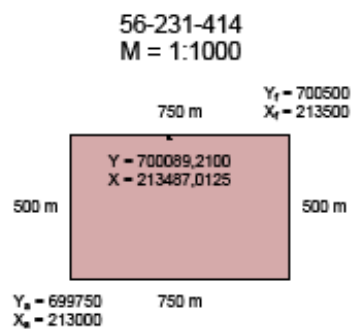
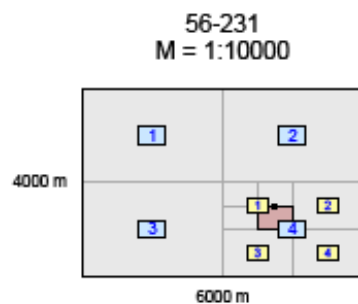
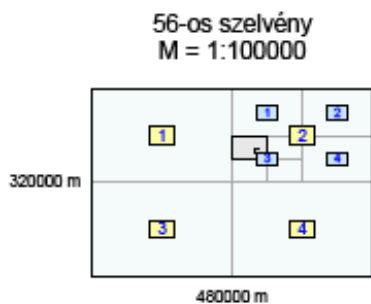
$$\mu = 0-29-06,77043$$

EOV Szelvényszám keresése koordinátákból



Az EOTR 1:100000 méretarányú szelvényei

Y = 700089,2100 m
X = 213487,0125 m



Irodalomjegyzék

Bácsatyai László: Vetülettan, elektronikus jegyzet pdf formátumban, NYME Geoinformatikai Kar, Székesfehérvár

http://www.geo.info.hu/geodezia/index.php?option=com_content&task=view&id=26&Itemid=41

Bácsatyai László: Magyarországi vetületek, tankönyv, Szaktudás Kiadó Ház, Budapest, 2006.

Bácsatyai László: Magyarországi vetületek, elektronikus tankönyv

http://www.geo.info.hu/geodezia/index.php?option=com_content&task=view&id=26&Itemid=41

Hazay István: Földi vetületek. Akadémia Kiadó, Budapest, 1954.

Németh Gyula: Vetülettan, EFE Geoinformatikai Kar, Székesfehérvár, 2003.

Varga József: Alaphálózatok I. (Vetülettan). Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.

Nyugat-magyarországi Egyetem Geoinformatikai Kar

Dr. Bácsatyai László

MATEMATIKAI GEODÉZIAI SZÁMÍTÁSOK

MGS-4

4 Vetületi átszámítások

SZÉKESFEHÉRVÁR

2011

**Jelen szellemi terméket a szerzői jogról szóló 1999. évi LXXVI. törvény védi.
Egészének vagy részeinek másolása, felhasználás kizárólag a szerző írásos engedélyével lehetséges.**

Ez a modul a
TÁMOP - 4.1.2-08/1/A-2009-0027 „Tananyagfejlesztéssel a GEO-ért” projekt
keretében készült.

A projektet az EU és a Magyar Állam 44 706 488 Ft összegben támogatta.

**Lektor:
Dr. Benedek Judit**

**Projektvezető:
Dr. h.c. Dr. Szepes András**

**Projekt szakmai vezetője:
Dr. Mélykúti Gábor dékán**

Copyright © Nyugat-magyarországi Egyetem 2011

Tartalom

4	Vetületi átszámítások	1
4.1	A feladat megfogalmazása.....	5
4.2	Az átszámítások sémái, képletei.....	6
4.2.1	Átszámítási séma az EOV és a történelmi Magyarország vetületei között	6
4.2.2	Átszámítási séma az EOV és az UTM vetületek között.....	7
4.2.3	Átszámítások ellipszoidi felületi és ellipszoidi térbeli koordináták között (ábra és képletek).....	8
4.2.4	A 7 paraméteres transzformáció (ábra és képletek)	10
4.2.5	Lineármodulus és meridiánkonvergencia.....	12
4.2.6	Számpélda.....	15

4.1 A feladat megfogalmazása

Számítsa át a megadott helységet magában foglaló 1:100000 méretarányú EOVSzelvény sarokpontjainak koordinátáit

- Sztereografikus,
- HKR,
- UTM vetületbe!

Az UTM vetületnél a 15° , 18° és 21° kezdő-meridiánú sávok közül a helységhez legközelebb eső sávot válassza! Dokumentálja az eredményeket grafikusan is. A sztereografikus és a HKR vetületekbe való átszámításhoz a HungaPro 3.18., az UTM vetületbe való átszámításhoz a HungaPro 3.31. verzióját használja!

A VETULET (Bácsatyai, 1993) programmal mindhárom vetületben számítsa ki a sarokpontokban a lineármódulust és a vetületi meridiánkonvergenciát! Hasonlítsa össze a kapott értékeket!

A megadott 24 OGPSH pontból a helységhez legközelebb eső 5 OGPSH pont alapján határozza meg az EOVS (IUGG/1967) és a WGS84 rendszer közötti 7 paraméteres transzformáció paramétereit! A meghatározott paraméterekkel számítsa ki 3, a helység környezetében lévő EOVS-koordinátákkal rendelkező pont WGS84 ellipszoidi felületi koordinátáit! A számításhoz használja a HungaPro 4.18. verzióját!

Leadandók különálló borítólapba foglalva:

- A használt programok és az átszámítás szöveges és grafikus dokumentációja
- A VETULET program eredményeinek (lineármódulusok és a vetületi meridiánkonvergenciák számítási képletei, eredmények) dokumentálása, az eredmények szöveges értékelése, összehasonlítása
- A 7 paraméteres transzformáció programjának és eredményeinek dokumentációja.

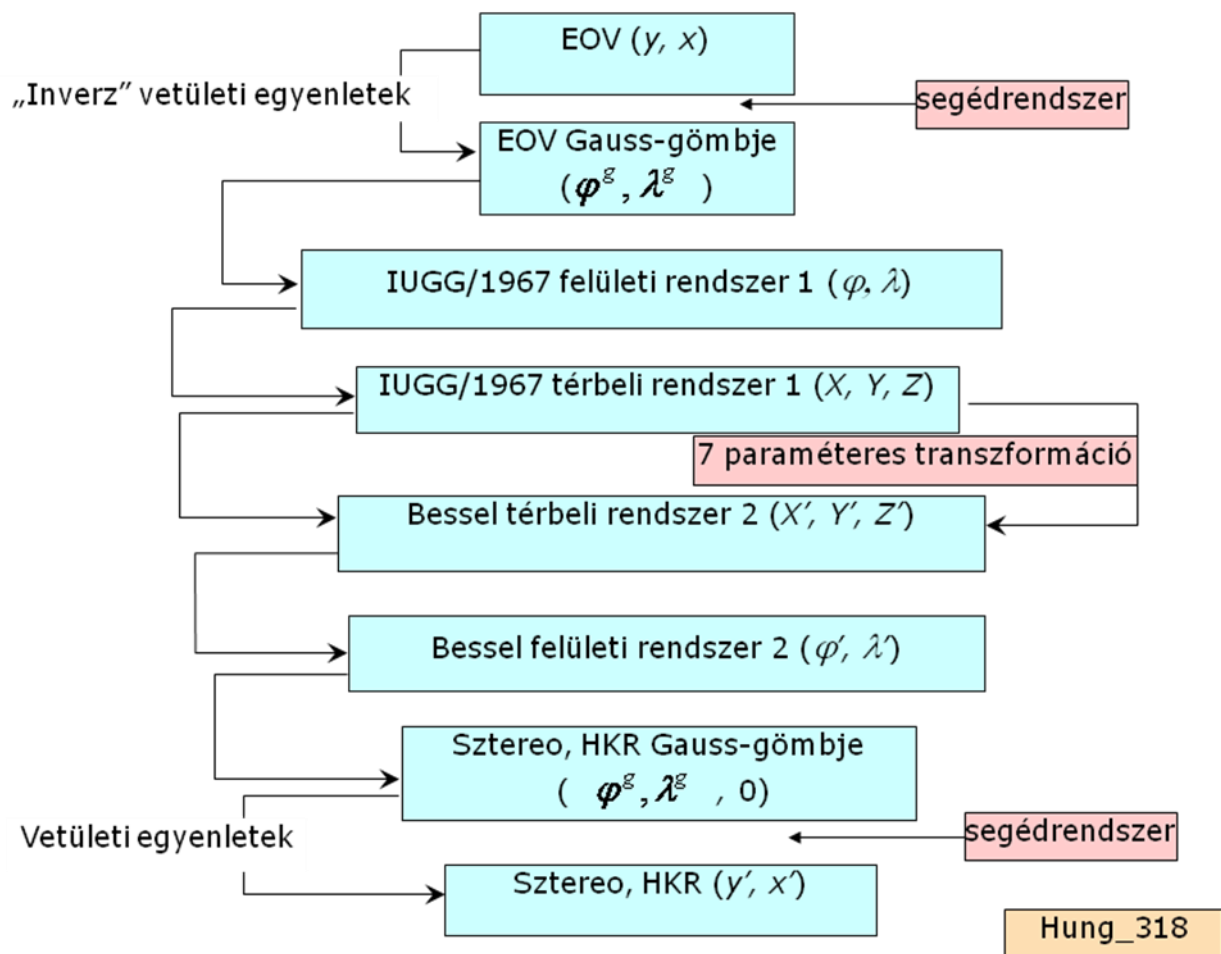
A feladatot kézirásos formában vagy Microsoft Word formátumban kell leadni.

4.2 Az átszámítások sémái, képletei

A feladatok megoldása előtt szükséges a Vetülettan jegyzet „Átszámítások vetületi rendszerek között” fejezetének

(<http://www.geo.info.hu/geodezia/dokumentumok/geod-vettan/vetulettan.pdf>, 69-72. old.), valamint a Hung_318, Hung_331 és a Hung_418 szoftverek szöveges leírásának tanulmányozása.

4.2.1 Átszámítási séma az EOVS és a történelmi Magyarország vetületei között



Jelölések:

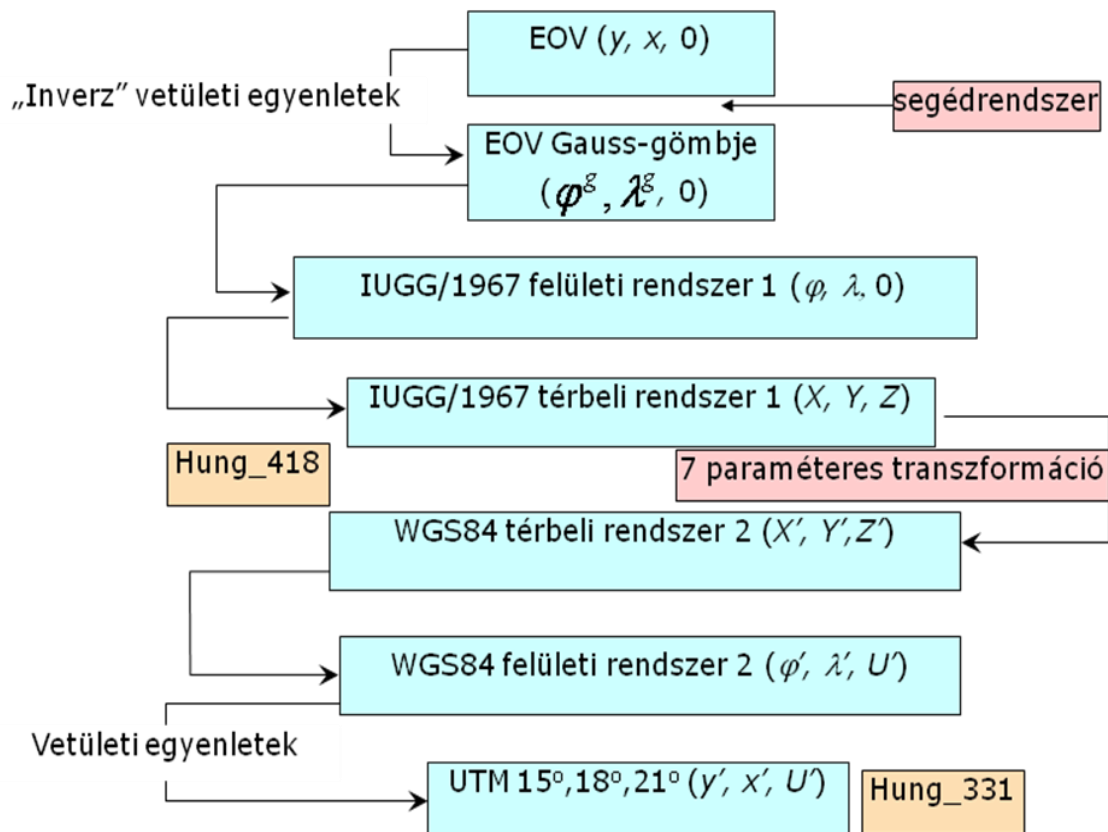
$\varphi, \lambda, \varphi', \lambda'$ - ellipszoidi felületi koordináták az IUGG/1967, ill. a Bessel ellipszoidon,

φ^g, λ^g - gömbi földrajzi szélesség és hosszúság,

X, Y, Z, X', Y', Z' - ellipszoidi térbeli koordináták az IUGG/1967, ill. a Bessel ellipszoidon,

y, x, y', x' - vetületi koordináták az EOVS, ill. a sztereografikus és HKR rendszerben.

4.2.2 Átszámítási séma az EOVS és az UTM vetületek között



Jelölések:

$\varphi, \lambda, \varphi', \lambda'$ - ellipszoidi felületi koordináták az IUGG/1967, ill. a WGS84 ellipszoidon,

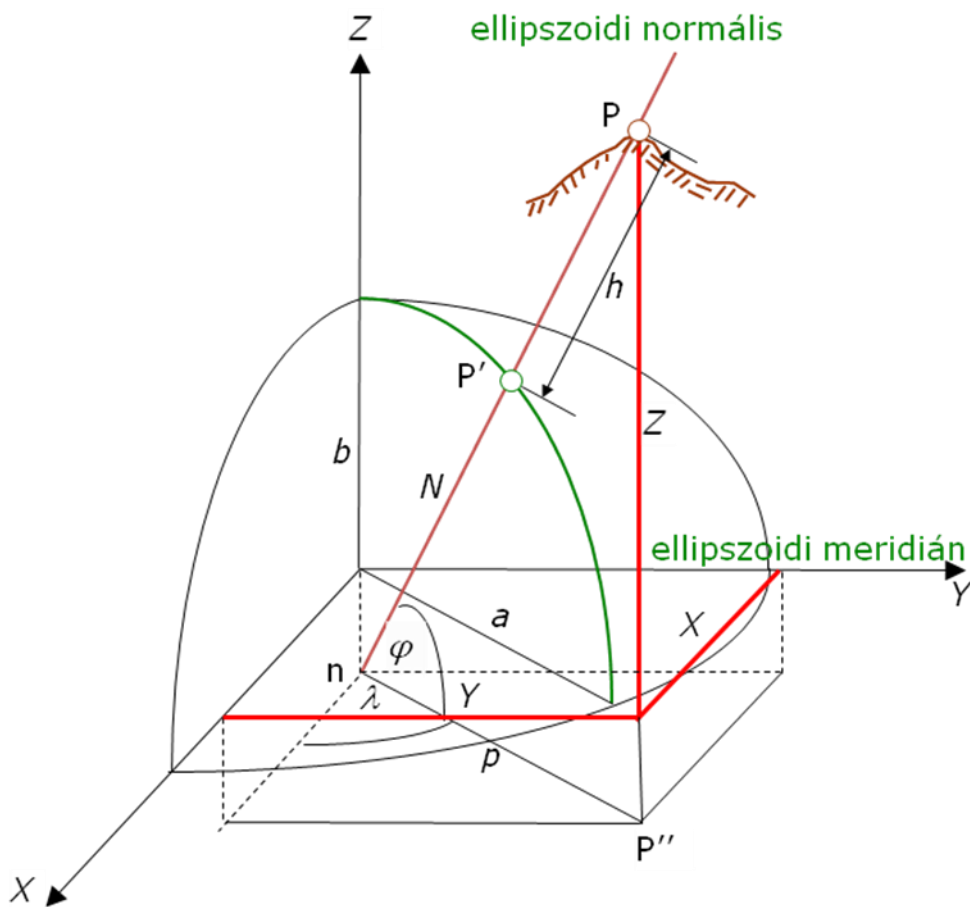
φ^g, λ^g - gömbi földrajzi szélesség és hosszúság,

X, Y, Z, X', Y', Z' - ellipszoidi térbeli koordináták az IUGG/1967, ill. a WGS84 ellipszoidon,

y, x, y', x' - vetületi koordináták az EOVS, ill. az UTM vetületi rendszerben.

U' - geoidunduláció

4.2.3 Átszámítások ellipszoidi felületi és ellipszoidi térbeli koordináták között (ábra és képletek)



Ellipszoidi felületi rendszerből ellipszoidi térbeli rendszerbe:

$$\begin{aligned} X &= (N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda, \\ Y &= (N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda, \\ Z &= \left(\frac{b^2}{a^2} \cdot N + h \right) \cdot \sin \varphi. \end{aligned}$$

Ellipszoidi térbeli rendszerből ellipszoidi felületi rendszerbe:

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan \frac{Z + e'^2 \cdot b \cdot \sin^3 \vartheta}{p - e^2 \cdot a \cdot \cos^3 \vartheta} \\ \lambda &= \arctan \frac{Y}{X} \\ h &= \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \varphi} - N \end{aligned}$$

Jelölések:

φ, λ - ellipszoidi felületi koordináták,

h - ellipszoidi magasság, esetünkben $h = 0$,

a - az ellipszoid fél nagytengelye,

b - az ellipszoid fél kistengelye,

$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}$ - harántgörbületi sugár,

$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ - első numerikus excentricitás négyzete,

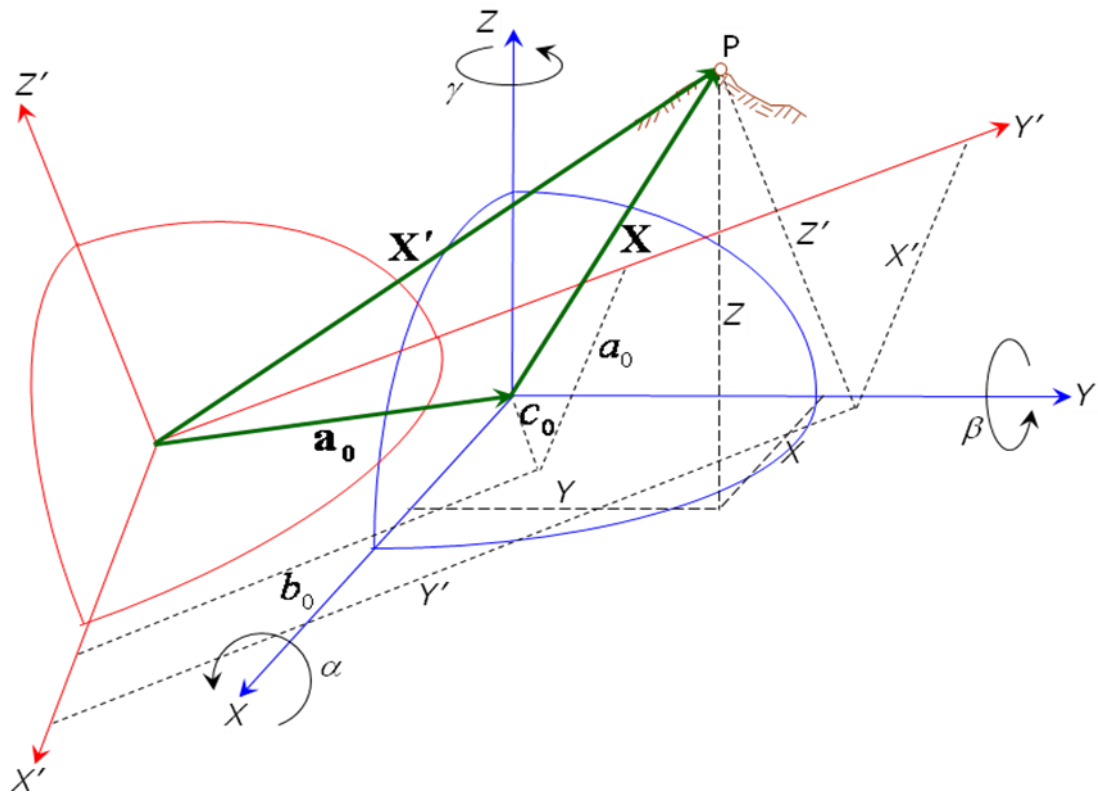
X, Y, Z - ellipszoidi térbeli koordináták,

$p = \sqrt{X^2 + Y^2}$ - segédmenyiség,

$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$ - második numerikus excentricitás négyzete,

$\mathcal{G} = \arctan \frac{Z \cdot a}{p \cdot b}$ - segédmenyiség.

4.2.4 A 7 paraméteres transzformáció (ábra és képletek)



A 7 paraméteres transzformáció képlete:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{a}_0 + (1 + \kappa) \mathbf{R} \cdot \mathbf{X} \quad (1)$$

Jelölések:

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} - \text{a pont térbeli koordinátái a transzformált és az eredeti koordináta-rendszerben}$$

$$\mathbf{a}_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} - \text{az eltolásvektor három paramétere,}$$

$1 + \kappa = \nu$ - a méretaránytényező (κ - méretaránykülönbség),

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} - \text{forgatási mátrix}^1.$$

A forgatási mátrix elemei:

$$R_{12} = \cos \beta \cdot \sin \gamma$$

$$R_{13} = -\sin \beta$$

$$R_{21} = -\cos \alpha \cdot \sin \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma$$

$$R_{22} = \cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

$$R_{23} = \sin \alpha \cdot \cos \beta$$

$$R_{31} = \sin \alpha \cdot \sin \gamma + \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma$$

$$R_{32} = -\sin \alpha \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

$$R_{33} = \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

α, β, γ – a forgatási szögek.

A transzformáció végrehajtása során kihasználjuk, hogy az elforgatási szögek kicsik (általában néhány szögmásodperc nagyságrendűek) és méretaránytényező az 1-től csak csekély mértékben tér el, az (1) vektoregyenletet linearizáljuk.

Kis szögek esetén ($\cos \alpha \approx \cos \beta \approx \cos \gamma = 1$, $\sin \alpha \approx d\alpha$, $\sin \beta \approx d\beta$, $\sin \gamma \approx d\gamma$) a forgatási mátrix:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & d\gamma & -d\beta \\ -d\gamma & 1 & d\alpha \\ d\beta & -d\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

A 7 paraméter meghatározásához legalább 7 egyenletre van szükség, melyet biztosít 2 közös pont és 1 pont valamelyik koordinátájának ismerete a két rendszerben. Általában célszerű legalább 3 közös pontot ismerni, ami összesen 9 egyenletet jelent. A két (vagy több pont esetén több) fölös adat a gyakorlatban azt jelenti, hogy a paramétereket kiegyenlítéssel kell meghatározni.

A kiegyenlítés eredményeként megbecsülhetjük a transzformáció pontosságát is. Ez döntően a közös pontok területi kiterjedésétől függ. Kis kiterjedésű területen

¹ A forgatás sorrendje a Z, Y és X körüli forgatás, akkor $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1(\alpha) * \mathbf{R}_2(\beta) * \mathbf{R}_3(\delta)$, ahol $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$ rendre az X, Y, Z tengelyek körüli forgatáshoz tartozó mátrixok.

végzett ún. lokális transzformáció – a pontok számától gyakorlatilag függetlenül – mindig pontosabb, mint a nagyobb, pl. országos viszonylatban végzett transzformáció.

A közös pontok alapján a Hung_418 szoftverrel végzett kiegyenlítésből megkapjuk a 7 paramétert:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & \kappa & d\alpha & d\beta & d\gamma \end{pmatrix}^T$$

A képletben a ^{T} betű transzponált mátrixot jelöl.

4.2.5 Lineármodulus és meridiánkonvergencia

Mind a lineármodulus, mind a vetületi meridiánkonvergencia meghatározható a földrajzi és a vetületi koordináták alapján is. Az összefüggések vetületenként változnak.

Lineármodulus:

Sztereografikus vetület (vetületi koordinátákból):

$$l = 1 + \frac{x^2 + y^2}{4 \cdot R^2},$$

x és y a sztereografikus vetületi koordináták, R a Gauss-gömb sugara:

$$R = 6378512,966 \text{ m}$$

Hengervetület Középső Rendszer – HKR (Gauss-gömbi földrajzi szélességből a segédrendszerben):

$$l = \frac{1}{\cos \varphi^g},$$

φ^g – a segédföldrajzi szélesség.

Egységes Országos Vetület (Gauss-gömbi földrajzi szélességből a segédrendszerben):

$$l = \frac{m_0}{\cos \varphi^g},$$

φ^g – a segédföldrajzi szélesség, $m_0=0,99993$ a redukálás mértéke.

UTM Vetület (vetületi koordinátákból):

$$l = m_0 \left(1 + \frac{y^2}{2 \cdot R_{01}^2} \right)$$

R_{01} - a közép-meridián mentén értelmezett átlagos földgömbületi sugár a redukált ellipszoidon, $m_0=0,9996$ a redukálás mértéke.

Vetületi meridiánkonvergencia:

Sztereografikus vetület (vetületi koordinátákból):

$$\sin \mu = y \cdot \frac{4 \cdot R \cdot \sin \varphi_K - 2 \cdot x \cdot \cos \varphi_K}{\sqrt{4 \cdot R^2 \cdot \cos^2 \varphi_K - d^2 \cdot \cos^2 \varphi_K + 4 \cdot R \cdot x \cdot \sin \varphi_K} + 16 \cdot R^2 \cdot y^2}$$

y, x - vetületi koordináták, $\varphi_K = 47^\circ 26' 21,1372''$ - a budapesti sztereografikus vetület kezdőpontjának Gauss-gömbi földrajzi szélessége, $R = 6378512,966$ m - a Gauss-gömb sugara.

Hengervetület Középső Rendszer - HKR (Gauss-gömbi földrajzi koordinátákból):

$$\tan \mu = \frac{\sin \varphi_K \cdot \sin \lambda}{\cos \varphi_K \cdot \cos \varphi + \sin \varphi_K \cdot \sin \varphi \cdot \cos \lambda}$$

$\varphi_K = 47^\circ 06' 00''$ - a HKR kezdőpontjának Gauss-gömbi földrajzi szélessége,

φ és λ - Gauss-gömbi földrajzi koordináták.

Egységes Országos Vetület (a Gauss-gömbi földrajzi koordinátákból történő számítás képlete megegyezik a hengervetületre vonatkozó képlettel):

$$\tan \mu = \frac{\sin \varphi_K \cdot \sin \lambda}{\cos \varphi_K \cdot \cos \varphi + \sin \varphi_K \cdot \sin \varphi \cdot \cos \lambda}$$

$\varphi_K = 47^\circ 06' 00,0000''$ - az EOVS kezdőpontjának Gauss-gömbi koordinátái,

φ és λ - földrajzi koordináták az EOVS Gauss-gömbjén,

Az EOVS Gauss-gömbjének sugara: $R = 6379743,001$ m.

UTM Vetület (ellipszoidi földrajzi koordinátákból):

$$\mu = L \cdot \sin \varphi + \frac{L^3}{3} \cdot \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi \cdot (+3 \cdot \eta^2 + 2 \cdot \eta^4) + \frac{L^5}{15} \cdot \sin \varphi \cdot \cos^4 \varphi \cdot (-\tan^2 \varphi)$$

φ – ellipszoidi földrajzi szélesség,

$L = \lambda - \lambda_0$ - a közép-meridiántól számított, attól keletre pozitív, nyugatra negatív előjelű ellipszoidi földrajzi hosszúság,

$\eta^2 = e'^2 \cdot \cos^2 \varphi$, ahol e' - második numerikus excentricitás.

4.2.6 Számpélda

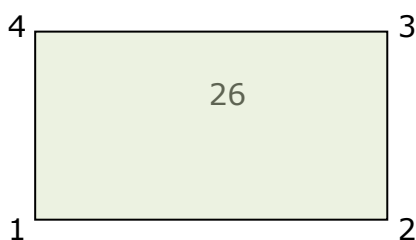
Vetületi számítások

1. Sarokpontok koordinátáinak számítása

Helység: Kiskunhalas

Az 1:100 000 méretarányú EOVSzelvény szám: 26

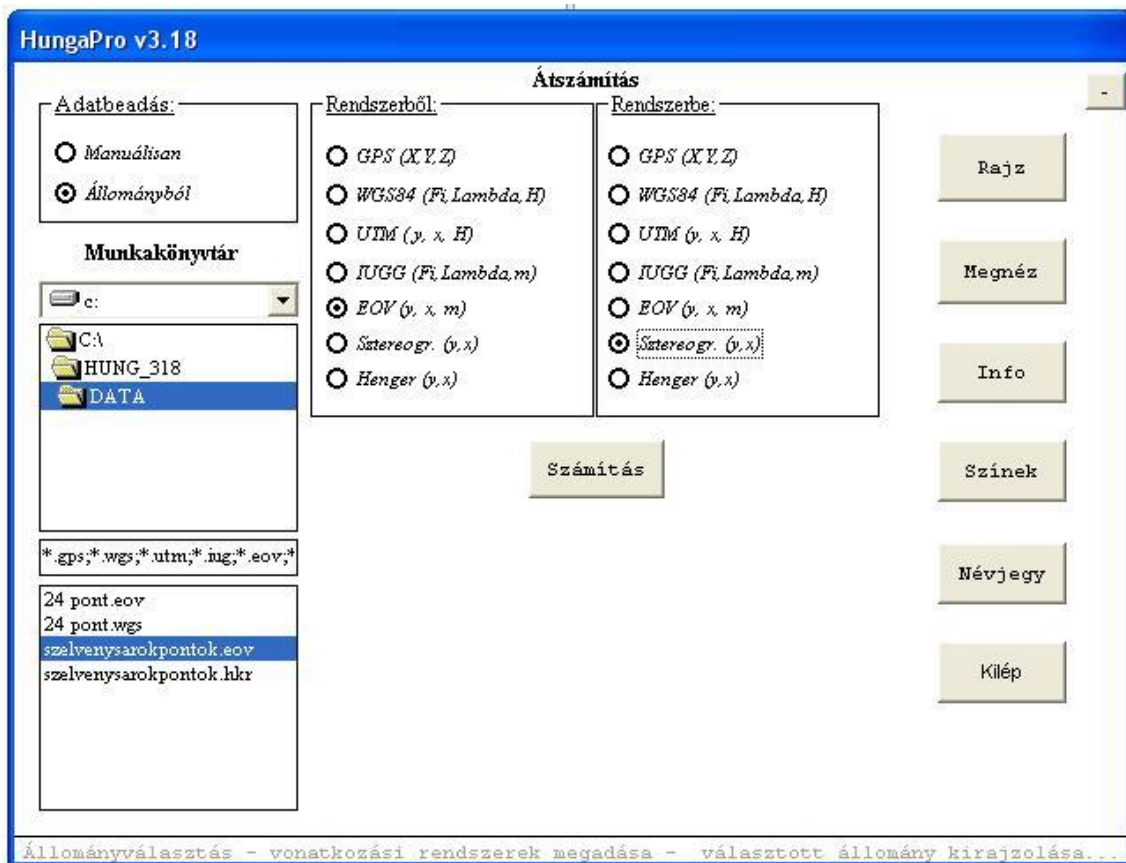
A szelvény sarokpontjainak számozása:



A szelvény sarokpontjainak EOVS koordinátái:

Sarokpont száma	Y (m)	X (m)
1	672000	96000
2	720000	96000
3	720000	128000
4	672000	128000

A sarokpontok sztereografikus, HKR és UTM vetületi koordinátáinak számítása a HungaPro v3.18 program segítségével történt:



A számítás eredményei:

S.p. száma	Sztereografikus vetület		HKR		UTM vetület		
	y (m)	x (m)	y (m)	x (m)	y (m)	x (m)	U (m)
1	-21995,44	142118,71	-22000,07	104354,27	102792,76	5118042,94	43,63
2	-69999,02	142122,34	-70003,44	104354,59	150775,85	5118671,28	43,15
3	-70001,60	110119,15	-70003,63	72352,41	150356,87	5150663,66	42,97
4	-21996,90	110116,11	-22000,09	72351,81	102370,61	5150030,53	43,48

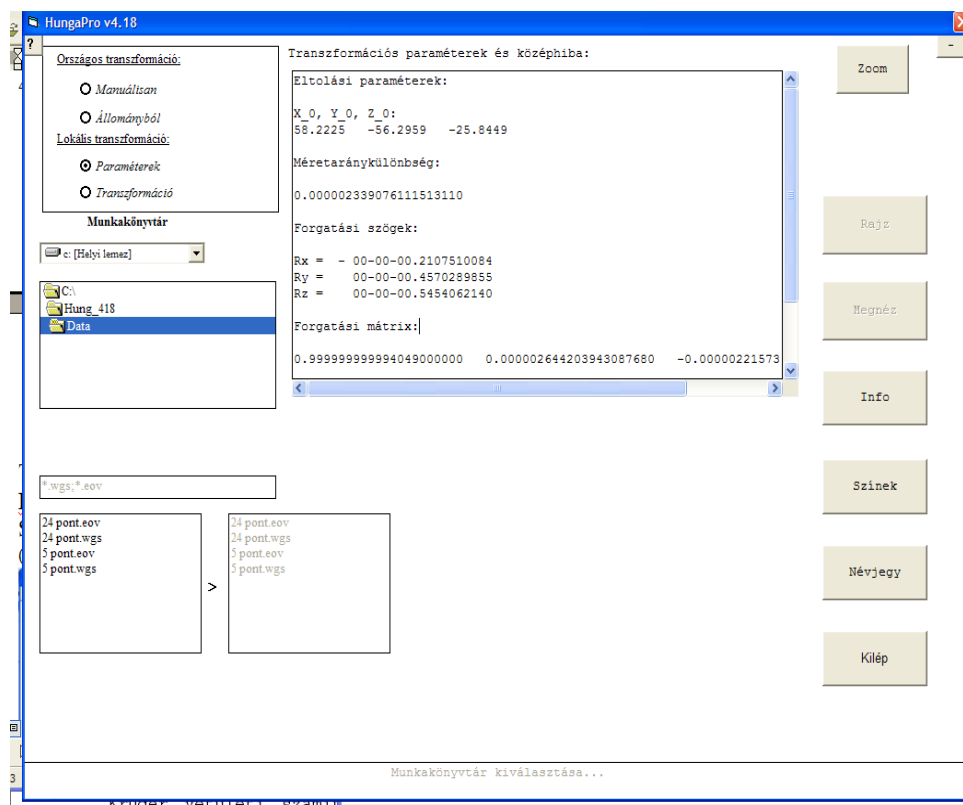
A táblázat utolsó oszlopa a – szintén a HungaPro v3.18 programmal számítható - WGS84 ellipszoidhoz viszonyított geoidundulációkat tartalmazza.

A sarokpontok koordinátái 'szelvénysarokpontok.eov', 'szelvénysarokpontok.szt', 'szelvénysarokpontok.hkr' és 'szelvénysarokpontok.utm' nevű fájlokban a számítási folyamat gyorsítása érdekében tárolásra is kerültek.

2. Transzformációs paraméterek számítása 5 közeli OGPSH pont alapján:

A megadott 24 pontból Kiskunhalashoz az alábbi pontok esnek legközelebb (a legközelebbi pontok kiválasztásához az ITR program került felhasználásra):

Pszt	EOV koordináták			WGS84 koordináták		
	Y (m)	X (m)	H (m)	Fi	Lambda	h (m)
2	691744,460	169203,850	123,827	46-51-56,81292	19-35-41,95482	166,909
4	775016,420	109637,020	99,910	46-19-10,43609	20-40-14,78947	142,722
17	696126,170	107849,365	127,207	46-18-48,83672	19-38-46,68390	170,795
19	691930,680	216542,440	227,727	47-17-29,75259	19-36-06,57499	270,719
20	596277,192	135678,234	165,196	46-33-47,97123	18-20-48,38479	209,832



A transzformációs paraméterek számítása a fentebb látható HungaPro v4.18 program segítségével történt. A program az EOVS koordinátákat és a H tengerszintfeletti magasságot az IUGG/1967 ellipszoid térbeli koordinátarendszerébe, a WGS84 F , L , h koordinátákat a WGS84 ellipszoid térbeli koordinátarendszerébe számítja át, majd e kettő között végzi el a 7 paraméteres transzformációt. A transzformáció eredményeit a program egy „5 eovwgs.PAR” nevű fájlban tárolta.

A transzformáció eredményei:

Eltolási paraméterek:

X_0, Y_0, Z_0 :

58,2225 -56,2959 -25,8449 [m]

Méretaránykülönbség:

0,000002339076111513110

Forgatási szögek:

$R_x = -00-00-00,2107510084$

$R_y = 00-00-00,4570289855$

$R_z = 00-00-00,5454062140$

Forgatási mátrix:

0,999999999994049000000	0,000002644203943087680	-0,000002215739048492390
-0,000002644206207023540	0,999999999995982000000	-0,000001021749721760920
0,000002215736346768850	0,000001021755580625790	0,999999999997023000000

Sigma a posteriori: 0,080 m.

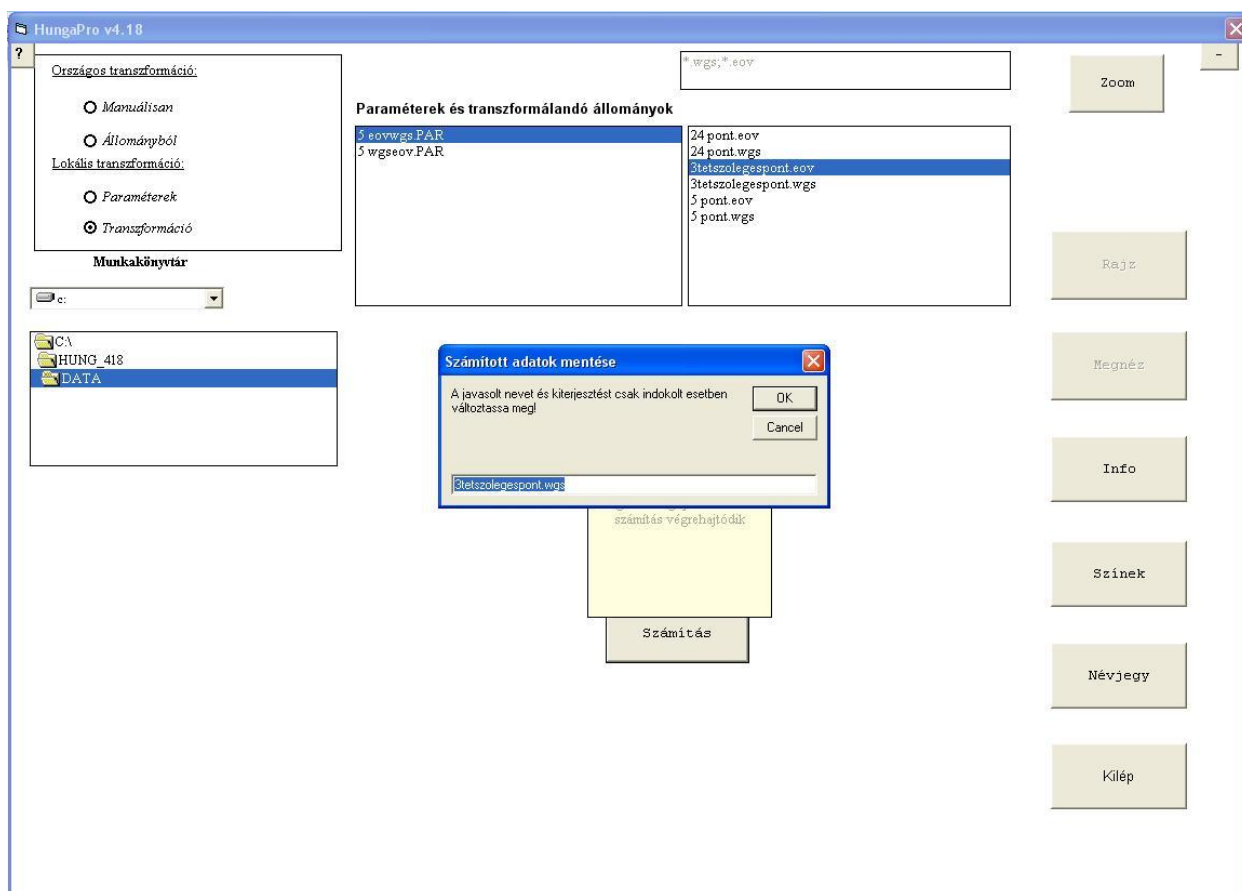
Az utolsó mérőszám az egyik rendszerből a másikba történő átszámítás várható megbízhatóságát mutatja. A forgatási mátrix főátlójában szigorúan véve 1 értékek állnak.

3. A 3 tetszőlegesen választott pont transzformációja:

A kapott transzformációs paraméterekkel az alábbi EOVS koordinátájú pontok WGS84 ellipszoidi felületi koordinátarendszerbe számítására került sor:

Pontszám	EOVS koordináták		
	Y (m)	X (m)	H (m)
1001	676283,37	115074,11	127
1002	690972,55	115618,16	135
1003	690428,51	127043,08	112

A számítás itt is HungaPro v4.18 program segítségével történt, az eredmények '3tetszolegespont.wgs' néven tárolásra is kerültek.



Transzformáció eredménye:

Pontszám	EOV koordináták		
	Y (m)	X (m)	H (m)
1001	676283,37	115074,11	127
1002	690972,55	115618,16	135
1003	690428,51	127043,08	112

Pontszám	WGS84 koordináták		
	Fi	Lambda	h (m)
1001	46-22-46,66342	19-23-20,76149	170,812
1002	46-23-01,62589	19-34-48,27065	178,642
1003	46-29-11,74043	19-34-26,40910	155,567

4. Az EOVS szelvény sarokpontjaiban számított lineármódulusok és meridiánkonvergenciák:

A lineármódulusokat és a meridiánkonvergenciákat az alábbi (Bácsatyai, 1993) DOS-os 'Vetület' nevű programmal számítjuk:



A számítási képletek vetületenként változóak, azok itt nem soroljuk fel.

Az eredmények a szelvény négy sarokpontjában az alábbi két összehasonlító táblázatban találhatók:

Pont száma	EOV		UTM	
	Meridián konvergencia	Lineármódulus	Meridián konvergencia	Lineármódulus
1	0-12-32,38571	1,000062883	0-57-43,13348	0,999729889
2	0-39-53,81661	1,000062883	1-24-39,65454	0,99987946
3	0-40-06,41643	0,999993689	1-25-16,67122	0,999877891
4	0-12-36,34642	0,999993689	0-58-03,72525	0,999728815

Pont száma	Sztereografikus		HKR	
	Meridián konvergencia	Lineármódulus	Meridián konvergencia	Lineármódulus
1	0-12-28,57066	1,000254164	0-12-27,92350	1,000248245
2	0-39-42,11553	1,000308447	0-39-39,73115	1,000248239
3	0-40-00,436	1,000209245	0-39-52,04528	1,00014902
4	0-12-34,35053	1,000154962	0-12-31,79268	1,000149024

A táblázatokból látszik, hogy az érintő vetületeknél a lineármódulusok értékei mindig nagyobbak 1-nél.

Irodalomjegyzék

Bácsatyai László: Vetülettan, elektronikus jegyzet pdf formátumban, NYME Geoinformatikai Kar, Székesfehérvár

http://www.geo.info.hu/geodezia/index.php?option=com_content&task=view&id=26&Itemid=41

Bácsatyai László: Magyarországi vetületek, tankönyv, Szaktudás Kiadó Ház, Budapest, 2006.

Bácsatyai László: Magyarországi vetületek, elektronikus tankönyv

http://www.geo.info.hu/geodezia/index.php?option=com_content&task=view&id=26&Itemid=41

Hazay István: Földi vetületek. Akadémia Kiadó, Budapest, 1954.

Németh Gyula: Vetülettan, EFE Geoinformatikai Kar, Székesfehérvár, 2003.

Varga József: Alaphálózatok I. (Vetülettan). Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.

Nyugat-magyarországi Egyetem Geoinformatikai Kar

Dr. Bácsatyai László

MATEMATIKAI GEODÉZIAI SZÁMÍTÁSOK

MGS-5

5 Hibaterjedési feladatok

SZÉKESFEHÉRVÁR

2011

**Jelen szellemi terméket a szerzői jogról szóló 1999. évi LXXVI. törvény védi.
Egészének vagy részeinek másolása, felhasználás kizárólag a szerző írásos engedélyével lehetséges.**

Ez a modul a
TÁMOP - 4.1.2-08/1/A-2009-0027 „Tananyagfejlesztéssel a GEO-ért” projekt
keretében készült.

A projektet az EU és a Magyar Állam 44 706 488 Ft összegben támogatta.

**Lektor:
Dr. Benedek Judit**

**Projektvezető:
Dr. h.c. Dr. Szepes András**

**Projekt szakmai vezetője:
Dr. Mélykúti Gábor dékán**

Copyright © Nyugat-magyarországi Egyetem 2011

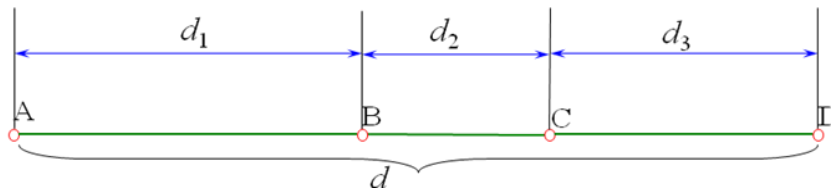
Tartalom

5 Hibaterjedési feladatok.....	1
5.1 A feladat megfogalmazása.....	5
5.2 A feladatban szereplő fogalmak.....	7
5.2.1 A hibaterjedés törvénye	7
5.2.2 A hibaterjedés törvénye mátrixos alakban	8
5.2.3 Számpéldák	11

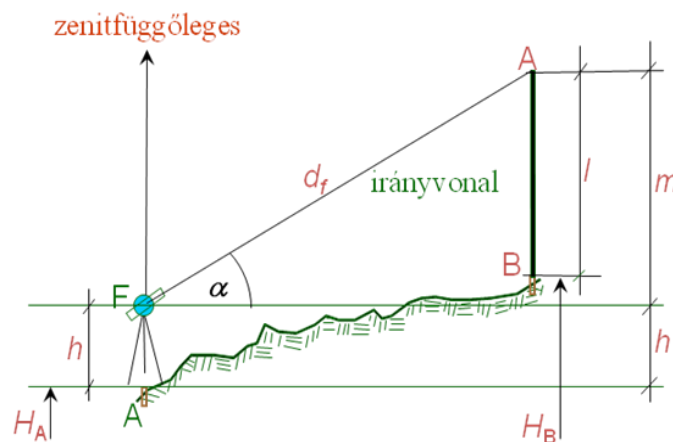
5.1 A feladat megfogalmazása

1. Egy távolságot 3 részben, 3 különböző mérőeszkővel, elektrooptikai távmérővel, optikai távmérővel és mérőszalaggal mérünk meg. Adottak az d_1 , d_2 , d_3 mérési eredmények és p_1 , p_2 , p_3 súlyaik, valamint a súlyegység középhibája μ_0 .

Meghatározandók: $d = ? \text{ m}$; $\mu_d = ? \text{ cm}$; $p_d = ? \text{ cm}^{-2}$

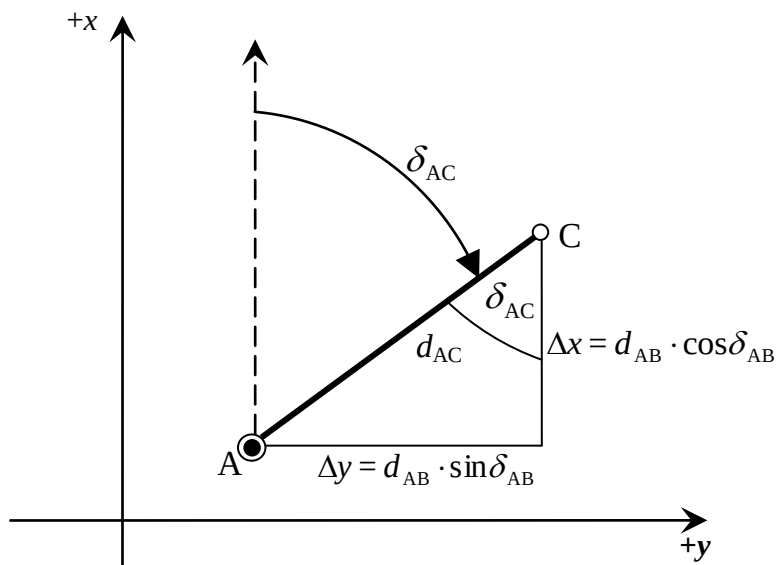


2. Trigonometriai magasságméréssel az A műszerálláspontból meghatározzuk a B pont abszolút magasságát (H_B). A meghatározás során mérjük a ferde távolságot (d_f), a magassági szöget (α), a műszermagasságot (h), a jelmagasságot (l) és ismerjük az A pont abszolút (tengerszint feletti) magasságát (H_A).



Felírandó a számítás megoldó-képlete, meghatározandó a B pont magassága (H_B), a meghatározott magasság középhibája μ_{H_B} és súlya p_{H_B} !

3. Az ábrán a Δy és a Δx közvetett mérési eredmények a d_{AC} távolság és a δ_{AC} irányszög nem lineáris függvényei. Adottak d_{AC} és δ_{AC} mérési eredmények, valamint $\mu_{d_{AC}}$ és $\mu_{\delta_{AC}}$ középhibáik.



Meghatározandók mátrixos formában a koordinátakülönbségek $\mu_{\Delta y}$ és $\mu_{\Delta x}$ középhibái!

Leadandók különálló borítólapba foglalva:

- A feladatkiírás és a kiinduló adatok (feladatlapba foglalva),
- Számítások listája a részeredményekkel együtt

A feladatot az EXCEL használata nélkül, manuálisan, zsebkalkulátorral kell megoldani, s a felhasznált képletekkel és tájékoztató szöveges információkkal együtt – különálló borítólapba foglalva - kézzel írott, vagy Microsoft Word formátumban kell leadni.

5.2 A feladatban szereplő fogalmak

5.2.1 A hibaterjedés törvénye¹

Ha egy mérési eredményt más, közvetlenül mért mennyiségek függvényében számítunk (közvetett mérés), úgy a közvetlen mérési eredmények alapján meghatározhatjuk ezek függvényének (a közvetett mérési eredménynek) eloszlását, ill. eloszlási paramétereit (a függvény középvértékét és középhibáját, a matematikai statisztika nyelvén várható értékét és szórását). A szórás ismeretében függvény súlya is számítható.

A közvetett mérési eredmény középhibájának és súlyának meghatározását a közvetlen mérési eredmények középhibáinak és súlyainak ismeretében a hibaterjedés törvényének nevezzük.

Általános formában legyen az $x, y, \dots, z$ mérési eredményekhez tartozó u közvetett mérési eredmény a következő:

$$u = f(x, y, \dots, z).$$

A mérési eredmények függetlenségének feltételezésével az u közvetett mérési eredmény (a függvényérték) középhibájának négyzete a

$$\mu_u^2 = a^2 \cdot \mu_x^2 + b^2 \cdot \mu_y^2 + \dots + c^2 \cdot \mu_z^2$$

alakban írható fel, ahol $\mu_x, \mu_y, \dots, \mu_z$ a közvetlen mérési eredmények középhibái, az $a, b, \dots, c$ együtthatók pedig az u függvény $x, y, \dots, z$ szerinti elsőrendű parciális deriváltjai

$$a = \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad b = \frac{\partial u}{\partial y} ; \quad \dots ; \quad c = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Ha függvény lineáris, azaz

$$u = a \cdot x + b \cdot y + \dots + c \cdot z$$

alakú, az elsőrendű parciális deriváltak rendre az $a, b, \dots, c$ együtthatók.

Az együtthatók $a = b = \dots = c$ és a középhibák $\mu_x = \mu_y = \dots = \mu_z = \mu$ egyenlősége, vagyis egyenlő súlyú mérési eredmények esetén

$$\mu_u^2 = n \cdot \mu^2 ,$$

vagy

$$\mu_u = \sqrt{n} \cdot \mu .$$

¹ A modulban előforduló – de itt nem definiált (mint pld. a súlyegység középhibája) - alapfogalmak a Geoinformatikai Kar honlapjáról letölthető „Kiegyenlítő számítások” jegyzetben megtalálhatók (ld. Irodalom).

A függvényérték középhiba-képletének mindkét oldalát osszuk el a súlyegység középhibájával, μ_0^2 - tel:

$$\frac{\mu_u^2}{\mu_0^2} = a^2 \cdot \frac{\mu_x^2}{\mu_0^2} + b^2 \cdot \frac{\mu_y^2}{\mu_0^2} + \dots + c^2 \cdot \frac{\mu_z^2}{\mu_0^2}.$$

A súly definíciója szerint a függvényérték súlya:

$$\frac{1}{p_u} = \frac{a^2}{p_x} + \frac{b^2}{p_y} + \dots + \frac{c^2}{p_z},$$

ahonnan, $a = b = \dots c = 1$ és egyenlő súlyú mérési eredmények esetén adódik:

$$\frac{1}{p_u} = n, \text{ vagy } p_u = \frac{1}{n}.$$

5.2.2 A hibaterjedés törvénye mátrixos alakban

Ha egyidejűleg nem egy, hanem több közvetett mérési eredményt számítunk a közvetlen mérési eredmények függvényében, úgy a függvényértékek középhibanégyzeteire (varianciáira) felírható egyenleteket célszerűbb összefoglalni mátrixos formában. A mátrixos felírás mód, természetesen, egyetlen függvény esetén is alkalmazható. A mátrixos felírás mód előnye még, hogy nem kell feltételeznünk a közvetlen mérési eredmények függetlenségét, mivel a függőséget jellemző kovarianciák a mátrixos összefüggésekben szerepeltethetők.

5.2.2.1 A hibaterjedés törvénye mátrixos alakban egy függvényre

Láttuk, hogy tetszőleges számú $x, y, \dots z$ mérési eredmény lineáris, vagy linearizált

$$u = a \cdot x + b \cdot y + \dots + c \cdot z$$

függvényére a hibaterjedés törvénye

$$\mu_u^2 = a^2 \cdot \mu_x^2 + b^2 \cdot \mu_y^2 + \dots + c^2 \cdot \mu_z^2$$

alakú, azzal a feltételezéssel, hogy a mérési eredmények korrelálatlanok. Az összefüggés mind lineáris, mind nem lineáris függvényekre igaz, azzal a különbséggel, hogy nem lineáris esetben az $a, b, \dots, c$ együtthatók a függvény argumentumai (a mérési eredmények) szerinti elsőrendű parciális deriváltak. Az előbbi képlettel megadott egyetlen függvény varianciája egyszerűbben írható fel a

$$\mu_u^2 = \mathbf{a}_{1,n}^T \cdot \mathbf{K}_{n,n} \cdot \mathbf{a}_{n,1}$$

ún. kvadratikus alakban. A kvadratikus alakban kijelölt vektor-mátrix szorzás eredménye skalár. A képletet kifejtve, írhatjuk:

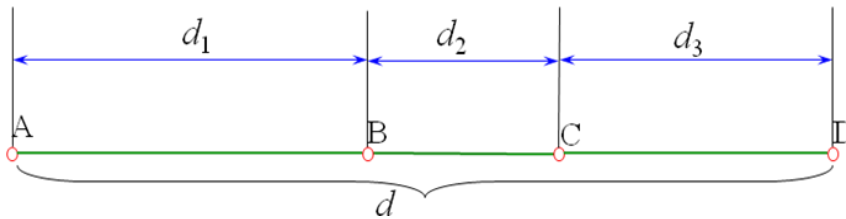
$$\mathbf{K}_{u,m} = \begin{pmatrix} \mu_{u_1}^2 & \text{COV}_{12} & \dots & \text{COV}_{1n} \\ \text{COV}_{21} & \mu_{u_2}^2 & \dots & \text{COV}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{COV}_{n1} & \text{COV}_{n2} & \dots & \mu_{u_m}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_{x,n,n} = \begin{pmatrix} \mu_x^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_z^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{m,n} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \dots & \zeta \\ a_2 & b_2 & \dots & \zeta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m & b_m & \dots & \zeta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{n,m}^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_m \end{pmatrix}.$$

A $\mathbf{K}_{u,m}$ diagonális négyzetes mátrix a főátlójában az u_i függvényértékek középhiba-négyzeteit, a főátlón kívül az u_i függvényértékek közötti kovarianciákat tartalmazza.

5.2.3 Számpéldák

1. feladat



A távolságmérés eredményei és súlyai:

Elektrooptikai távmérővel: $d_1 = 253,653 \text{ m}$; $p_1 = 49 \text{ cm}^{-2}$

Optikai távmérővel: $d_2 = 120,820 \text{ m}$; $p_2 = 1 \text{ cm}^{-2}$

Mérőszalaggal: $d_3 = 175,12 \text{ m}$; $p_3 = 2 \text{ cm}^{-2}$

A méréseket függetlennek tekintjük.

A súlyegység középhibája: $\mu_0 = 3,5$ (dimenzió nélküli)

Megoldás:

A távolság: $d = d_1 + d_2 + d_3 = 549,593 \text{ m}$

A mérési eredmények középhibái:

$$\mu_1 = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_1}} = \pm \frac{3,5}{7} = \pm 0,5 \text{ cm}; \quad \mu_2 = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_2}} = \pm \frac{3,5}{1} = \pm 3,5 \text{ cm}; \quad \mu_3 = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_3}} = \pm \frac{3,5}{\sqrt{2}} \approx \pm 2,5 \text{ cm}$$

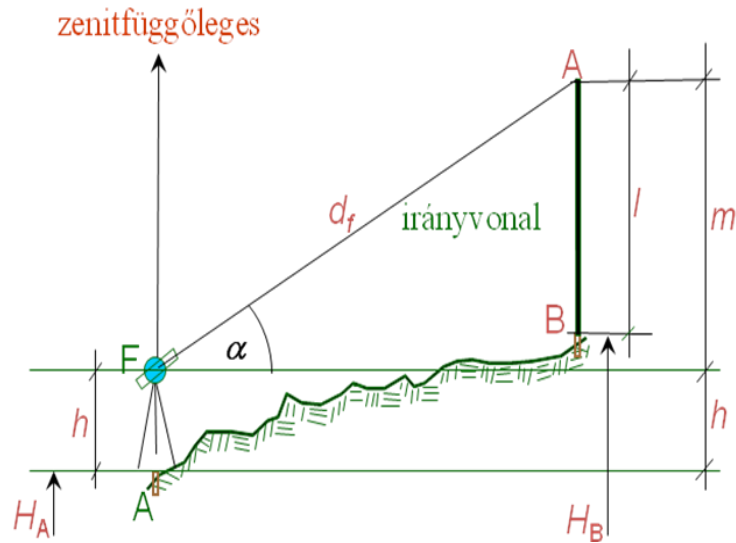
A távolság középhibája: $\mu_d = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2} = \sqrt{0,25 + 12,25 + 6,25} \approx \pm 4,3 \text{ cm}$

A távolság súlya: $p_d = \frac{\mu_0^2}{\mu_d^2} = \frac{3,5^2}{4,3^2} = 0,66 \text{ cm}^{-2}$

Végeredmény: $d = 549,593 \text{ m} \pm 4,3 \text{ cm}$

2. feladat

A feladat megoldásához ismerni kell az első derivált fogalmát!



Mérési eredmények és középhibáik:

$$H_A = 158,23 \text{ m}; \mu_{H_A} = \pm 2 \text{ cm}$$

$$h = 1,42 \text{ m}; \mu_h = \pm 1 \text{ cm}$$

$$l = 3,82 \text{ m}; \mu_l = \pm 1,5 \text{ cm}$$

$$d_f = 898,65 \text{ m}; \mu_{d_f} = \pm 0,8 \text{ cm}$$

$$\alpha = 3-43-56; \mu_\alpha = \pm 6''$$

A méréseket függetlennek tekintjük.

A B pont tengerszint feletti magassága: $H_B = H_A + d_f \cdot \sin \alpha + h - l$

A H_B középhibájának négyzete:

$$\mu_{H_B}^2 = 1 \cdot \mu_{H_A}^2 + (\sin \alpha)^2 \cdot \mu_{d_f}^2 + (d_f \cdot \cos \alpha)^2 \cdot \frac{\mu_\alpha^2}{\rho''^2} + 1 \cdot \mu_h^2 + 1 \cdot \mu_l^2$$

$$\begin{aligned} \mu_{H_B}^2 &= 1 \cdot 4 + 0,00424 \cdot 0,64 + 0,80415 \cdot 10^{10} \cdot \frac{36}{(2,06 \cdot 10^5)^2} + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2,25 = \\ &= 4 + 0,0027 + 6,8219 + 1 + 2,25 = 14,07 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Eredmények:

$$H_B = 214,3263 \text{ m}$$

$$\mu_{H_B} = \pm 3,75 \text{ cm}$$

A H_B tengerszint feletti magasság súlya:

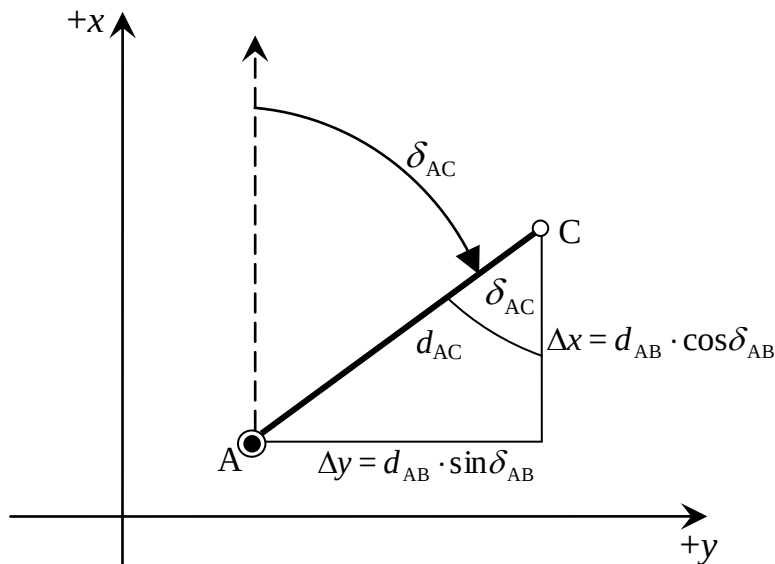
$$\frac{1}{p_{H_B}} = \mu_{H_B}^2; \quad p_{H_B} = \frac{1}{\mu_{H_B}^2} = \frac{1}{14,07} = 0,071 \text{ cm}^{-2}$$

Végeredmény a középphibával:

$$H_B = 214,3263 \text{ m} \pm 0,0375 \text{ m}$$

3. feladat

A feladat megoldásához ismerni kell az első derivált és az alapvető mátrixműveletek (szorzás) fogalmát!



Mérési eredmények és középphibáik:

$$d_{AC} = 1523,35 \text{ m}, \quad \mu_d = \pm 15 \text{ mm},$$

$$\delta_{AC} = 78^\circ 52' 40'', \quad \mu_{\delta_{AC}} = \pm 3''$$

A méréseket függetlennek tekintjük.

A koordinátakülönbségek:

$$\Delta y = d_{AC} \cdot \sin \delta_{AC}$$

$$\Delta x = d_{AC} \cdot \cos \delta_{AC}$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= 1523,35 \text{ m} \cdot \sin(78^\circ 52' 40'') = 1494,738 \text{ m}, \\ \Delta x &= 1523,35 \text{ m} \cdot \cos(78^\circ 52' 40'') = 293,858 \text{ m}. \end{aligned}$$

A varianciák:

$$\mu_{\Delta y}^2 = a^2 \cdot \mu_d^2 + b^2 \cdot \frac{\mu_\delta^2}{\rho''^2} = 234,8 \text{ mm}^2,$$

$$\mu_{\Delta x}^2 = a^2 \cdot \mu_d^2 + b^2 \cdot \frac{\mu_\delta^2}{\rho''^2} = 481,0 \text{ mm}^2.$$

A képletekben $\rho''=206265''$, az egy radián ''-ben kifejezett értéke.

Az együtthatók:

$$a = \frac{\partial(d_{AC} \cdot \sin \delta_{AC})}{\partial d_{AC}} = \sin \delta_{AC} = \sin(78^\circ 52' 40'') = 0,981,$$

$$b = \frac{\partial(d_{AC} \cdot \sin \delta_{AC})}{\partial \delta_{AC}} = d_{AC} \cdot \cos \delta_{AC} = 1523,35 \cdot \cos(78^\circ 52' 40'') = 293858 \text{ mm}.$$

A fenti eredményre jutunk a mátrixokkal megadott képlet segítségével is.

A koordinátakülönbségek kovariancia mátrixa:

$$\mathbf{K}_u = \mathbf{A} \cdot \mathbf{K}_x \cdot \mathbf{A}^T.$$

$\begin{matrix} & & & \\ m,m & m,n & n,n & n,m \end{matrix}$

A képletben:

$$\mathbf{A}_{2,2} = \begin{pmatrix} \partial(\Delta y)/\partial d_{AC} & \partial(\Delta y)/\partial \delta_{AC} \\ \partial(\Delta x)/\partial d_{AC} & \partial(\Delta x)/\partial \delta_{AC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \delta_{AC} & d_{AC} \cdot \cos \delta_{AC} \\ \cos \delta_{AC} & -d_{AC} \cdot \sin \delta_{AC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,981 & 293858 \text{ mm} \\ 0,193 & -1494738 \text{ mm} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{2,2}^T = \begin{pmatrix} \sin \delta_{AC} & \cos \delta_{AC} \\ d_{AC} \cdot \cos \delta_{AC} & -d_{AC} \cdot \sin \delta_{AC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,981 & 0,193 \\ 293858 \text{ mm} & -1494738 \text{ mm} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{x,2,2} = \begin{pmatrix} \mu_d^2 & 0 \\ 0 & \frac{\mu_\delta^2}{\rho''^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15^2 \text{ mm}^2 & 0 \\ 0 & \frac{3^2}{206265^2} \end{pmatrix}.$$

A mátrix szorzás elvégzése:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{u,2,2} &= \mathbf{A}_{2,2} \cdot \mathbf{K}_{x,2,2} \cdot \mathbf{A}_{2,2}^T = \begin{pmatrix} \sin \delta_{AC} & d_{AC} \cdot \cos \delta_{AC} \\ \cos \delta_{AC} & -d_{AC} \cdot \sin \delta_{AC} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_d^2 & 0 \\ 0 & \frac{\mu_\delta^2}{\rho''^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \delta_{AC} & \cos \delta_{AC} \\ d_{AC} \cdot \cos \delta_{AC} & -d_{AC} \cdot \sin \delta_{AC} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,981 & 293858 \text{ mm} \\ 0,193 & -1494738 \text{ mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15^2 \text{ mm}^2 & 0 \\ 0 & \frac{3^2}{206265^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,981 & 0,193 \\ 293858 \text{ mm} & -1494738 \text{ mm} \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,981 \cdot 15^2 \text{ mm}^2 & 293858 \text{ mm} \cdot \frac{3^2}{206265^2} \\ 0,193 \cdot 15^2 \text{ mm}^2 & -1494738 \text{ mm} \cdot \frac{3^2}{206265^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,981 & 0,193 \\ 293858 \text{ mm} & -1494738 \text{ mm} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,981^2 \cdot 15^2 + 293858^2 \cdot \frac{3^2}{206265^2} & 0,981 \cdot 0,193 \cdot 15^2 - 293858 \cdot 1494738 \cdot \frac{3^2}{206265^2} \\ 0,981 \cdot 0,193 \cdot 15^2 - 293858 \cdot 1494738 \cdot \frac{3^2}{206265^2} & 0,193^2 \cdot 15^2 + 1494738^2 \cdot \frac{3^2}{206265^2} \end{pmatrix} \text{ mm}^2$$

A koordinátakülönbségek kovariancia mátrixa:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mu_{\Delta y}^2 & \text{cov}_{\Delta y, \Delta x} \\ \text{cov}_{\Delta x, \Delta y} & \mu_{\Delta x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 234,8 & -50,3 \\ -50,3 & 481,0 \end{pmatrix} \text{ mm}^2.$$

A $\mathbf{K}_{\mathbf{u}}$ kovariancia mátrix szimmetrikus, diagonális elemei a koordinátakülönbségek középhiba-négyzetei, az átlón kívüli elemei pedig a kovarianciák.

A középhibák:

$$\mu_{\Delta y} = \sqrt{234,8} = \pm 15,3 \text{ mm} \quad \text{és} \quad \mu_{\Delta x} = \sqrt{481,0} = \pm 21,9 \text{ mm}.$$

Irodalomjegyzék

Bácsatyai László: Kiegyenlítő számítások, elektronikus jegyzet pdf formátumban,
NYME Geoinformatikai Kar, Székesfehérvár ,
http://www.geo.info.hu/geodezia/index.php?option=com_content&task=view&id=27&Itemid=42

Nyugat-magyarországi Egyetem Geoinformatikai Kar

Dr. Bácsatyai László

MATEMATIKAI GEODÉZIAI SZÁMÍTÁSOK

MGS-6

6 Lineáris regresszió számítás elektronikus távmérőkre

SZÉKESFEHÉRVÁR

2011

**Jelen szellemi terméket a szerzői jogról szóló 1999. évi LXXVI. törvény védi.
Egészének vagy részeinek másolása, felhasználás kizárólag a szerző írásos engedélyével lehetséges.**

Ez a modul a
TÁMOP - 4.1.2-08/1/A-2009-0027 „Tananyagfejlesztéssel a GEO-ért” projekt
keretében készült.

A projektet az EU és a Magyar Állam 44 706 488 Ft összegben támogatta.

**Lektor:
Dr. Benedek Judit**

**Projektvezető:
Dr. h.c. Dr. Szepes András**

**Projekt szakmai vezetője:
Dr. Mélykúti Gábor dékán**

Copyright © Nyugat-magyarországi Egyetem 2011

Tartalom

6	Lineáris regresszió számítás elektronikus távmérőkre	1
6.1	A feladat megfogalmazása.....	5
6.2	A feladatban szereplő fogalmak.....	6
6.2.1	Számpélda.....	9

6.1 A feladat megfogalmazása

Elektronikus távmérővel különböző nagyságú, ismert valódi értékű távolságokat mértünk. Adottak a mért d_i távolságok 0,1 km élességgel és a mért távolságok Δ_i valódi hibáinak $|\Delta_i|$ abszolút értékei.

Határozzuk meg a korrelációs együtthatót és írjuk fel a regressziós egyenes egyenletét! Ítéljük meg, hogy a kapott összefüggés alapján következtethetünk-e összefüggésre a mért távolságok nagysága és a valódi hibák $|\Delta_i|$ abszolút értékei között.

Leadandók különálló borítólapba foglalva:

- A feladatkiírás és a kiinduló adatok (feladatlapba foglalva),
- Számítások listája a részeredményekkel együtt,
- A regressziós egyenes grafikonja

A feladatot az EXCEL használata nélkül, manuálisan, zsebkalkulátorral kell megoldani, s a felhasznált képletekkel és tájékoztató szöveges információkkal együtt – különálló borítólapba foglalva - kézzel írott, vagy Microsoft Word formátumban kell leadni.

6.2 A feladatban szereplő fogalmak

Két valószínűségi változó kapcsolatának jellemzésére a kovarianciát és a korrelációs együtthatót használjuk.

$$\text{cov}_{uz} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - U)(z_i - Z)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_{u_i} \cdot \Delta_{z_i}}{n}.$$

A fenti képletben cov_{uz} - az előzetes középhibához hasonlóan – az *előzetes kovariancia*, amely számítható akkor, ha ismerjük az u_i és z_i valószínűségi változók várható értékeit. A továbbiakban valószínűségi változó helyett a *mérési eredmény*, várható érték helyett a *valódi érték* kifejezéseket fogjuk használni. Ekkor a Δ_{u_i} és Δ_{z_i} mennyiségek a mérési eredmények (valódi) véletlen hibái. Belátható, hogy egyetlen mennyiségnek saját magával alkotott kovarianciája a *variancia* (az *előzetes középhiba* négyzete):

$$\mu_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - U)(u_i - U)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_{u_i}^2}{n}.$$

A korrelációs együttható a

$$r_{uz} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - U)(z_i - Z)}{n \cdot \mu_u \cdot \mu_z} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_{u_i} \cdot \Delta_{z_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta_{u_i}^2 \cdot \sum_{i=1}^n \Delta_{z_i}^2}}$$

képlettel fejezhető ki, ahol μ_u és μ_z az u és z mérendő mennyiségek *előzetes középhibái*.

Az r_{uz} korrelációs együttható értéke 0 és 1 közé esik. Ha $r_{uz} = 0$, azt mondjuk, hogy a két mérendő mennyiség korrelálatlan. A *korrelálatlanság* csak akkor jelent függetlenséget is, ha a mérési eredmények eloszlása *normális*. $r = 1$ esetén a korreláció maximális. Mivel a geodéziai mérési eredmények matematikai feldolgozásának egyszerűsítése céljából a méréseknek függetlennek kell lenniük, fontos, hogy milyen megbízhatósággal számítható ki a korrelációs együttható értéke, ill. milyen abszolút értéke mellett tekinthető szignifikánsnak a két mérendő mennyiség függőségére vonatkozóan. A feladatban a szigorú szignifikancia vizsgálatról eltekintünk, saját megítélésünk alapján kell megítélnünk a kapcsolat hiányát, ill. esetleges létezését.

Becsült értékük alapján két mérési sorozat (minta) közötti lineáris kapcsolat szorosságára következtethetünk¹. Kapcsolat esetén az egyik mennyiség (pl. u) mért értékéből e függőségi kapcsolat - a regresszió - alapján becsülhető a másik mennyiség (pl. z) értéke. Lineáris regresszió esetén a $z = f(u)$ függvény geometriai képe egyenes, amelyet ezért regressziós egyenesnek is nevezünk.

Legyen két mérési sorozatunk az alábbi mérési eredményekkel:

u_i	u_1	u_2		u_n
z_i	z_1	z_2		z_n

Az utólagos középhiba (négyzetének) analógiájára nevezzük a

$$c_{uz} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(z_i - \bar{z})}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n v_{u_i} v_{z_i}}{n-1}$$

kifejezést *utólagos kovarianciának*.

Ekkor a korrelációs együttható becsült, tapasztalati értéke megadható az

$$r_{uz} = \frac{c_{uz}}{\mu_u \cdot \mu_z} = \frac{\sum_{i=1}^n v_{u_i} \cdot v_{z_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n v_{u_i}^2 \cdot \sum_{i=1}^n v_{z_i}^2}}$$

kifejezéssel.

A képletek jelölései:

$$v_{u_i} = u_i - \bar{u}; \quad v_{z_i} = z_i - \bar{z};$$

$$\bar{u} = \frac{\sum u_i}{n}; \quad \bar{z} = \frac{\sum z_i}{n}; \quad \mu_u = \sqrt{\frac{\sum (u_i - \bar{u})^2}{n-1}}; \quad \mu_z = \sqrt{\frac{\sum (z_i - \bar{z})^2}{n-1}}.$$

Az - empirikus - *regressziós egyenes* egyenletei kifejezhetők a

¹ A korrelációs együttható csak a lineáris kapcsolat jellemzésére megfelelő mérőszám, két valószínűségi változó közötti más függvénykapcsolatról nem kapunk információt. Egy meghatározott függvénykapcsolat szorosságát a korrelációs index méri.

$$z = \bar{z} + r_{uz} \cdot \frac{\mu_z}{\mu_u} \cdot (u - \bar{u}),$$

$$u = \bar{u} + r_{zu} \cdot \frac{\mu_u}{\mu_z} \cdot (z - \bar{z})$$

alakban, attól függően, hogy z függőségét vizsgáljuk u - tól, vagy u függőségét z - től. A fenti egyenletekben az eddigi jelölések mellett az egyenesek

$$b_z = r_{uz} \cdot \frac{\mu_z}{\mu_u}$$

$$b_u = r_{zu} \cdot \frac{\mu_u}{\mu_z}$$

iránytangenseit regressziós együtthatóknak nevezzük. A

$$z = a_z + b_z \cdot u,$$

$$u = a_u + b_u \cdot z$$

regressziós egyenesek megkaphatók a *legkisebb négyzetek elve* alapján is a

$$F(a_z, b_z) = \sum_{i=1}^n (z_i - a_z - b_z \cdot u_i)^2 = \min.,$$

$$G(a_u, b_u) = \sum_{i=1}^n (u_i - a_u - b_u \cdot z_i)^2 = \min.$$

feltételekből kiindulva. Az összefüggésekben adottak az u_i és z_i eredmény-párok, keressük a regressziós egyenesek a_z , b_z , ill. a_u , b_u együtthatóit.

6.2.1 Számpélda

Kiinduló adatok:

A mérés sorszáma	A mérési eredmények	
	$u_i (d_i)$ (km)	$z_i (A_i)$ (mm)
1	1,7	9,1
2	0,7	6,5
3	1,2	9,1
4	0,7	2,0
5	1,0	16,1
6	1,2	6,3
7	0,5	3,4
8	1,0	6,1
9	0,6	7,2
10	0,1	0,1
11	1,1	13,5
12	0,4	3,2
13	0,2	2,6
14	1,5	7,3
15	0,8	21,2
16	0,4	7,1
17	0,2	9,3
18	1,3	8,4
19	1,4	10,4
20	0,1	5,0

A számítások a következő táblázatban láthatók:

A mérés sorszama	A mérési eredmények		Számítások				
	$u_i (d_i)$ (km)	$z_i (A_i)$ (mm)	$v_u = u_i - \bar{u}$	$v_z = z_i - \bar{z}$	v_u^2	v_z^2	$v_u \cdot v_z$
1	1,7	9,1	0,89	1,4	0,792	1,96	1,246
2	0,7	6,5	-0,11	-1,2	0,012	1,44	0,132
3	1,2	9,1	0,39	1,4	0,152	1,96	0,546
4	0,7	2,0	-0,11	-5,7	0,012	32,49	0,627
5	1,0	16,1	0,19	8,4	0,036	70,56	1,596
6	1,2	6,3	0,39	-1,4	0,152	1,96	-0,546
7	0,5	3,4	-0,31	-4,3	0,096	18,49	1,333
8	1,0	6,1	0,19	-1,6	0,036	2,56	-0,304
9	0,6	7,2	-0,21	-0,5	0,044	0,250	0,105
10	0,1	0,1	-0,71	-7,6	0,504	57,76	5,396
11	1,1	13,5	0,29	5,8	0,084	33,64	1,682
12	0,4	3,2	-0,41	-4,5	0,168	20,25	1,845
13	0,2	2,6	-0,61	-5,1	0,372	26,01	3,111
14	1,5	7,3	0,69	-0,4	0,476	0,160	-0,276
15	0,8	21,2	-0,01	13,5	0,000	182,25	-0,135
16	0,4	7,1	-0,41	-0,6	0,168	0,36	0,246
17	0,2	9,3	-0,61	1,6	0,372	2,56	-0,976
18	1,3	8,4	0,49	0,7	0,240	0,490	0,343
19	1,4	10,4	0,59	2,7	0,348	7,290	1,593
20	0,1	5,0	-0,71	-2,7	0,504	7,290	1,917
Átlag: $\bar{u} = \frac{\sum u_i}{n} = 0,81 \text{ km}$		$\bar{z} = \frac{\sum z_i}{n} = 7,7 \text{ mm}$	$\sum_{i=1}^{20} v_{u_i} = -0,1 \text{ km}$	$\sum_{i=1}^{20} v_{z_i} = -0,1 \text{ mm}$	$\Sigma = 4,568$	$\Sigma = 469,730$	$\Sigma = 19,454$

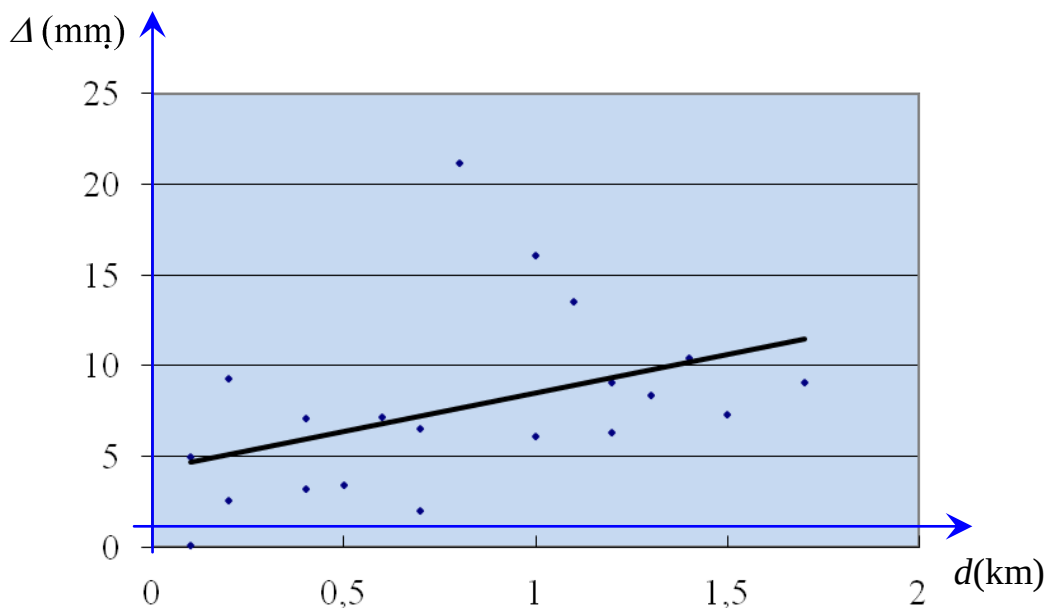
A táblázatban foglalt számítások alapján számíthatók a következő mennyiségek:

$$\mu_z = \mu_{|\Delta|} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{469,73}{19}} = \pm 4,97 \text{ mm} \approx \pm 5 \text{ mm};$$

$$\mu_u = \mu_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{4,568}{19}} = \pm 0,49 \text{ km} \approx \pm 0,5 \text{ km};$$

$$r_{uz} = \frac{\sum_{i=1}^n v_{u_i} \cdot v_{z_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n v_{u_i}^2 \cdot \sum_{i=1}^n v_{z_i}^2}} = \frac{19,454}{\sqrt{4,568 \cdot 469,73}} = \frac{19,454}{46,321} = +0,42.$$

Az u_i (d_i), z_i ($|\Delta_i|$) pontok és a regressziós egyenes grafikus ábrázolása (az abszcissza tengelyen a távolságok km-ben, az ordináta tengelyen a mérési hibák mm dimenzióban szerepelnek).



A $|\Delta|$ valódi mérési hibáknak a távolságoktól való függőségét kifejező

$$z = \bar{z} + r_{uz} \cdot \frac{\mu_z}{\mu_u} (u - \bar{u}),$$

vagy, más jelölésekkel

$$|\Delta| = |\bar{\Delta}| + r_{uz} \cdot \frac{\mu_{|\Delta|}}{\mu_d} (d - \bar{d})$$

regressziós egyenes egyenlete:

$$|\Delta| = 7,7 \text{ mm} + 0,42 \cdot \frac{5}{0,5} \cdot (d - 0,81) = 7,7 \text{ mm} + 4,2 \cdot (d - 0,81) = (4,3 + 4,2 \cdot d) \text{ mm}.$$

ahol, hogy az eredményt mm dimenzióban kapjuk meg, a d értékét km-ben kell behelyettesíteni (a 4,2 regressziós együttható dimenziója ui. mm/km).

A grafikon alapján a két mennyiség között - nem túl erős - *korrelációt* lehet gyanítani. Megalapozottabb, meggyőzőbb válasz azonban csak nagyobb minta alapján lenne adható.

Fentiekből következik, s ezt igazolja a gyakorlat is, hogy az elektronikus távolságmérés eredményét egy távolságtól független és egy távolságfüggő hibatag befolyásolja. Megemlítjük, hogy e példában a fordított esetnek - a távolságnak a valódi hibáktól való függőségének - nincs értelme.

Irodalomjegyzék

Bácsatyai László: Kiegyenlítő számítások, elektronikus jegyzet pdf formátumban,
NYME Geoinformatikai Kar, Székesfehérvár ,
http://www.geo.info.hu/geodezia/index.php?option=com_content&task=view&id=27&Itemid=42

Nyugat-magyarországi Egyetem Geoinformatikai Kar

Dr. Bácsatyai László

MATEMATIKAI GEODÉZIAI SZÁMÍTÁSOK

MGS-7

7 Súlyozott számtani közép számítása és záróhibák elosztása

SZÉKESFEHÉRVÁR

2011

**Jelen szellemi terméket a szerzői jogról szóló 1999. évi LXXVI. törvény védi.
Egészének vagy részeinek másolása, felhasználás kizárólag a szerző írásos engedélyével lehetséges.**

Ez a modul a
TÁMOP - 4.1.2-08/1/A-2009-0027 „Tananyagfejlesztéssel a GEO-ért” projekt
keretében készült.

A projektet az EU és a Magyar Állam 44 706 488 Ft összegben támogatta.

**Lektor:
Dr. Benedek Judit**

**Projektvezető:
Dr. h.c. Dr. Szepes András**

**Projekt szakmai vezetője:
Dr. Mélykúti Gábor dékán**

Copyright © Nyugat-magyarországi Egyetem 2011

Tartalom

7	Súlyozott számtani közép számítása és záróhibák elosztása	1
7.1	A feladat megfogalmazása.....	5
7.2	Magyarázó ábra és a számítás képletei (középtájékozási szög)	6
7.3	Záróhiba elosztása	8
7.4	Számpéldák.....	10
7.4.1	Súlyozott középtájékozási szög és tájékozott irányérték számítása	10
7.4.2	Zárt szintezési poligon záróhibájának elosztása	11

7.1 A feladat megfogalmazása

1. A 3441 állásponton tájékoztató irányokat mértünk a 3443, 3440, 3446 és 3447 ismert pontokra, valamint külső irányt a 999 pontra.

Meghatározandók:

- tájékoztatói szögek, z_i
 - tájékoztatói szögek súlyai km egységben, $p_i = d_i$
 - középtájékoztatói szög a 3441 ponton, z_k
 - tájékoztatói szögek javításai, v_i
 - súlyegység utólagos középhibája, μ_0
 - 3441-999 irány tájékoztató irányértéke, $\delta'_{3441,999}$
 - középtájékoztatói szög középhibája és súlya, μ_{z_k}, p_{z_k}
 - tájékoztatói szögek utólagos középhibái, μ_i .
2. Szintezési poligon kiegyenlítése: zárt szintezési poligonban adottak az egyes szintezési vonalak hosszai km egységben, a szintezési vonalakra vonatkozó oda-vissza mért magasságkülönbségek, valamint a poligon egy ismert tengerszint feletti magasságú pontja.

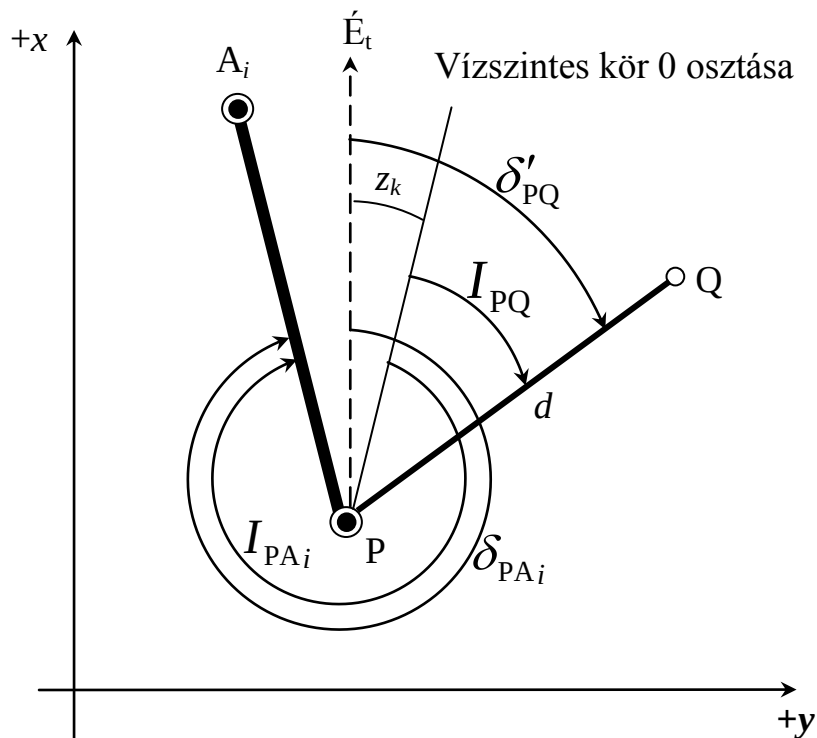
Meghatározandók a szintezési vonalak mérési javításai, a súlyegység középhibája, a kiegyenlített magasságkülönbségek és középhibáik, valamint a poligonban lévő magassági alappontok tengerszint feletti magasságai

Leadandók különálló borítólapba foglalva mindkét feladatnál:

- A feladatkiírás és a kiinduló adatok (feladatlapba foglalva),
- Számítások listája táblázatos formában a részeredményekkel együtt.

A feladatot az EXCEL használata nélkül, manuálisan, zsebkalkulátorral kell megoldani, s a felhasznált képletekkel és tájékoztató szöveges információkkal együtt – különálló borítólapba foglalva - kézzel írott, vagy Microsoft Word formátumban kell leadni.

7.2 Magyarázó ábra és a számítás képletei (középtájékozási szög)



Számítási képletek:

Tájékozó irányok irányszöge: $\delta_{PA_i} = \frac{\Delta y_{PA_i}}{\Delta x_{PA_i}} = \arctan \frac{y_{A_i} - y_P}{x_{A_i} - x_P} \quad (i = 1, 2, \dots)$

Tájékozó irányok hossza: $d_{PA_i} = \sqrt{\Delta y_{PA_i}^2 + \Delta x_{PA_i}^2} = \sqrt{(y_{A_i} - y_P)^2 + (x_{A_i} - x_P)^2}$

Tájékozási szögek: $z_i = \delta_{PA_i} - I_{PA_i}$

Tájékozási szögek súlyai km egységben, $p_i = d_{PA_i}$

Súlyozott középtájékozási szög: $z_k = \frac{\sum_{i=1}^m p_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^m p_i}$

Javítások: $v_i = z_i - z_k$

A súlyegység középhibája: $\mu_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i \cdot v_i^2}{n-1}}$

A középtájékozási szög súlya: $p_{z_k} = \sum_{i=1}^n p_i$

A középtájékozási szög középhibája: $\mu_{z_k} = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_{z_k}}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i \cdot v_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n p_i\right) \cdot (n-1)}}$

Tájékozási szögek utólagos középhibái: $\mu_i = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_i}}$

7.3 Záróhiba elosztása

A mérési eredmények (előjelhelyes) összegének egy megadott számértéknek kell lenni!

A számítás képletei:

Feltételi egyenlet:

$$u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + u_3 + v_3 + \dots = U$$

$u_1, u_2, u_3, \dots$ - mérési eredmények

$v_1, v_2, v_3, \dots$ - mérési eredmények javításai

U - a mérési eredmények összegének hibátlan (vagy hibátlanak tekinthető) értéke

Záróhiba:

$$\Delta = U - (u_1 + u_2 + u_3 + \dots) = U - \sum u_i;$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots = \Delta.$$

Az egyes javításoknak a mérési eredményhez tartozó súllyal fordított arányban kell lenni. Nagyobb súlyú mérési eredményhez kisebb, kisebb súlyú méréshez nagyobb javítás tartozik, ezért a javításokat a súlyokkal fordított arányban vesszük fel:

$$v_1 = \frac{k}{p_1}; \quad v_2 = \frac{k}{p_2}; \quad v_3 = \frac{k}{p_3}; \quad \dots$$

k - ismeretlen számérték, a korreláta.

A súlyok reciprocai:

$$\frac{1}{p_1} = q_1; \quad \frac{1}{p_2} = q_2; \quad \frac{1}{p_3} = q_3; \quad \dots$$

Javítások:

$$v_1 = q_1 \cdot k; \quad v_2 = q_2 \cdot k; \quad v_3 = q_3 \cdot k; \quad \dots$$

Javítások összege:

$$q_1 \cdot k + q_2 \cdot k + q_3 \cdot k + \dots = \Delta$$

$$q_1 \cdot k + q_2 \cdot k + q_3 \cdot k + \dots + l = 0 \quad (l = -\Delta)$$

A korreláta:

$$k = -\frac{l}{\sum_i q_i}.$$

A javítások négyzetösszege:

$$\sum_i p_i \cdot v_i^2 = k^2 \cdot \sum_i \frac{1}{q_i} \cdot q_i^2 = \frac{l^2}{\left(\sum_i q_i\right)^2} \sum_i q_i = \frac{l^2}{\sum_i q_i}.$$

A súlyegység középhibája (1 fölös mérés):

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{\sum_i p_i \cdot v_i^2}{n-1}} = \sqrt{\sum_i p_i \cdot v_i^2}.$$

Egy mérési eredmény középhibája:

$$\mu_i = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_i}}.$$

Zárt szintezési poligonban a szintezési vonalra vonatkozó magasságkülönbségek előjelhelyes összege zérus!

7.4 Számpéldák

7.4.1 Súlyozott középtájékozási szög és tájékozott irányérték számítása

Kiinduló adatok (feltételezzük, hogy a kiinduló adatok hibátlanok):

Pontszám	Koordináták	
	y (m)	x (m)
3440	658031,81	247985,58
3441	657867,11	248275,35
3443	658352,46	248000,55
3446	658077,70	247431,38
3447	657310,23	247123,54

Iránymérési eredmények:

Állaspont Száma	Irányzott pont száma	Irányérték I
3441	999	125-14-48
	3443	237-01-18
	3440	267-53-34
	3446	283-30-02
	3447	323-18-45

Számítás:

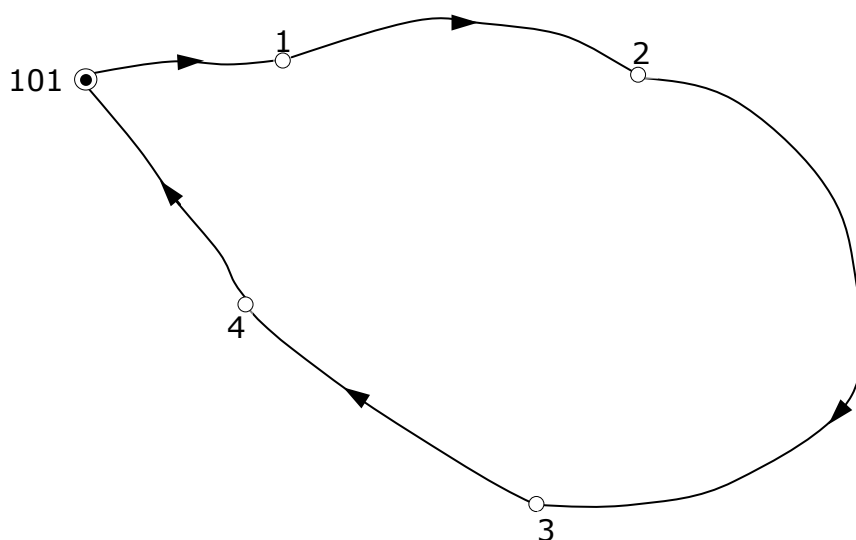
Állaspont száma	Sorszám	Irányzott p. száma	Irányérték I	Távolság d	Táj. Szög z_i	Irányyszög/ Táj. irányért. $I+z_k$
3441		999	125-14-48	-	-	7-44-18
	1	3443	237-01-18	557,75	242-29-47	119-31-05
	2	3440	267-53-34	333,31	242-29-39	150-23-13
	3	3446	283-30-02	869,85	242-29-20	165-59-22
	4	3447	323-18-45	1279,37	242-29-26	205-48-11
				$z_k =$	242-29-30	

Ir. pont száma	z_i „	$p_i = \frac{d_i}{\sum d_i}$ (km)	$p_i \cdot z_i$	z_k	$v_i = z_i - z_k$ „	$p_i \cdot v_i$	$p_i \cdot v_i^2$	μ_0	$\mu_i = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_i}}$ „
3443	47	0,56	26,32	29,6	17,4	9,744	169,55	9,9	13,2
3440	39	0,33	12,87		9,4	3,102	29,16		17,2
3446	20	0,87	17,40		-9,6	-8,352	80,18		10,6
3447	26	1,28	33,28		-3,6	-4,608	16,59		8,8
Sum		3,04	89,87			-0,114	295,48		

A középtájékozási szög súlya: $p_{z_k} = \sum_{i=1}^n p_i = \frac{3,04}{n^2}$

A középtájékozási szög középhibája: $\mu_{z_k} = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_{z_k}}} = \pm 5,7''$

7.4.2 Zárt szintezési poligon záróhibájának elosztása



Kiinduló adatok:

A pont száma	Távolság (d, km)	Mérési eredmények (m)		Tengerszint feletti magasság (m)
		O d a	V i s s z a	
101				128,948
1	0,5	+2,348	-2,350	
2	1,0	-1,848	+1,856	
3	2,0	+0,420	-0,406	
4	1,5	-1,038	+1,049	
101	0,7	+0,112	-0,104	128,948

A pont száma	Távolság (d, km)	$q_i = d, p_i = \frac{1}{q_i}$	Mérési eredmények u_i (m)		v_i (mm) Közép (m)	Kiegyenlített magasságkülönbség (m)	Tengerszint feletti magasság (m)
			Oda	Vissza			
101							128,948
1	0,5	0,5 2,0	+2,348	-2,350	+2 + 2,349	2,351 ± 7,7 mm	131,299
2	1,0	1,0 1,0	-1,848	+1,856	+5 -1,852	-1,847 ± 10,9 mm	129,452
3	2,0	2,0 0,5	+0,420	-0,406	+9 +0,413	+0,422 ± 15,4 mm	129,874
4	1,5	1,5 0,7	-1,038	+1,049	+7 -1,044	-1,037 ± 13,0 mm	128,837
101	0,7	0,7 1,4	+0,112	-0,104	+3 +0,108	+0,111 ± 9,2 mm	128,948
Σ		5,7	-0,006	+0,045	-0,026		$\Delta = -l = +26$ mm

A korreláta:

$$k = -\frac{l}{\sum_i q_i} = \frac{\Delta}{\sum_i q_i} = \frac{26}{5,7} \approx 4,6$$

A javítások:

$$v_i = q_i \cdot k = 4,6 \cdot q_i$$

A súlyegység középhibája:

$$\mu_0 = \pm \sqrt{\frac{l^2}{\sum_i q_i}} = \pm \sqrt{\frac{26^2}{5,7}} \approx \pm 10,9$$

A kiegyenlített magasságkülönbségek középhibái:

$$\mu_1 = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_1}} = \pm 7,7 \text{ mm} ; \mu_2 = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_2}} = \pm 10,9 \text{ mm} ; \mu_3 = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_3}} = \pm 15,4 \text{ mm} ;$$

$$\mu_4 = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_4}} = \pm 13,0 \text{ mm} ; \mu_5 = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_5}} = \pm 9,2 \text{ mm} .$$

Irodalomjegyzék

Bácsatyai László: Kiegyenlítő számítások, elektronikus jegyzet pdf formátumban, NYME Geoinformatikai Kar, Székesfehérvár,
http://www.geo.info.hu/geodezia/index.php?option=com_content&task=view&id=27&Itemid=42

Tarsoly Péter: Geodézia II. Jegyzet, NYME Geoinformatikai Kar, Székesfehérvár, 2009.

Nyugat-magyarországi Egyetem Geoinformatikai Kar

Dr. Bácsatyai László

MATEMATIKAI GEODÉZIAI SZÁMÍTÁSOK

MGS-8

8 Szintezési hálózat kiegyenlítése

SZÉKESFEHÉRVÁR

2011

**Jelen szellemi terméket a szerzői jogról szóló 1999. évi LXXVI. törvény védi.
Egészének vagy részeinek másolása, felhasználás kizárólag a szerző írásos engedélyével lehetséges.**

Ez a modul a
TÁMOP - 4.1.2-08/1/A-2009-0027 „Tananyagfejlesztéssel a GEO-ért” projekt
keretében készült.

A projektet az EU és a Magyar Állam 44 706 488 Ft összegben támogatta.

**Lektor:
Dr. Benedek Judit**

**Projektvezető:
Dr. h.c. Dr. Szepes András**

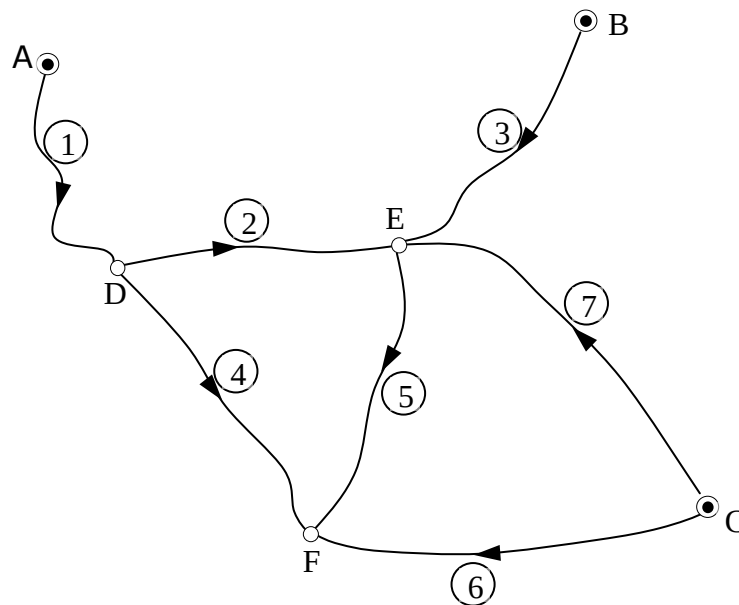
**Projekt szakmai vezetője:
Dr. Mélykúti Gábor dékán**

Copyright © Nyugat-magyarországi Egyetem 2011

Tartalom

8 Szintezési hálózat kiegyenlítése	1
8.1 A feladat megfogalmazása.....	5
8.2 Közvetett mérések kiegyenlítése (koordináta-kiegyenlítés): lineáris eset	6
8.3 Számpélda	10

8.1 A feladat megfogalmazása



Az ábrán látható szintezési hálózatban adottak az A, B és C pontok tengerszint feletti magasságai. Mértük az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 szintezési vonalak magasságkülönbségeit.

Meghatározandók:

- a mérési eredmények súlyait a vonalhosszak alapján,
- a D, E és F pontok koordinátáinak közelítő értékei,
- a D, E és F pontokra vonatkozó koordináta-kiegészítő értékek és a kiegyenlített magasságok,
- a súlyegység középhibája,
- a kiegyenlített magasságok középhibái,
- a mérési javítások és a kiegyenlített mérési eredmények.

A normál-egyenletrendszer megoldásához szükséges inverz mátrixot az adjungált mátrix segítségével kell meghatározni.

Dimenziók:

- cm-ben: javítási egyenletek tisztatagjai, normál-egyenletrendszer tisztatagjai, kiegyenlített ismeretlenek, mérési javítások, a súlyegység középhibája és a kiegyenlített ismeretlenek középhibái,
- m-ben: D, E és F pontok végleges magasságai és a kiegyenlített mérési eredmények.

Leadandók különálló borítólapba foglalva:

- A feladatkiírás és a kiinduló adatok (feladatlapba foglalva),
- Számítások listája a részeredményekkel együtt,
- Eredmények összefoglaló táblázata

A feladatot zsebkalkulátor segítségével kell megoldani, s a felhasznált képletekkel és tájékoztató szöveges információkkal együtt – különálló borítólapba foglalva - kézzel írott, vagy Microsoft Word formátumban kell leadni.

8.2 Közvetett mérések kiegyenlítése (koordináta-kiegyenlítés): lineáris eset

m számú ismeretlen meghatározására n számú mérést végzünk. A kiegyenlítésnek csak az $m > n$ feltétel teljesülése esetén van értelme, $m=n$ esetén nincs fölös mérés, $m < n$ esetén a feladatot nem lehet megoldani. A fölös mérések száma $f = n - m$.

Közvetett mérési eredmények valódi értékei:

$$U_1 = a_{11} \cdot Z_1 + a_{12} \cdot Z_2 + \dots a_{1m} \cdot Z_m$$

$$U_2 = a_{21} \cdot Z_1 + a_{22} \cdot Z_2 + \dots a_{2m} \cdot Z_m$$

.....

$$U_n = a_{n1} \cdot Z_1 + a_{n2} \cdot Z_2 + \dots a_{nm} \cdot Z_m$$

$Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ - a keresett ismeretlenek valódi értékei

Közvetítő egyenletek:

$$u_1 = a_{11} \cdot z_1 + a_{12} \cdot z_2 + \dots a_{1m} \cdot z_m$$

$$u_2 = a_{21} \cdot z_1 + a_{22} \cdot z_2 + \dots a_{2m} \cdot z_m$$

.....

$$u_n = a_{n1} \cdot z_1 + a_{n2} \cdot z_2 + \dots a_{nm} \cdot z_m$$

$u_1, u_2, \dots, u_n$ - a mérési eredmények

$z_1, z_2, \dots, z_n$ - a keresett ismeretlenek mérési eredményekhez tartozó (nem ismert) értékei

A mérési eredmények kiegyenlített értékei:

??Mi a kapcsolat az $U_i, u_i, \bar{u}_i$ illetve $Z_i, z_i, \bar{z}_i$ mennyiségek között??

$$\bar{u}_1 = a_{11} \cdot \bar{z}_1 + a_{12} \cdot \bar{z}_2 + \dots a_{1m} \cdot \bar{z}_m$$

$$\bar{u}_2 = a_{21} \cdot \bar{z}_1 + a_{22} \cdot \bar{z}_2 + \dots a_{2m} \cdot \bar{z}_m$$

.....

$$\bar{u}_n = a_{n1} \cdot \bar{z}_1 + a_{n2} \cdot \bar{z}_2 + \dots a_{nm} \cdot \bar{z}_m$$

$\bar{u}_i$ - mérési eredmények kiegyenlített értékei

$\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_m$ - a keresett ismeretlenek kiegyenlített értékei

A fentiekben tehát U_i a mérések, Z_i a keresett ismeretlenek valódi értékei, u_i a mérési eredmények, z_i a keresett ismeretlenek mérési eredményekhez tartozó értékei, $\bar{u}_i$ a mérési eredmények, $\bar{z}_i$ a keresett ismeretlenek kiegyenlített értékei.

A mérési eredmények kiegyenlített értékei a mérési javítások és közelítő értékek bevezetésével:

$$\begin{aligned} u_1 - v_1 &= a_{11} \cdot \zeta_{10} - \delta z_1 \} a_{12} \cdot \zeta_{20} - \delta z_2 \} \dots + a_{1m} \cdot \zeta_{m0} - \delta z_m \\ u_2 - v_2 &= a_{21} \cdot \zeta_{10} - \delta z_1 \} a_{22} \cdot \zeta_{20} - \delta z_2 \} \dots + a_{2m} \cdot \zeta_{m0} - \delta z_m \\ &\dots\dots\dots \\ u_n - v_n &= a_{n1} \cdot \zeta_{10} - \delta z_1 \} a_{n2} \cdot \zeta_{20} - \delta z_2 \} \dots + a_{nm} \cdot \zeta_{m0} - \delta z_m \end{aligned}$$

$\zeta_{10}, \zeta_{20}, \dots, \zeta_{m0}$ - a keresett ismeretlenek közelítő értékei,

v_i - mérési javítások ($i = 1, 2, \dots, n$),

δz_j - a koordináta-kiegészítő értékek ($j = 1, 2, \dots, m$).

Javítási egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11} \cdot \delta z_1 + a_{12} \cdot \delta z_2 + \dots + a_{1m} \cdot \delta z_m + l_1 \\ v_2 &= a_{21} \cdot \delta z_1 + a_{22} \cdot \delta z_2 + \dots + a_{2m} \cdot \delta z_m + l_2 \\ &\dots\dots\dots \\ v_n &= a_{n1} \cdot \delta z_1 + a_{n2} \cdot \delta z_2 + \dots + a_{nm} \cdot \delta z_m + l_n, \end{aligned}$$

$$l_i = u_i - a_{i1} \cdot \zeta_{10} - a_{i2} \cdot \zeta_{20} - \dots - a_{im} \cdot \zeta_{m0} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Javítási egyenletrendszer mátrixos formában:

$$\underset{n,1}{\mathbf{v}} = \underset{n,m}{\mathbf{A}} \cdot \underset{m,1}{\delta \mathbf{z}} + \underset{n,1}{\mathbf{l}}$$

Jelölések:

$$\underset{n,m}{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}; \quad \underset{n,1}{\mathbf{l}} = \underset{n,m}{\mathbf{u}} - \underset{n,m}{\mathbf{A}} \cdot \underset{m,1}{\mathbf{z}_0} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_n \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} \underset{1,n}{\mathbf{u}}^T &= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}; \quad \underset{1,n}{\mathbf{v}}^T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}; \quad \underset{1,n}{\mathbf{l}}^T = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{pmatrix}; \\ \underset{1,m}{\delta \mathbf{z}}^T &= \begin{pmatrix} \delta z_1 & \delta z_2 & \dots & \delta z_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\mathbf{A}^T$ felső index transzponált mátrixot jelöl.

A normál egyenletrendszer mátrixos formában ($\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min$. feltétel alapján):

$$\underset{m,n}{\mathbf{A}}^T \cdot \underset{n,n}{\mathbf{P}} \cdot \underset{n,m}{\mathbf{A}} \cdot \underset{m,1}{\delta \mathbf{z}} + \underset{m,n}{\mathbf{A}}^T \cdot \underset{n,n}{\mathbf{P}} \cdot \underset{n,1}{\mathbf{l}} = \underset{m,1}{\mathbf{0}}$$

Az eddigi jelöléseken túl a súlymátrix:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_0^2}{\mu_1^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\mu_0^2}{\mu_2^2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\mu_0^2}{\mu_n^2} \end{pmatrix}$$

A súlymátrix a gyakorlatban – a mérésekre vonatkozó függőségi kapcsolatok ismeretének hiányában – diagonális, ami azt jelenti, hogy a méréseket függetleneknek tekintjük. $\mathbf{Q}$ – a súlymátrix inverze, a súlykoefficiens mátrix.

μ_0 – a súlyegység középphibája

μ_i – a mérési eredmények előzetes középphibái

A normál egyenletrendszer megoldása:

$$\underset{m,1}{\delta \mathbf{z}} = - \underset{m,n}{\mathbf{A}}^T \cdot \underset{n,n}{\mathbf{P}} \cdot \underset{n,m}{\mathbf{A}}^{-1} \underset{m,n}{\mathbf{A}}^T \cdot \underset{n,n}{\mathbf{P}} \cdot \underset{n,1}{\mathbf{l}}$$

A keresett ismeretlenek:

$$\underset{m,1}{\bar{\mathbf{z}}} = \underset{m,1}{\mathbf{z}_0} - \underset{m,1}{\delta \mathbf{z}}$$

$$\underset{m,1}{\bar{\mathbf{z}}}^T = \left(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_m \right); \quad \underset{m,1}{\mathbf{z}_0}^T = \left(z_{10}, z_{20}, \dots, z_{m0} \right); \quad \underset{1,m}{\delta \mathbf{z}}^T = \left(\delta z_1, \delta z_2, \dots, \delta z_m \right).$$

A súlyegység középphibája:

$$\mu_0 = \pm \sqrt{\frac{\underset{1,n}{\mathbf{v}}^T \cdot \underset{n,n}{\mathbf{P}} \cdot \underset{n,1}{\mathbf{v}}}{f}}$$

$\mathbf{P}$ – súlymátrix

$$\underset{n,1}{\mathbf{v}} = \underset{n,m}{\mathbf{A}} \cdot \underset{m,1}{\delta \mathbf{z}} + \underset{n,1}{\mathbf{l}} \text{ – mérési javítások vektora}$$

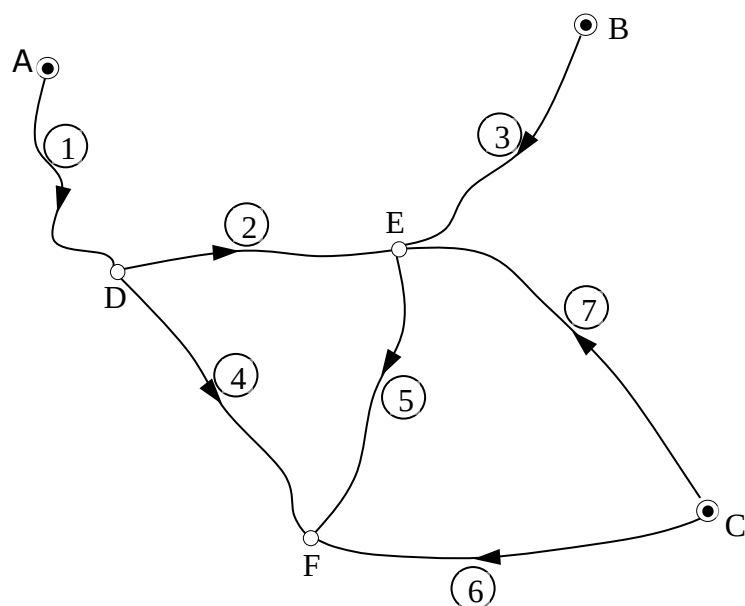
f – fölös mérések száma

Keresett ismeretlenek utólagos középhibái:

$$\mu_{\tilde{x}_j} = \mu_0 \cdot \sqrt{Q_{jj}}$$

$j = 1, 2, \dots, m$, Q_{jj} a $\mathbf{Q}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \left(\mathbf{A}_{m,n}^T \cdot \mathbf{P}_{n,n} \cdot \mathbf{A}_{n,m} \right)$ mátrix j -ik főátlóbeli eleme.

8.3 Számpélda



Kiinduló adatok:

Adott alappontok	Adott alappontok magassága, H (m)
A	183,506
B	192,353
C	191,880

Mérendő mennyiségek U_i	Mérési eredmények u_i , m	Szintezési vonal hossza, d_i km	Magasság- különbségek
1	+6,135	33,0	$H_D - H_A$
2	+8,343	33,9	$-H_D + H_E$
3	+5,614	30,4	$H_E - H_B$
4	+1,394	32,7	$-H_D + H_F$
5	-6,969	31,8	$-H_E + H_F$
6	-0,930	29,9	$H_F - H_C$
7	+6,078	34,5	$H_E - H_C$

Az általános jelöléseket a feladat aktuális jelöléseivel helyettesítjük.

1. Közvetítő egyenletek:

$$\begin{aligned}u_1 &= H_D - H_A \\u_2 &= -H_D + H_E \\u_3 &= H_E - H_B \\u_4 &= -H_D + H_F \\u_5 &= -H_E + H_F \\u_6 &= H_F - H_C \\u_7 &= H_E - H_C\end{aligned}$$

2. Közelítő értékek:

$$\begin{aligned}H_{D0} &= 183,506 \text{ m} + 6,135 \text{ m} = 189,641 \text{ m} \\H_{E0} &= 192,353 \text{ m} + 5,614 \text{ m} = 197,967 \text{ m} ; \\H_{F0} &= 191,880 \text{ m} - 0,930 \text{ m} = 190,950 \text{ m}\end{aligned} \quad \mathbf{H}_0 = \begin{pmatrix} 189,641 \\ 197,967 \\ 190,950 \end{pmatrix}_{3,1}$$

3. A javítási egyenletek tiszta tagjai:

$$\begin{aligned}l_1 &= u_1 - H_{D0} + H_A \\l_2 &= u_2 + H_{D0} - H_{E0} \\l_3 &= u_3 - H_{E0} + H_B \\l_4 &= u_4 + H_{D0} - H_{F0} \\l_5 &= u_5 + H_{E0} - H_{F0} \\l_6 &= u_6 - H_{F0} + H_C \\l_7 &= u_7 - H_{E0} + H_C\end{aligned}$$

4. Javítási egyenletek (cm-ben):

$$\begin{aligned}v_1 &= +\delta H_D && +0 \\v_2 &= -\delta H_D + \delta H_E && +1,7 \\v_3 &= &+ \delta H_E && +0 \\v_4 &= -\delta H_D && +\delta H_F +8,5 \\v_5 &= &- \delta H_E + \delta H_F && +4,8 \\v_6 &= &&+ \delta H_F +0 \\v_7 &= &+ \delta H_E && -0,9\end{aligned}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{H} + \mathbf{l}$$

$\begin{matrix} 7,1 & 7,3 & 3,1 & 7,1 \end{matrix}$

Jelölések:

$$\mathbf{A}_{7,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \delta \mathbf{H}_{3,1} = \begin{pmatrix} \delta H_1 \\ \delta H_2 \\ \delta H_3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{l}_{7,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ +1,7 \\ 0 \\ +8,5 \\ +4,8 \\ 0 \\ -0,9 \end{pmatrix}.$$

A súlymátrix:

$$\mathbf{P}_{7,7} = \begin{pmatrix} 1,21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,32 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,26 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,34 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,16 \end{pmatrix}.$$

A súlyok felvétele a $p_i = c^2/d_i$ képlettel történt, $c^2=40$ megválasztása mellett.

5. A normál egyenletrendszer együttható-mátrixa és a tisztatag vektor:

$$\mathbf{N}_{3,3} = \mathbf{A}_{3,7}^T \cdot \mathbf{P}_{7,7} \cdot \mathbf{A}_{7,3} = \begin{pmatrix} 3,615 & -1,180 & -1,223 \\ -1,180 & 4,913 & -1,258 \\ -1,223 & -1,258 & 3,819 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_{3,7}^T \cdot \mathbf{P}_{7,7} \cdot \mathbf{l}_{7,1} = \begin{pmatrix} -12,41 \\ -5,07 \\ 16,44 \end{pmatrix}$$

6. A normál egyenletrendszer megoldása:

$$\delta \mathbf{H}_{3,1} = - \left(\mathbf{A}_{3,7}^T \cdot \mathbf{P}_{7,7} \cdot \mathbf{A}_{7,3} \right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{A}_{3,7}^T \cdot \mathbf{P}_{7,7} \cdot \mathbf{l}_{7,1} \right) = - \mathbf{N}_{3,3}^{-1} \cdot \left(\mathbf{A}_{3,7}^T \cdot \mathbf{P}_{7,7} \cdot \mathbf{l}_{7,1} \right).$$

7. Adjungált mátrix képzése:

a) Az $\mathbf{N}_{3,3}$ mátrix elemeihez tartozó aldeterminánsok:

$$N_{1,1} = \begin{vmatrix} 4,913 & -1,258 \\ -1,258 & 3,819 \end{vmatrix} = 17,180; \quad N_{1,2} = - \begin{vmatrix} -1,180 & -1,258 \\ -1,223 & 3,819 \end{vmatrix} = 6,045; \quad N_{1,3} = \begin{vmatrix} -1,180 & 4,913 \\ -1,223 & -1,258 \end{vmatrix} = 7,494$$

$$N_{2,1} = - \begin{vmatrix} -1,180 & -1,223 \\ -1,258 & 3,819 \end{vmatrix} = 6,045; N_{2,2} = \begin{vmatrix} 3,615 & -1,223 \\ -1,223 & 3,819 \end{vmatrix} = 12,310; N_{2,3} = - \begin{vmatrix} 3,615 & -1,180 \\ -1,223 & -1,258 \end{vmatrix} = 5,991$$

$$N_{3,1} = \begin{vmatrix} -1,180 & -1,223 \\ 4,913 & -1,258 \end{vmatrix} = 7,494; N_{3,2} = - \begin{vmatrix} 3,615 & -1,223 \\ -1,180 & -1,258 \end{vmatrix} = 5,991; N_{3,3} = \begin{vmatrix} 3,615 & -1,180 \\ -1,180 & 4,913 \end{vmatrix} = 16,370$$

b) Az aldeterminánsokból képzett mátrix:

$$\text{adj} \mathbf{N}_{3,3} = \begin{pmatrix} 17,1801 & 6,0447 & 7,4940 \\ 6,0447 & 12,3101 & 5,9909 \\ 7,4940 & 5,9909 & 16,3698 \end{pmatrix}.$$

c) Az eredeti mátrix determinánsa:

$$\det \mathbf{N}_{3,3} = 3,615 \cdot \begin{vmatrix} 4,913 & -1,258 \\ -1,258 & 3,819 \end{vmatrix} - (-1,180) \cdot \begin{vmatrix} -1,180 & -1,258 \\ -1,223 & 3,819 \end{vmatrix} + (-1,223) \cdot \begin{vmatrix} -1,180 & 4,913 \\ -1,223 & -1,258 \end{vmatrix} =$$

$$= 3,615 \cdot 17,180 + 1,180 \cdot 6,045 - 1,223 \cdot 7,494 = 45,8117.$$

d) Az inverz mátrix:

$$\mathbf{Q}_{\delta H, 3,3} = \mathbf{N}_{3,3}^{-1} = \frac{\text{adj} \mathbf{N}_{3,3}}{\det \mathbf{N}_{3,3}} = \begin{pmatrix} 0,3750 & 0,1319 & 0,1636 \\ 0,1319 & 0,2687 & 0,1308 \\ 0,1636 & 0,1308 & 0,3573 \end{pmatrix}.$$

8. A keresett ismeretlenek kiegészítő értékei (cm-ben):

$$\delta \mathbf{H}_{3,1} = - \left(\mathbf{A}_{3,7}^T \cdot \mathbf{P}_{7,7} \cdot \mathbf{A}_{7,3} \right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{A}_{3,7}^T \cdot \mathbf{P}_{7,7} \cdot \mathbf{l}_{7,1} \right) = - \begin{pmatrix} 0,3750 & 0,1319 & 0,1636 \\ 0,1319 & 0,2687 & 0,1308 \\ 0,1636 & 0,1308 & 0,3573 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12,41 \\ -5,07 \\ 16,44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,633 \\ 0,851 \\ -3,180 \end{pmatrix}.$$

9. Kiegyenlített magasságok (m-ben):

$$\overline{\mathbf{H}}_{3,1} = \mathbf{H}_{0,3,1} - \delta \mathbf{H}_{3,1} = \begin{pmatrix} 189,615 \\ 197,958 \\ 190,982 \end{pmatrix}.$$

10. Megbízhatósági mérőszámok:

$$\mathbf{v}_{7,1}^T = \begin{pmatrix} 2,63 & -0,08 & +0,85 & +2,69 & +0,77 & -3,18 & -0,05 \end{pmatrix} \text{cm};$$

$$\mu_0^2 = \frac{\mathbf{v}_{1,7}^T \cdot \mathbf{P}_{7,7} \cdot \mathbf{v}_{7,1}}{n-m} = \frac{\mathbf{v}_{1,7}^T \cdot \mathbf{P}_{7,7} \cdot \mathbf{v}_{7,1}}{7-3} = \frac{32,48}{4} = 8,12;$$

A súlyegység középhibája: $\mu_0 = \pm 2,85$.

Az ismeretlenek kiegyenlítés utáni középhibái:

$$\mu_{\delta H_1} = \mu_0 \cdot \sqrt{Q_{11}} = \pm 2,85 \cdot \sqrt{0,3750} = \pm 1,75 \text{ cm}$$

$$\mu_{\delta H_2} = \mu_0 \cdot \sqrt{Q_{22}} = \pm 2,85 \cdot \sqrt{0,2687} = \pm 1,48 \text{ cm} .$$

$$\mu_{\delta H_3} = \mu_0 \cdot \sqrt{Q_{33}} = \pm 2,85 \cdot \sqrt{0,3573} = \pm 1,70 \text{ cm}$$

Eredmények táblázatos összefoglalása:

Mérendő mennyiségek U_i	Mérési eredmények u_i , m	Szintezési vonal hossza d_i , km	Magasság- különbségek	Súlyok $p_i =$ $40/d_i$	Kiegyenlített mérési eredmények $\bar{u}_i = u_i - v_i$, m
1	+6,135	33,0	$H_D - H_A$	1,21	6,109
2	+8,343	33,9	$-H_D + Z_2$	1,18	8,344
3	+5,614	30,4	$H_E - H_B$	1,32	5,605
4	+1,394	32,7	$-H_D + H_F$	1,22	1,367
5	-6,969	31,8	$-H_E + H_F$	1,26	-6,977
6	-0,930	29,9	$H_F - H_C$	1,34	-0,898
7	+6,078	34,5	$H_E - H_C$	1,16	6,078

Ismeretlen pontok	Kiegyenlített tengerszint feletti magasságok, m
H_D	189,615
H_E	197,958
H_F	190,982

Irodalomjegyzék

Bácsatyai László: Kiegyenlítő számítások, elektronikus jegyzet pdf formátumban,
NYME Geoinformatikai Kar, Székesfehérvár ,
http://www.geo.info.hu/geodezia/index.php?option=com_content&task=view&id=27&Itemid=42

Nyugat-magyarországi Egyetem Geoinformatikai Kar

Dr. Bácsatyai László

MATEMATIKAI GEODÉZIAI SZÁMÍTÁSOK

MGS-9

9 Szabad állaspont kiegyenlítése

SZÉKESFEHÉRVÁR

2011

**Jelen szellemi terméket a szerzői jogról szóló 1999. évi LXXVI. törvény védi.
Egészének vagy részeinek másolása, felhasználás kizárólag a szerző írásos engedélyével lehetséges.**

Ez a modul a
TÁMOP - 4.1.2-08/1/A-2009-0027 „Tananyagfejlesztéssel a GEO-ért” projekt
keretében készült.

A projektet az EU és a Magyar Állam 44 706 488 Ft összegben támogatta.

**Lektor:
Dr. Benedek Judit**

**Projektvezető:
Dr. h.c. Dr. Szepes András**

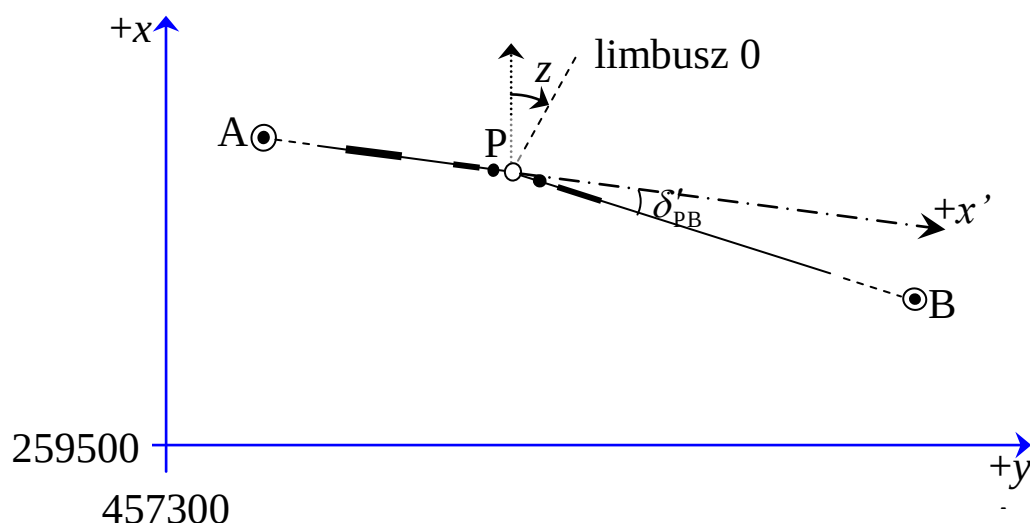
**Projekt szakmai vezetője:
Dr. Mélykúti Gábor dékán**

Copyright © Nyugat-magyarországi Egyetem 2011

Tartalom

9 Szabad álláspont kiegyenlítése	1
9.1 A feladat megfogalmazása.....	5
9.2 Szabad álláspont meghatározása	7
9.3 Számpélda	13

9.1 A feladat megfogalmazása



Az ábrán látható hálózatban adottak az A és B pontok vetületi koordinátái. Mértük az I_{PA}, I_{PB} irányokat és a d_{PA}, d_{PB} távolságokat, valamint ismerjük a mérési eredmények előzetes középhibáit, a μ_I és a μ_d értékeket.

Meghatározandók:

- a P pont koordinátái és a z tájékozási szög közelítő értékei,
- a javítási egyenletrendszer,
- a mérési eredmények súlymátrixa,
- a normálegyenlet rendszer együtthatómátrixa és a tisztatag vektor,
- a P pont koordinátái és a tájékozási szög kiegészítő értékei,
- a P pont kiegyenlített koordinátái m-ben és a tájékozási szög kiegyenlített értéke,
- a mérési javítások és kiegyenlített mérési eredmények,
- a súlyegység középpontja és az ismeretlenek kiegyenlítés utáni középpontjai.

A normál-egyenletrendszer megoldásához szükséges inverz mátrixot az adjungált mátrix segítségével kell meghatározni.

Dimenziók:

- szögmásodpercben: részben a javítási egyenletek tisztatagjai, a tájékozási szög kiegészítő értéke,
- mm-ben: részben a javítási egyenletek tisztatagjai, mérési javítások, a P pont koordinátáinak kiegészítő értékei, a kiegyenlített ismeretlenek középhibái,
- m-ben: a P pont koordinátáinak közelítő értékei és kiegyenlített koordinátái.

Az itt fel nem sorolt mértékegységek megtalálhatók a mintapéldában.

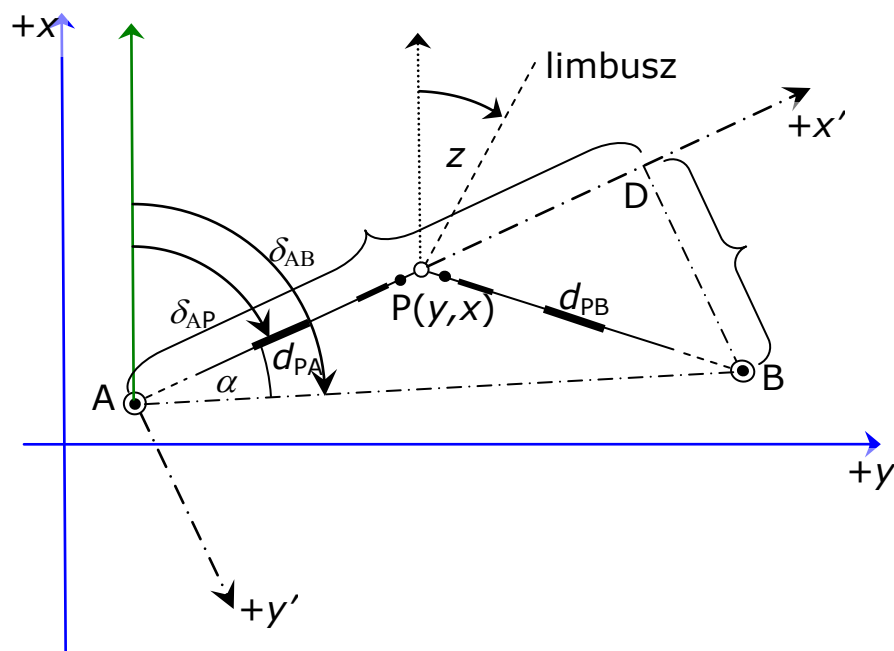
Leadandók különálló borítólapba foglalva:

- A feladatkiírás és a kiinduló adatok (feladatlapba foglalva),
- Számítások listája a rész- és végeredményekkel együtt,

A feladatot, a felhasznált képletekkel és tájékoztató szöveges információkkal együtt – különálló borítólapba foglalva - kézzel írott, vagy Microsoft Word formátumban kell leadni.

9.2 Szabad álláspont meghatározása

Tudjuk, hogy a szabad álláspont meghatározásakor a meghatározandó ponton a mérőállomással belső irányokat és távolságokat mérünk az ismert pontokon felállított prizmákra. Ha csak belső irányokat mérnénk, legalább 3 belső irány esetén hátrametszésről, 2 belső irány és 2 távolság esetén pedig a beillesztett sokszögvonal egy speciális esetéről beszélhetnénk, nevezetesen arról, amikor a 2 adott pont közötti egyetlen sokszögpontról mérünk irányt és távolságot a sokszögvonal kezdő- és végpontjára (ábra). Természetesen, a szabad álláspontnak még egyéb variációi is elképzelhetők. A szabad álláspont koordinátáit a mérőállomás mikroszámítógépe számítja, a felhasználó már csak a kész eredményeket olvassa le, ill. rögzíti.



Beillesztett sokszögvonal 2 sokszögoldallal

3 belső irány esetén nincs fölös mérésünk, 2 belső irány és 2 távolság esetén a mérési eredmények száma $n = 4$, a meghatározandó ismeretlenek száma pedig $m = 3$, a pont két koordinátája és a tájékozási szög. A fölös mérések száma $n - m = 1$, tehát fennáll a kiegyenlítés feltétele. Válasszuk mintapéldaként ezt az egyszerű esetet!

Fejezzük ki a mérési eredményeket a meghatározandó ismeretlenek függvényében!

Közvetítő egyenletek az iránymérésekre:

$$I_{PA} = \arctg \frac{y_A - y}{x_A - x} - z ;$$

$$I_{PB} = \arctg \frac{y_B - y}{x_B - x} - z .$$

Közvetítő egyenletek a távolságmérésekre:

$$d_{PA} = \sqrt{(y_A - y)^2 + (x_A - x)^2} ;$$

$$d_{PB} = \sqrt{(y_B - y)^2 + (x_B - x)^2} .$$

A fenti egyenletekben ismeretlenek az álláspont y, x koordinátái és a z tájékozási szög.

Legyenek még adottak a mérési eredmények $\mu_{I_{PA}} = \mu_{I_{PB}} = \mu_I$ és $\mu_{d_{PA}} = \mu_{d_{PB}} = \mu_d$ előzetes középphibái, azaz eltekintünk attól, hogy az elektronikus távmérés pontossága függ a mért távolságtól.

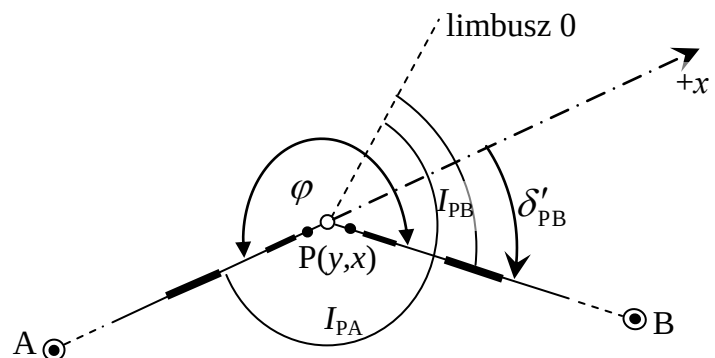
A koordináták közelítő értékeit* a fenti ábra alapján, a beillesztett sokszögvonaltól számításának megfelelően kapjuk. A sokszögvonal AB záróoldalának irányyszöge:

$$\delta_{AB} = \arctg \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} .$$

$\delta'_{AP} = 0$ induló irányszöggel számítjuk a sokszögvonalat, ill. a sokszögoldal összegek tengely-irányú komponenseit az y', x' segédkoordináta-rendszerben, majd meghatározzuk az α szöget:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d_{PA} \cdot \sin \delta'_{AP} + d_{PB} \cdot \sin \delta'_{PB}}{d_{PA} \cdot \cos \delta'_{AP} + d_{PB} \cdot \cos \delta'_{PB}} = \frac{d_{PB} \cdot \sin \delta'_{PB}}{d_{PA} + d_{PB} \cdot \cos \delta'_{PB}} .$$

A δ'_{PB} irányyszög: $\delta'_{PB} = \delta'_{PA} + \varphi = 180^\circ + I_{PB} - I_{PA}$



A δ'_{PB} irányyszög számítása

* A sorba fejtés korlátai miatt itt feltétlenül szükséges jó közelítő értékek bevezetése!

A δ_{AP} irányyszög: $\delta_{AP} = \delta_{AB} - \alpha$.

A δ_{PB} irányyszög: $\delta_{PB} = \delta_{AP} + \delta'_{PB}$

A koordináták közelítő értékei:

$$y_0 = y_A + d_{PA} \cdot \sin \delta_{AP}$$

$$x_0 = x_A + d_{PA} \cdot \cos \delta_{AP}.$$

A z tájékozási szög közelítő értéke: $z_0 = \delta_{PA} - I_{PA} = \pm 180^\circ + \delta_{AP} - I_{PA}$.

Képezzük az alábbi parciális deriváltakat:

$$a_{11} = \frac{\partial I_{PA}}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{(y_A - y)^2}{(x_A - x)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x_A - x} \right) = -\frac{(x_A - x)^2}{(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2} \cdot \frac{1}{x_A - x} = -\frac{\cos \delta_{PA}}{d_{PA}};$$

$$a_{12} = \frac{\partial I_{PA}}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{(y_A - y)^2}{(x_A - x)^2}} \cdot \frac{y_A - y}{(x_A - x)^2} = \frac{(x_A - x)^2}{(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2} \cdot \frac{y_A - y}{(x_A - x)^2} = \frac{\sin \delta_{PA}}{d_{PA}};$$

$$a_{13} = \frac{\partial I_{PA}}{\partial z} = -1$$

$$a_{21} = \frac{\partial I_{PB}}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{(y_B - y)^2}{(x_B - x)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x_B - x} \right) = -\frac{(x_B - x)^2}{(x_B - x)^2 + (y_B - y)^2} \cdot \frac{1}{x_B - x} = -\frac{\cos \delta_{PB}}{d_{PB}};$$

$$a_{22} = \frac{\partial I_{PB}}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{(y_B - y)^2}{(x_B - x)^2}} \cdot \frac{y_B - y}{(x_B - x)^2} = \frac{(x_B - x)^2}{(x_B - x)^2 + (y_B - y)^2} \cdot \frac{y_B - y}{(x_B - x)^2} = \frac{\sin \delta_{PB}}{d_{PB}};$$

$$a_{23} = \frac{\partial I_{PB}}{\partial z} = -1;$$

$$a_{31} = \frac{\partial d_{PA}}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{(y_A - y)^2 + (x_A - x)^2}} \cdot 2 \cdot (y_A - y) \cdot (-1) = -\frac{y_A - y}{d_{PA}} = -\sin \delta_{PA};$$

$$a_{32} = \frac{\partial d_{PA}}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{(y_A - y)^2 + (x_A - x)^2}} \cdot 2 \cdot (x_A - x) \cdot (-1) = -\frac{x_A - x}{d_{PA}} = -\cos \delta_{PA};$$

$$a_{33} = \frac{\partial d_{PA}}{\partial z} = 0 ;$$

$$a_{41} = \frac{\partial d_{PB}}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{(y_B - y)^2 + (x_B - x)^2}} \cdot 2 \cdot (y_B - y) \cdot (-1) = -\frac{y_B - y}{d_{PB}} = -\sin \delta_{PB};$$

$$a_{42} = \frac{\partial d_{PB}}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{(y_B - y)^2 + (x_B - x)^2}} \cdot 2 \cdot (x_B - x) \cdot (-1) = -\frac{x_B - x}{d_{PB}} = -\cos \delta_{PB};$$

$$a_{43} = \frac{\partial d_{PB}}{\partial z} = 0.$$

A javítási egyenletek:

$$v_1 = a_{11} \cdot \delta y + a_{12} \cdot \delta x + a_{13} \cdot \delta z + l_1 = -\frac{\cos \delta_{PA}}{d_{PA}} \cdot \delta y + \frac{\sin \delta_{PA}}{d_{PA}} \cdot \delta x - \delta z + l_1;$$

$$v_2 = a_{21} \cdot \delta y + a_{22} \cdot \delta x + a_{23} \cdot \delta z + l_2 = -\frac{\cos \delta_{PB}}{d_{PB}} \cdot \delta y + \frac{\sin \delta_{PB}}{d_{PB}} \cdot \delta x - \delta z + l_2;$$

$$v_3 = a_{31} \cdot \delta y + a_{32} \cdot \delta x + a_{33} \cdot \delta z + l_3 = -\sin \delta_{PA} \cdot \delta y - \cos \delta_{PA} \cdot \delta x + l_3;$$

$$v_4 = a_{41} \cdot \delta y + a_{42} \cdot \delta x + a_{43} \cdot \delta z + l_4 = -\sin \delta_{PB} \cdot \delta y + \cos \delta_{PB} \cdot \delta x + l_4.$$

A javítási egyenletek tiszta tagjai:

$$l_1 = I_{PA} - \arctg \frac{y_A - y_0}{x_A - x_0} + z_0;$$

$$l_2 = I_{PB} - \arctg \frac{y_B - y_0}{x_B - x_0} + z_0;$$

$$l_3 = d_{PA} - \sqrt{(y_A - y_0)^2 + (x_A - x_0)^2};$$

$$l_4 = d_{PB} - \sqrt{(y_B - y_0)^2 + (x_B - x_0)^2}.$$

A megoldás:

$$\delta \mathbf{z}_{3,1} = - \left(\mathbf{A}_{3,4}^T \cdot \mathbf{P}_{4,4} \cdot \mathbf{A}_{4,3} \right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{A}_{3,4}^T \cdot \mathbf{P}_{4,4} \cdot \mathbf{l}_{4,1} \right);$$

$$\bar{\mathbf{z}}_{3,1} = \mathbf{z}_{0,1} - \delta \mathbf{z}_{3,1},$$

ahol

$$\delta \mathbf{z}_{3,1} = \begin{pmatrix} \delta y \\ \delta x \\ \delta z \end{pmatrix} \text{ az ismeretlenek kiegészítő értékeit;}$$

$$\mathbf{z}_{3,1} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} \text{ a keresett ismeretleneket;}$$

$$\mathbf{z}_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \text{ pedig az ismeretlenek közelítő értékeit;}$$

$$\mathbf{l}_{4,1} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} \text{ a javítási egyenletek tisztatagjait tartalmazza.}$$

Továbbá

$$\mathbf{A}_{4,3} = \begin{pmatrix} -\frac{\cos \delta_{PA}}{d_{PA}} & \frac{\sin \delta_{PA}}{d_{PA}} & -1 \\ -\frac{\cos \delta_{PB}}{d_{PB}} & \frac{\sin \delta_{PB}}{d_{PB}} & -1 \\ -\sin \delta_{PA} & -\cos \delta_{PA} & 0 \\ -\sin \delta_{PB} & -\cos \delta_{PB} & 0 \end{pmatrix} \text{ a javítási egyenletrendszer együttható mátrixa;}$$

$$\mathbf{P}_{4,4} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_0^2}{\mu_I^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu_0^2}{\mu_I^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu_0^2}{\mu_d^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu_0^2}{\mu_d^2} \end{pmatrix} \text{ a súlymátrix;}$$

$\mathbf{N} = \mathbf{A}_{3,3}^T \cdot \mathbf{P}_{4,4} \cdot \mathbf{A}_{4,3}$ a normálmátrix; $\mathbf{A}_{3,4}^T \cdot \mathbf{P}_{4,4} \cdot \mathbf{l}_{4,1}$ a tisztatagok vektora. A $\mathbf{P}$ mátrixról feltételezzük, hogy az egyes mérési eredmények egymástól függetlenek.

Megbízhatósági mérőszámok:

Kofaktor-, vagy súlykoefficiens mátrix:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}_{3,3}} = \left(\mathbf{A}_{3,4}^T \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{A}_{4,3} \right)^{-1}.$$

Kovariancia-mátrix:

$$\mathbf{K} = \mu_0^2 \cdot \mathbf{Q}.$$

A keresett ismeretlenek utólagos középhibái:

$$\mu_{\hat{\mathbf{z}}_j} = \mu_0 \cdot \sqrt{Q_{jj}}.$$

$j = 1, 2, 3$, Q_{jj} a $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}_{3,3}}$ mátrix j -ik főátló-beli eleme, a μ_0 pedig a *súlyegység utólagos középhibája*. A $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}_{3,3}}$ mátrix nem diagonális, hiszen a matematikai megoldás az ismeretlenek között korrelációkhoz vezet.

A súlyegység középhibája:

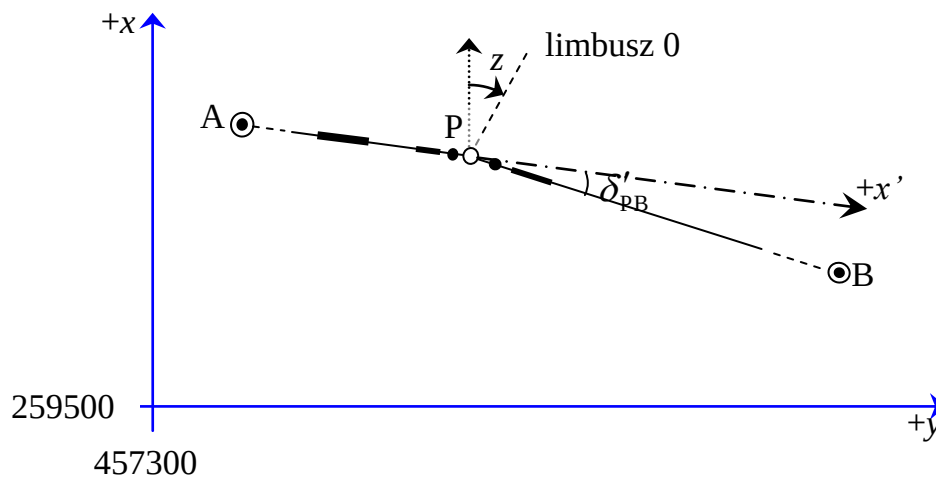
$$\mu_0 = \pm \sqrt{\mathbf{v}_{1,4}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}_{4,1}},$$

mert most $f = 4 - 3 = 1$ a fölös mérések száma. A μ_0 értékének számításához szükség van a $\mathbf{v}_{4,1}$ vektorra. Ennek számítása a $\hat{\mathbf{z}}_{m,1}$ vektor ismeretében a

$$\mathbf{v}_{4,1} = \mathbf{A}_{4,3} \cdot \hat{\mathbf{z}}_{3,1} + \mathbf{I}_{3,1}$$

javítási egyenletrendszer figyelembe vételével történhet.

9.3 Számpélda



Adott pontok koordinátái:

Pontszám	y (m)	x (m)
A	457403,26	259799,79
B	458170,52	259654,24

Mérési eredmények:

$$I_{PA} = 243-57-13,5$$

$$I_{PB} = 74 - 00 - 36,1$$

$$d_{\text{PA}} = 274,889 \text{ m}$$

$$d_{\text{PB}} = 508,812 \text{ m}.$$

A mérési eredmények előzetes középhibái:

$$\mu_I = \pm 3''; \quad \mu_d = \pm 5 \text{ mm}.$$

1. Közelítő értékek számítása:

$$\delta_{AB} = \arctg \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \arctg \frac{767,26}{-145,55} = 100 - 44 - 29,2 ;$$

$$\delta'_{PB} = \delta'_{PA} + \varphi = 180^\circ + I_{PB} - I_{PA} = 180^\circ + \{74 - 00 - 36,1\} - \{243 - 57 - 13,5\} = 10 - 03 - 22,6 ;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d_{PB} \cdot \sin \delta'_{PB}}{d_{PA} + d_{PB} \cdot \cos \delta'_{PB}} = \frac{508,812 \cdot \sin \delta'_{PB}}{274,889 + 508,812 \cdot \cos \delta'_{PB}} = 6 - 31 - 56,9 ;$$

$$\delta_{AP} = \delta_{AB} - \alpha = \{100 - 44 - 29,2\} - \{6 - 31 - 56,9\} = 94 - 12 - 32,3 ;$$

$$\delta_{PB} = \delta_{AP} + \delta'_{PB} = \{94 - 12 - 32,3\} + \{10 - 03 - 22,6\} = 104 - 15 - 54,9$$

$$\delta_{PA} = 180^\circ + \{94 - 12 - 32,3\} = 274 - 12 - 32,3 .$$

A koordináták közelítő értékei:

$$y_0 = y_A + d_{PA} \cdot \sin \delta_{AP} = 457403,26 + 274,889 \cdot \sin \{94 - 12 - 32,3\} = 457677,41 \text{ m} ;$$

$$x_0 = x_A + d_{PA} \cdot \cos \delta_{AP} = 259799,79 + 274,889 \cdot \cos \{94 - 12 - 32,3\} = 259779,61 \text{ m} .$$

A z tájékozási szög közelítő értéke:

$$z_0 = \delta_{PA} - I_{PA} = \pm 180^\circ + \{94 - 12 - 32,3\} - \{243 - 57 - 13,5\} = 30 - 15 - 18,8 .$$

2. A javítási egyenletrendszer együttható mátrixa:

$$\mathbf{A}_{4,3} = \begin{pmatrix} -\frac{\cos \delta_{PA}}{d_{PA}} \cdot \rho'' & \frac{\sin \delta_{PA}}{d_{PA}} \cdot \rho'' & -1 \\ -\frac{\cos \delta_{PB}}{d_{PB}} \cdot \rho'' & \frac{\sin \delta_{PB}}{d_{PB}} \cdot \rho'' & -1 \\ -\sin \delta_{PA} & -\cos \delta_{PA} & 0 \\ -\sin \delta_{PB} & -\cos \delta_{PB} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,05507 & -0,7483 & -1 \\ 0,09989 & 0,3929 & -1 \\ 0,9973 & -0,07339 & 0 \\ -0,9692 & 0,2464 & 0 \end{pmatrix}$$

Az $\mathbf{A}_{4,3}$ mátrix $A(1,1)$, $A(1,2)$, $A(2,1)$ és $A(2,2)$ elemeinek dimenziója "/mm, ha a távolságokat mm-ben helyettesítjük be. A többi elemnek nincs dimenziója.

3. A javítási egyenletrendszer tisztatajai:

$$\mathbf{l}_{4,1} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{PA} - \arctg \frac{y_A - y_0}{x_A - x_0} + z_0 \\ I_{PB} - \arctg \frac{y_B - y_0}{x_B - x_0} + z_0 \\ d_{PA} - \sqrt{(y_A - y_0)^2 + (x_A - x_0)^2} \\ d_{PB} - \sqrt{(y_B - y_0)^2 + (x_B - x_0)^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \{243 - 57 - 13,5\} - \{274 - 12 - 35,7\} + \{30 - 15 - 18,8\} \\ \{74 - 00 - 36,1\} - \{104 - 15 - 53,4\} + \{30 - 15 - 18,8\} \\ 274889 - \sqrt{(-274150)^2 + 20180^2} \\ 508812 - \sqrt{493110^2 + (-125370)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,4 \\ 1,5 \\ -2,7 \\ 14,2 \end{pmatrix}$$

Az l_1 és l_2 elemek dimenziója szögmásodperc ("), az l_3 és l_4 elemek dimenziója mm.

4. A javítási egyenletek:

$$v_1 = a_{11} \cdot \delta y + a_{12} \cdot \delta x + a_{13} \cdot \delta z + l_1 = -0,05507 \cdot \delta y - 0,7483 \cdot \delta x - \delta z - 3,4 ;$$

$$v_2 = a_{21} \cdot \delta y + a_{22} \cdot \delta x + a_{23} \cdot \delta z + l_2 = 0,09989 \cdot \delta y + 0,3929 \cdot \delta x - \delta z + 1,5 ;$$

$$v_3 = a_{31} \cdot \delta y + a_{32} \cdot \delta x + a_{33} \cdot \delta z + l_3 = 0,9973 \cdot \delta y - 0,07339 \cdot \delta x - 2,7 ;$$

$$v_4 = a_{41} \cdot \delta y + a_{42} \cdot \delta x + a_{43} \cdot \delta z + l_4 = -0,9692 \cdot \delta y + 0,2464 \cdot \delta x + 14,2 .$$

A megállapodott dimenzióknak megfelelően az első két egyenlet tagjai ", a 3. és 4. egyenlet tagjai mm dimenziójúak.

5. A súlymátrix:

$$\mathbf{P}_{4,4} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_0^2}{\mu_I^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu_0^2}{\mu_I^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu_0^2}{\mu_d^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu_0^2}{\mu_d^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

A súlyok meghatározásánál a súlyegység középhibájának $\mu_0 = \pm 5$ -öt választottunk, ahonnan $\mu_0^2 = 5^2 = 25$. De $\mu_I = \pm 3''$, ezért a súlymátrix főátlójának első két eleme $\frac{25}{9''^2} \approx 2,8''^{-2}$. A távolságmérés előzetes középhibája $\mu_d = \pm 5 \text{ mm}$. A főátló utolsó két eleme ekkor - $\mu_0 = \pm 5$ mellett - $\frac{25}{25 \text{ mm}^2} = 1 \text{ mm}^{-2}$.

6. A normál egyenletrendszer együttható-mátrixa és a tisztatag vektor:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1,97039 & -0,08673 & -0,12550 \\ -0,08673 & 2,06620 & 0,99512 \\ -0,12550 & 0,99512 & 5,60000 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{l} = \begin{pmatrix} -15,51 \\ 12,47 \\ 5,32 \end{pmatrix}$$

7. A normál egyenletrendszer megoldása:

$$\delta \mathbf{z} = - \left(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{l} \right) = - \mathbf{N}^{-1} \cdot \left(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{l} \right).$$

8. Adjungált mátrix képzése:

a) Az $\mathbf{N}$ mátrix elemeihez tartozó aldeterminánsok:

$$\begin{aligned} N_{1,1} &= \begin{vmatrix} 2,06620 & 0,99512 \\ 0,99512 & 5,60000 \end{vmatrix} = 10,58048; & N_{1,2} &= - \begin{vmatrix} -0,08673 & 0,99512 \\ -0,12550 & 5,60000 \end{vmatrix} = 0,36079; \\ N_{1,3} &= \begin{vmatrix} -0,08673 & 2,06620 \\ -0,12550 & 0,99512 \end{vmatrix} = 0,17300; \\ N_{2,1} &= - \begin{vmatrix} -0,08673 & -0,12550 \\ 0,99512 & 5,60000 \end{vmatrix} = 0,36079; & N_{2,2} &= \begin{vmatrix} 1,97039 & -0,12550 \\ -0,12550 & 5,60000 \end{vmatrix} = 11,01841; \\ N_{2,3} &= - \begin{vmatrix} 1,97039 & -0,08673 \\ -0,12550 & 0,99512 \end{vmatrix} = -1,94989; \\ N_{3,1} &= \begin{vmatrix} -0,08673 & -0,12550 \\ 2,06620 & 0,99512 \end{vmatrix} = 0,17300; & N_{3,2} &= \begin{vmatrix} 1,97039 & -0,12550 \\ -0,08673 & 0,99512 \end{vmatrix} = -1,94989; \\ N_{3,3} &= \begin{vmatrix} 1,97039 & -0,08673 \\ -0,08673 & 2,06620 \end{vmatrix} = 4,06370. \end{aligned}$$

b) Az aldeterminánsokból képzett mátrix: $\text{adj} \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 10,58048 & 0,36079 & 0,17300 \\ 0,36079 & 11,01841 & -1,94989 \\ 0,17300 & -1,94989 & 4,06370 \end{pmatrix}.$

c) Az eredeti mátrix determinánsa:

$$\det \mathbf{N}_{3,3} = 1,97039 \cdot \begin{vmatrix} 2,06620 & 0,99512 \\ 0,99512 & 5,60000 \end{vmatrix} + 0,08673 \cdot \begin{vmatrix} -0,08673 & 0,99512 \\ -0,12550 & 5,60000 \end{vmatrix} + (-0,12550) \cdot \begin{vmatrix} -0,08673 & 2,06620 \\ -0,12550 & 0,99512 \end{vmatrix} = 20,79463$$

d) Az inverz mátrix: $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}_{3,3}} = \mathbf{N}_{3,3}^{-1} = \frac{\text{adj} \mathbf{N}_{3,3}}{\det \mathbf{N}_{3,3}} = \begin{pmatrix} 0,50881 & 0,01735 & 0,00832 \\ 0,01735 & 0,52987 & -0,09377 \\ 0,00832 & -0,09377 & 0,19542 \end{pmatrix}.$

9. A keresett ismeretlenek kiegészítő értékei:

$$\delta \mathbf{z}_{3,1} = - \left(\mathbf{A}_{3,4}^T \cdot \mathbf{P}_{4,4} \cdot \mathbf{A}_{4,3} \right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{A}_{3,4}^T \cdot \mathbf{P}_{4,4} \cdot \mathbf{l}_{4,1} \right) = - \begin{pmatrix} 0,50881 & 0,01735 & 0,00832 \\ 0,01735 & 0,52987 & -0,09377 \\ 0,00832 & -0,09377 & 0,19542 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -15,51 \\ 12,47 \\ 5,32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,63 \\ -5,84 \\ 0,26 \end{pmatrix}.$$

A két első kiegészítő érték dimenziója mm, a harmadiké szögmásodperc ”.

10. Kiegyenlített ismeretlenek (a P pont koordinátái m-ben és a tájékozási szög ”-ben):

$$\bar{\mathbf{z}}_{3,1} = \mathbf{z}_{0,3,1} - \delta \mathbf{z}_{3,1} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 457677,402 \\ 259779,616 \\ 30 - 15 - 18,5 \end{pmatrix}.$$

11. Mérési javítások és kiegyenlített mérési eredmények:

$$\mathbf{v}_{4,1} = \mathbf{A}_{4,3} \cdot \delta \mathbf{z}_{3,1} - \mathbf{l}_{4,1} = \begin{pmatrix} 0,291 \\ -0,291 \\ 5,340 \\ 5,364 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} I_{PA} - v_1 = 243 - 57 - 13,2 \\ I_{PB} - v_2 = 74 - 00 - 36,4 \\ d_{PA} - v_3 = 274,884 \text{ m} \\ d_{PB} - v_4 = 508,807 \text{ m} \end{matrix}.$$

Az 1. és 2. mérési javítás ”, a 3. és 4. mérési javítás mm dimenziójú.

12. Megbízhatósági mérőszámok:

$$\mu_0^2 = \frac{\mathbf{v}_{1,4}^T \cdot \mathbf{P}_{4,4} \cdot \mathbf{v}_{4,1}}{n - m} = \frac{\mathbf{v}_{1,4}^T \cdot \mathbf{P}_{4,4} \cdot \mathbf{v}_{4,1}}{4 - 3} = 57,76;$$

A súlyegység középhibája: $\mu_0 = \pm 7,6.$

Az ismeretlenek kiegyenlítés utáni középhibái:

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{z}}_{3,3}} = \mu_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}_{3,3}} ;$$

$$\begin{aligned} \mu_{\hat{x}_1} &= \mu_0 \cdot \sqrt{Q_{11}} = \pm 7,6'' \cdot \sqrt{0,50881} = \pm 5,4 \text{ mm} \\ \mu_{\hat{x}_2} &= \mu_0 \cdot \sqrt{Q_{22}} = \pm 7,6'' \cdot \sqrt{0,52987} = \pm 5,5 \text{ mm} . \\ \mu_{\hat{x}_3} &= \mu_0 \cdot \sqrt{Q_{33}} = \pm 7,6'' \cdot \sqrt{0,19542} = \pm 3,4'' \end{aligned}$$

Irodalomjegyzék

Bácsatyai László: Kiegyenlítő számítások, elektronikus jegyzet pdf formátumban,
NYME Geoinformatikai Kar, Székesfehérvár ,
http://www.geo.info.hu/geodezia/index.php?option=com_content&task=view&id=27&Itemid=42

Nyugat-magyarországi Egyetem Geoinformatikai Kar

Dr. Bácsatyai László

MATEMATIKAI GEODÉZIAI SZÁMÍTÁSOK

MGS-10

10 Hibaellipszis, talpponti görbe és közepes ponthiba

SZÉKESFEHÉRVÁR

2011

**Jelen szellemi terméket a szerzői jogról szóló 1999. évi LXXVI. törvény védi.
Egészének vagy részeinek másolása, felhasználás kizárólag a szerző írásos engedélyével lehetséges.**

Ez a modul a
TÁMOP - 4.1.2-08/1/A-2009-0027 „Tananyagfejlesztéssel a GEO-ért” projekt
keretében készült.

A projektet az EU és a Magyar Állam 44 706 488 Ft összegben támogatta.

**Lektor:
Dr. Benedek Judit**

**Projektvezető:
Dr. h.c. Dr. Szepes András**

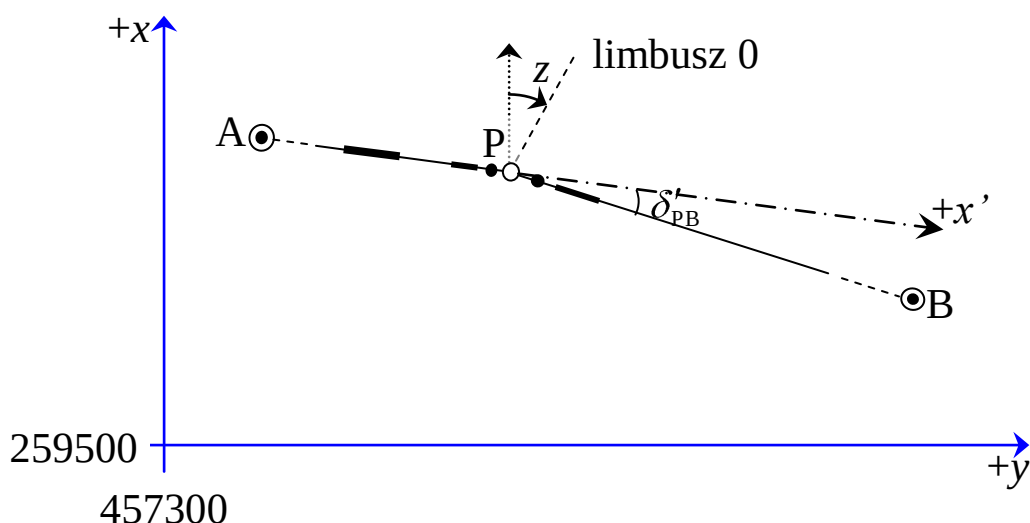
**Projekt szakmai vezetője:
Dr. Mélykúti Gábor dékán**

Copyright © Nyugat-magyarországi Egyetem 2011

Tartalom

10	Hibaellipszis, talpponti görbe és közepes ponthiba	1
10.1	A feladat megfogalmazása	4
10.2	Hibaellipszis, talpponti görbe és közepes ponthiba meghatározása.....	5
10.3	Számpélda	10

10.1 A feladat megfogalmazása



A „Szabad álláspont kiegyenlítése” feladatban meghatároztuk az ábrán látható hálózat P álláspontjának koordinátáit és megbízhatósági mérőszámokat. Utóbbiakat a normál egyenletrendszer inverz mátrixának és a súlyegység középhibájának ismeretében határoztuk meg. A jelen feladatban

meghatározandók:

- a hibaellipszis paraméterei
- a talpponti görbe egyenlete,
- a közepes ponthiba.

megszerkesztendő:

- a hibaellipszis és a talpponti görbe

Leadandók különálló borítólapba foglalva:

- A feladatkiírás és a kiinduló adatok (feladatlapba foglalva),
- Számítások listája a rész- és végeredményekkel együtt,
- a hibaellipszis és a talpponti görbe ábrája

A feladatot, a felhasznált képletekkel, az ábrával és tájékoztató szöveges információkkal együtt – különálló borítólapba foglalva - kézzel írott, vagy Microsoft Word formátumban kell leadni.

10.2 Hibaellipszis, talpponti görbe és közepes ponthiba meghatározása

A konfidencia-intervallum olyan tartomány, amelyre az egységhez tetszőlegesen közel eső β valószínűséggel (konfidencia-szint) állítható, hogy ez a tartomány tartalmazza a sokaság egy paraméterének ismeretlen valódi értékét. A konfidencia-intervallum egyetlen mért mennyiség várható értékére vonatkozóan az

$$\bar{u} - t_\beta \cdot \frac{\mu}{\sqrt{n}} \leq U \leq \bar{u} + t_\beta \cdot \frac{\mu}{\sqrt{n}}$$

vagy az

$$\bar{u} - t_\beta \cdot \mu_{\bar{u}} \leq U \leq \bar{u} + t_\beta \cdot \mu_{\bar{u}} \quad (1)$$

összefüggéssel írható le, ahol $\bar{u}$ - a minta számtani közepe, U - valódi (elméleti várható) érték, μ - középhiba, $\mu_{\bar{u}}$ - a számtani közép középhibája, t_β - a Student-eloszlás táblázatából a β konfidencia-szinthez és az $f = n - 1$ szabadságfokhoz (főls mérésszámhoz) tartozó érték ($F_f(t_\beta) = 1 - \beta/2$, ahol F_f az f szabadságfokú Student-eloszlás függvényt jelöli) akkor, ha a mérési eredmények eloszlása normális.

Az (1) - négyzetre emelés után - egyenértékű az

$$(\bar{u} - U)^2 \leq \mu_{\bar{u}}^2 \cdot t_\beta^2 \quad (1a)$$

vagy, a $\mu_{\bar{u}}^2$ középhiba négyzetnek az összefüggés baloldalra vitele után, a

$$\frac{(\bar{u} - U)^2}{\mu_{\bar{u}}^2} \leq t_\beta^2 \quad (1b)$$

kifejezéssel.

Egy pont sík derékszögű koordinátarendszerben lévő, y és x koordinátákkal becsült helyzetét a kétdimenziós konfidencia-ellipszoiddal, a konfidencia-ellipszissel jellemezhetjük. Ekkor az (1b) képlet $\mu_{\bar{u}}^2$ értékét a pont helyzetét

jellemző $\mathbf{K}_{yx} = \mu_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{yx}$ kovariancia mátrix veszi át. Az (1b)-ben $\mu_{\bar{u}}^2$ a nevezőben

van, így az alábbi összefüggésekben a $\mathbf{Q}_{yx}$ kofaktor (súlykoefficiens) mátrix (illetve a pontok koordinátáira vonatkozó almátrix) inverze szerepel:

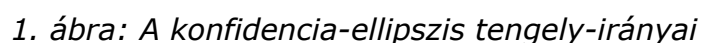
$$(\bar{y} - Y \quad \bar{x} - X) \begin{pmatrix} \mu_0^2 \cdot Q_{yy} & \mu_0^2 \cdot Q_{yx} \\ \mu_0^2 \cdot Q_{yx} & \mu_0^2 \cdot Q_{xx} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \bar{y} - Y \\ \bar{x} - X \end{pmatrix} \leq 2 \cdot F_\beta, \quad (2)$$

ahol

$\bar{y}, \bar{x}$ - az ismeretlen ponthely koordinátáinak becsült értékei,

F_β - az F -eloszlás táblázatából (a β konfidencia-szint, $f_1 = 2$ és $f = n - m$ (főlös mérésszám) szabadságfokok (a 2 a meghatározott, ill. kiválasztott ismeretlenek száma) függvényében kiválasztható együttható akkor, ha a mérési eredmények eloszlása normális.

A konfidencia-ellipszis tengelyei egy olyan y', x' koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamosak, amely az y, x koordináta-rendszerből sík derékszögű koordináta-transzformációval származtatható (1. ábra). Az 1. ábra koordináta-rendszerében a becsült $\hat{P}(\bar{y}, \bar{x})$ ponthelyet tekintjük origónak. A konfidencia-ellipszis egyenlete az y', x' koordináta-rendszerben:



$$\begin{pmatrix} \bar{y}' - Y' & \bar{x}' - X' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{y}' - Y' \\ \bar{x}' - X' \end{pmatrix} \leq 2 \cdot \mu_0^2 \cdot F_\beta \quad (3)$$

A (3) képletben λ_1 és λ_2 a (2a) képletben lévő

$$\mathbf{Q}_{yx} = \begin{pmatrix} Q_{yy} & Q_{yx} \\ Q_{yx} & Q_{xx} \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékei.

A mátrix sajátértékei meghatározhatók a mátrix karakterisztikus egyenletéből. A

$\mathbf{Q}_{yx} = \begin{pmatrix} Q_{yy} & Q_{yx} \\ Q_{yx} & Q_{xx} \end{pmatrix}$ mátrix karakterisztikus egyenlete az alábbi:

$$\left| \lambda \cdot \mathbf{E} - \mathbf{Q}_{yx} \right| = \begin{vmatrix} \lambda - Q_{yy} & -Q_{yx} \\ -Q_{yx} & \lambda - Q_{xx} \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

A (4) képletben a $||$ jelölés determinánst, esetünkben *másodrendű determinánst* jelent, az $\mathbf{E}$ - egységmátrix. A (4) determináns kifejtésével a

$$(\lambda - Q_{yy})(\lambda - Q_{xx}) - Q_{yx}^2 = \lambda^2 - (Q_{yy} + Q_{xx})\lambda + Q_{yy} \cdot Q_{xx} - Q_{yx}^2 = 0 \quad (5)$$

λ - ra nézve másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek megoldásából a keresett λ_1 és λ_2 sajátértékekre kapjuk:

$$\lambda_1 = \frac{Q_{yy} + Q_{xx} - \sqrt{(Q_{yy} - Q_{xx})^2 + 4 \cdot Q_{yx}^2}}{2}, \text{ ill.} \\ \lambda_2 = \frac{Q_{yy} + Q_{xx} + \sqrt{(Q_{yy} - Q_{xx})^2 + 4 \cdot Q_{yx}^2}}{2}. \quad (6)$$

A konfidencia-ellipszis tengelyirányai (az ω szög) az alábbi összefüggéssel határozhatók meg:

$$\operatorname{tg} 2\omega = -\frac{2 \cdot Q_{yx}}{Q_{yy} - Q_{xx}} = \frac{2 \cdot Q_{yx}}{Q_{xx} - Q_{yy}}. \quad (7)$$

Az ω szög úgy értendő, hogy az X tengely pozitív féltengelye legyen az óramutató járásával megegyezően ω szöggel az X' tengely pozitív féltengelyébe forgatva. Annak meghatározásához, hogy ω melyik tér negyedben van, figyelembe kell venni a számláló, illetve a nevező előjelét.

A (3) összefüggésben kijelölt mátrix-szorzás elvégzése után – az egyenlőtlenség jelétől most eltekintve – a konfidencia-ellipszis

$$\frac{\left(\bar{y}' - Y'\right)^2}{2 \cdot \mu_0^2 \cdot F_\beta \cdot \lambda_1} + \frac{\left(\bar{x}' - X'\right)^2}{2 \cdot \mu_0^2 \cdot F_\beta \cdot \lambda_2} \leq 1 \quad (8)$$

alakú egyenletéhez jutunk. A konfidencia-ellipszis féltengelyeinek hosszát a (8) összefüggés nevezői határozzák meg:

$$a = \mu_0 \cdot \sqrt{2 \cdot F_\beta \cdot \lambda_2} \quad \text{és} \quad b = \mu_0 \cdot \sqrt{2 \cdot F_\beta \cdot \lambda_1}. \quad (9)$$

A (9) képletekben az *F-eloszlás* táblázatbeli értéke szerepel, így a konfidencia-ellipszis féltengelyeinek hossza a *β konfidencia-szint* megválasztásától függ.

Az $f = n - m$ (főlős mérésszám) szabadságfok függvényében adott konfidencia-szinten az ellipszis féltengelyeinek hossza meghatározható és fordítva, adott féltengely-hosszak mellett számítható az a valószínűség, amellyel a féltengelyekkel meghatározott ellipszis a pont ismeretlen valódi értékét lefedi. Az 1. táblázatban az $a = 3 \cdot \mu_0 \cdot \sqrt{\lambda_2}$, $a = 2 \cdot \mu_0 \cdot \sqrt{\lambda_2}$ és $a = \mu_0 \cdot \sqrt{\lambda_2}$ értékekhez tartozó valószínűségek találhatók, az $f = n - m$ függvényében, vagyis azok a valószínűségek, amelyekre a $\sqrt{2 \cdot F_\beta}$ érték rendre 3, 2, ill. 1-gyel egyenlő. Látjuk, hogy elméletileg végtelen számú mérést feltételezve ($f = \infty$), az $a = \mu_0 \cdot \sqrt{\lambda_2}$ és $b = \mu_0 \cdot \sqrt{\lambda_1}$ féltengelyekkel megadott konfidencia-ellipszis a pont ismeretlen valódi helyét $\approx 39\%$ -os valószínűséggel fedi le. Ezt a konfidencia-ellipszist standard hibaellipszisnek (2. ábra) nevezzük.

A $\mu_y = \mu_0 \cdot \sqrt{Q_{yy}} = \mu_0 \cdot \sqrt{\lambda_2}$ és a $\mu_x = \mu_0 \cdot \sqrt{Q_{xx}} = \mu_0 \cdot \sqrt{\lambda_1}$ koordináta-középhibák az y és az x tengelyek irányában fejezik ki a pont megbízhatóságát. A hibaellipszis azt feltételezi, hogy a pont ismeretlen valódi helye a becsült ponthelyzettől tetszőleges irányba eshet.

A becsült ponthelyzet középhibáját tetszőleges γ' irányban a talpponti görbe (2. ábra) adja meg, amelynek egyenlete a vesszős koordinátarendszerben az alábbi:

$$\mu_s^2 = \mu_0^2 \cdot \left(\lambda_1 \cdot \sin^2 \gamma' + \lambda_2 \cdot \cos^2 \gamma' \right). \quad (10)$$

A (10) képletben $\gamma' = \gamma - \omega$.

10.3 Számpélda

A „Szabad álláspont kiegyenlítése” feladatban meghatároztuk a

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1,97039 & -0,08673 & -0,12550 \\ -0,08673 & 2,06620 & 0,99512 \\ -0,12550 & 0,99512 & 5,60000 \end{pmatrix}$$

normál egyenletrendszer

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{N}_{3,3}^{-1} = \frac{\text{adj} \mathbf{N}_{3,3}}{\det \mathbf{N}_{3,3}} = \begin{pmatrix} 0,50881 & 0,01735 & 0,00832 \\ 0,01735 & 0,52987 & -0,09377 \\ 0,00832 & -0,09377 & 0,19542 \end{pmatrix}$$

inverzét, a súlyegység

$$\mu_0 = \pm 7,6$$

közéhibáját és az ismeretlenek kiegyenlítés utáni közéhibáit:

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{z}}} = \mu_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}} ; \quad \begin{aligned} \mu_{\hat{x}_1} &= \mu_0 \cdot \sqrt{Q_{11}} = \pm 7,6'' \cdot \sqrt{0,50881} = \pm 5,4 \text{ mm}, \\ \mu_{\hat{x}_2} &= \mu_0 \cdot \sqrt{Q_{22}} = \pm 7,6'' \cdot \sqrt{0,52987} = \pm 5,5 \text{ mm}, \\ \mu_{\hat{x}_3} &= \mu_0 \cdot \sqrt{Q_{33}} = \pm 7,6'' \cdot \sqrt{0,19542} = \pm 3,4'' . \end{aligned}$$

A $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{N}_{3,3}^{-1}$ inverz mátrix y és x koordinátákra vonatkozó almátrixa:

$$\mathbf{Q}_{yx} = \begin{pmatrix} 0,50881 & 0,01735 \\ 0,01735 & 0,52987 \end{pmatrix}$$

$$\text{tg} 2\omega = \frac{2 \cdot Q_{yx}}{Q_{xx} - Q_{yy}} = \frac{2 \cdot 0,01735}{0,52987 - 0,50881} = 1,64767 ,$$

ahonnan $\omega = 29 - 22 - 23,4$.

A mátrix sajátértékei:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{Q_{yy} + Q_{xx} - \sqrt{(Q_{yy} - Q_{xx})^2 + 4 \cdot Q_{yx}^2}}{2} = \\ &= \frac{0,50881 + 0,52987 - \sqrt{(0,50881 - 0,52987)^2 + 4 \cdot 0,01735^2}}{2} \\ &= \frac{1,03868 - \sqrt{0,02106^2 + 0,0012041}}{2} = \frac{1,03868 - 0,04059}{2} = 0,49904 \\ \lambda_2 &= \frac{Q_{yy} + Q_{xx} + \sqrt{(Q_{yy} - Q_{xx})^2 + 4 \cdot Q_{yx}^2}}{2} = \frac{1,03868 + 0,04059}{2} = 0,53963.\end{aligned}$$

A standard hibaellipszis féltengelyeinek hossza $\sqrt{2 \cdot F_\beta} = 1$ esetén:

$$a = \mu_0 \cdot \sqrt{\lambda_2} = 7,6 \cdot \sqrt{0,53963} \approx 5,6 \text{ mm},$$

$$b = \mu_0 \cdot \sqrt{\lambda_1} = 7,6 \cdot \sqrt{0,49904} \approx 5,4 \text{ mm}.$$

A talpponti görbe egyenlete (a vesszős koordinátarendszerben):

$$\mu_s^2 = \mu_0^2 \cdot (\lambda_1 \cdot \sin^2 \gamma' + \lambda_2 \cdot \cos^2 \gamma') = 57,8 \cdot (0,49904 \cdot \sin^2 \gamma' + 0,53963 \cdot \cos^2 \gamma').$$

A közepes ponthiba:

$$M = \mu_0 \cdot \sqrt{Q_{yy} + Q_{xx}} = \mu_0 \cdot \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2} = \pm 7,6 \cdot \sqrt{0,50881 + 0,52987} \approx \pm 7,75 \text{ mm}.$$

Irodalomjegyzék

Bácsatyai László: Kiegyenlítő számítások, elektronikus jegyzet pdf formátumban,
NYME Geoinformatikai Kar, Székesfehérvár ,
http://www.geo.info.hu/geodezia/index.php?option=com_content&task=view&id=27&Itemid=42

Nyugat-magyarországi Egyetem Geoinformatikai Kar

Dr. Bácsatyai László

MATEMATIKAI GEODÉZIAI SZÁMÍTÁSOK

MGS-11

11 Geoidkép meghatározása csillagászati szintezéssel

SZÉKESFEHÉRVÁR

2011

**Jelen szellemi terméket a szerzői jogról szóló 1999. évi LXXVI. törvény védi.
Egészének vagy részeinek másolása, felhasználás kizárólag a szerző írásos engedélyével lehetséges.**

Ez a modul a
TÁMOP - 4.1.2-08/1/A-2009-0027 „Tananyagfejlesztéssel a GEO-ért” projekt
keretében készült.

A projektet az EU és a Magyar Állam 44 706 488 Ft összegben támogatta.

**Lektor:
Dr. Benedek Judit**

**Projektvezető:
Dr. h.c. Dr. Szepes András**

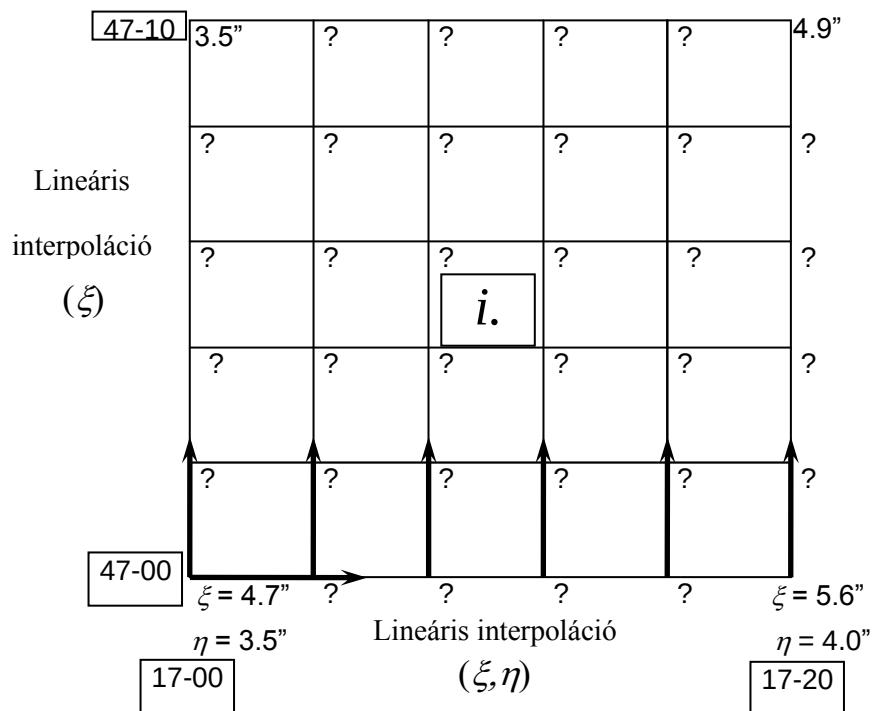
**Projekt szakmai vezetője:
Dr. Mélykúti Gábor dékán**

Copyright © Nyugat-magyarországi Egyetem 2011

Tartalom

11	Geoidkép meghatározása csillagászati szintezéssel.....	1
11.1	A feladat megfogalmazása.....	5
11.2	A csillagászati szintezés	7
11.3	Számpélda	12

11.1 A feladat megfogalmazása



Fokhálózati sarokpontokban, az ábrán látható módon φ irányban 10', λ irányban 20' kiterjedéssel adottak a meridián irányú ξ és a harántirányú η függővonal-elhajlás - értékek. Feladat a sarokpontok által definiált i . sorszámú 10'*20' téglalapon belül szerkesztendő 5*5-ös rács pontjaira a függővonal-elhajlás értékek lineáris interpolálása, a rádspontokban a geoidunduláció-értékek meghatározása és – a rádspontok Egységes Országos Vetületbe történő átszámítása után - geoidunduláció térkép (geoidkép) szerkesztése.

Megjegyzés: a feladat fiktív, nem a valóságból vett függővonal-elhajlás értékeket tartalmaz.

Meghatározandók:

- az 5*5-ös rácsban interpolált ξ meridián irányú függővonal-elhajlások,
- az alsó vonalra interpolált η haránt irányú függővonal-elhajlások,
- geoidunduláció értékek az 5*5-ös rácsháló minden pontjában,
- a rádspontok EOY-koordinátái,
- az azonos geoidunduláció értékű izovonalak ábrája, a geoidunduláció-térkép (geoidkép)

Az η haránt irányú függővonal-elhajlások interpolációját csak az alsó rácsvonalra kell elvégezni.

Leadandók különálló borítólapba foglalva:

- a feladatkiírás és a kiinduló adatok (feladatlapba foglalva),
- a számítások bemutatása táblázatos formában,
- a méretarány-helyes 5*5-ös EOVRácsháló a rácspontokhoz írt ξ és η értékekkel,
- a méretarány-helyes 5*5-ös EOVRácsháló a rácspontokhoz írt geoidunduláció értékekkel,
- a méretarány-helyes 5*5-ös EOVRácshálóban szerkesztett geoidunduláció-térkép,
- műszaki leírás

A feladatot, a felhasznált képletekkel és tájékoztató szöveges információkkal együtt – különálló borítólapba foglalva - kézzel írott és rajzolt, vagy Microsoft Word formátumban kell leadni.

11.2 A csillagászati szintezés

A csillagászati szintezés: geoidundulációk meghatározása geometriai eszközökkel.

A geoidunduláció (a valódi és a normál nehézségi erőter azonos potenciálértékű ($W(P')=U(P_0)=W_0$) szintfelületeinek távolsága) az

$$N_p = \frac{T_{p'}}{\gamma_{p_0}}$$

Bruns-féle képlettel fejezhető ki.

$T_{p'} = W_0 - U_0$ - a potenciálzavar értéke a földfelszíni P pont P' geoidi megfelelőjében,

γ_{p_0} - a normál nehézségi erő értéke a P_0 pontban, az ellipszoid felületén.

A képlet fizikai értelme: a potenciálzavar – a potenciálhoz hasonlóan – munkajellegű mennyiség, a munka = erő * út, így munka / (nehézségi) erő = út (távolság).

A továbbiakban a geoid meghatározásának geometriai módszerét vázoljuk, mely eljárásban mind a geoidot, mind a vonatkozási ellipszoidot geometriai felületként kezeljük.

Mivel a potenciálzavart nem ismerjük, a geoidunduláció fenti képletét át kell alakítani. Az egyszerűsítés miatt a továbbiakban a P indexet elhagyjuk. A Bruns-féle képletnek a geoid felületén lévő P' pontból kiinduló tetszőleges α azimutú s íve mentén vett $\frac{dN}{ds}$ első deriváltja megadja a geoidunduláció változását az s ív mentén. E derivált értéke a függővonal-elhajlás s irányú összetevője:

$$\frac{dN}{ds} = \mathcal{G}.$$

A ξ meridián- és η haránt-irányú összetevőkre:

$$\frac{dN}{d\varphi} = \xi \quad \text{és} \quad \frac{dN}{d\lambda} = \eta.$$

A fenti összefüggések integrálásával általános esetben

$$N_{(s)} = \int \mathcal{G} \cdot ds^*,$$

* Itt a $\mathcal{G}$ Pizetti-féle függővonal-elhajlás. A zárójelbe tett indexek ugyanazon geoid-unduláció számítási módjára utalnak.

a meridián- és a haránt-irányú összetevők esetén:

$$N_{(\varphi)} = \int \xi \cdot d\varphi \quad \text{és} \quad N_{(\lambda)} = \int \eta \cdot d\lambda .$$

A geoidmeghatározáshoz elvileg olyan sűrűségben kellene a ξ és η értékek, hogy a szomszédos pontok közötti változásuk már lineárisnak legyen tekinthető. Ez azt jelenti, hogy a terepviszonyoktól függően néhány km-enként (2-25 km) kellene ismerni a ξ és η értékeket. Ha ilyen sűrűségben ismerjük a függővonal-elhajlások értékeit a geoid valamilyen azimutú metszete (szelvénye) mentén, úgy az integrálokat a Σ jellel, azaz algebrai összegzéssel helyettesíthetjük (numerikus integrálás). Valamilyen adott N_0 geoidundulációjú pontból kiindulva, az i -ik geoidundulációt a kezdő ponthoz képest az

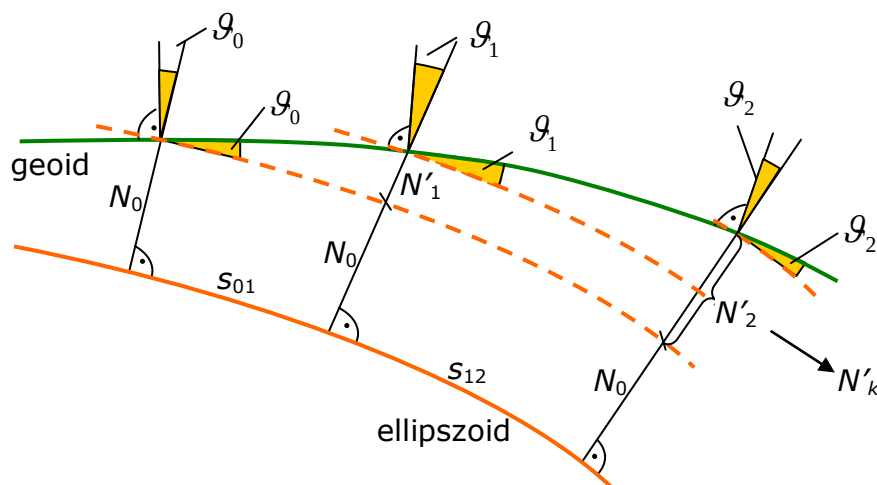
$$N'_i = \sum_1^k \vartheta_{i-1} \cdot s_{i-1,i} .$$

összefüggésből számíthatjuk.

A végrehajtás lényegét az alábbi ábrán követhetjük nyomon.

Az ismert függővonal-elhajlású pontok olyan közel helyezkednek el egymáshoz, hogy a geoid, ill. az ellipszoid közöttük lévő ívei egyeneseknek, az N'_i (az ábrán csak az N'_1 és N'_2 láthatók) szemközti befogójú, a befogóval szemben lévő ϑ igen kis hegyesszögű háromszögek derékszögűeknek tekinthetők. A kis szögek miatt

$$N'_1 = \vartheta_0 \cdot s_{0,1}, \quad N'_2 = \vartheta_0 \cdot s_{0,1} + \vartheta_1 \cdot s_{1,2}, \quad \dots, \quad N'_k = \vartheta_0 \cdot s_{0,1} + \vartheta_1 \cdot s_{1,2} + \dots + \vartheta_{k-1} \cdot s_{k-1,k} .$$



Mivel a függővonal-elhajlás gyorsan változik, célszerű a ϑ_{i-1} mennyiségek helyett a fenti képletekbe a

$$\vartheta_{i-1,i} = \frac{1}{2} \cdot (\vartheta_{i-1} + \vartheta_i)$$

középértékeket helyettesíteni.

A kezdő pont ismert N_0 értékét az N'_i értékekhez még hozzá kell adnunk:

$$N_i = N'_i + N_0.$$

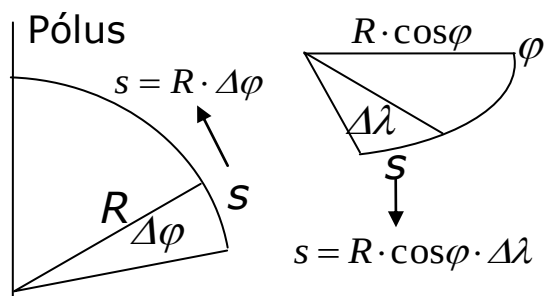
Az N_0 értékét általában önkényesen választják meg, pl. egy hálózati kezdőpontban 0-nak. Ezért egy geoidunduláció-térkép mindig relatív, s természetesen függ a vonatkoztatási ellipszoidunktól. Mivel a függővonal elhajlások meghatározása gyakorlatilag csak a szárazföldeken végezhető el, ezért a csillagászati szintezés módszerével a geoidnak csak helyi felületdarabjai határozhatók meg.

A csillagászati szintezés fontos követelménye, hogy a tervezett szelvények mentén a képletek alkalmazhatóságához elegendő számú pontban ismerjük a függővonal-elhajlásokat. Mivel a mind a szintfelületi, mind az ellipszoidi koordinátákkal rendelkező csillagászati pontok (az ún. Laplace-pontok) egymástól való távolsága nagy, azokat megfelelő módszerrel sűríteni kell¹.

A szelvényeket rendszerint észak-dél (meridián-), vagy kelet-nyugat (haránt-) irányban jelölik ki. A meridián és a haránt irányú függővonal-elhajlások a földrajzi koordináták függvényében (nagy görög betűk: szintfelületi koordináták, kis görög betűk: ellipszoidi koordináták)

$$\xi = \Phi - \varphi$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cdot \cos \varphi$$



Az s ívhosszakat ilyenkor – mint az ábrán látható – a szelvény menti szomszédos pontok szélesség-, ill. hosszúságkülönbségeinek és a földgömb sugarának, vagy a szélességi kör sugarának szorzataiként célszerű kifejezni.

¹ Régebben a csillagászati-geodéziai mérések igen időigényesek voltak, ezért csak viszonylag kevés számú függővonal elhajlás adat állt rendelkezésre a geoidundulációk számításához (Magyarországon pl. mindössze 138 ilyen ún. asztrogeodéziai pont van). Azonban az új mérési technológiákat (CCD érzékelők, modern képfeldolgozó algoritmusok) alkalmazó számítógép vezérelt műszerek (pl. zenitkamerák) segítségével a mérés és az adatfeldolgozás jelentősen gyorsítható, ill. a pontosság növelhető, ami a geometriai geoidmeghatározás újjáéledését jelentheti a közeljövőben (Gerstbach, 1996a,b, Hirt and Flury, 2008, Hirt et al, 2010).

A számítások munkaképletei:

$$N'_{(\varphi)} = c \cdot \sum_{i=0}^k (\xi_i + \xi_{i+1}) \cdot \Delta\varphi,$$

$$N'_{(\lambda)} = c \cdot \sum_{i=0}^k (\eta_i + \eta_{i+1}) \cdot \Delta\lambda \cdot \cos\varphi.$$

A képletekben:

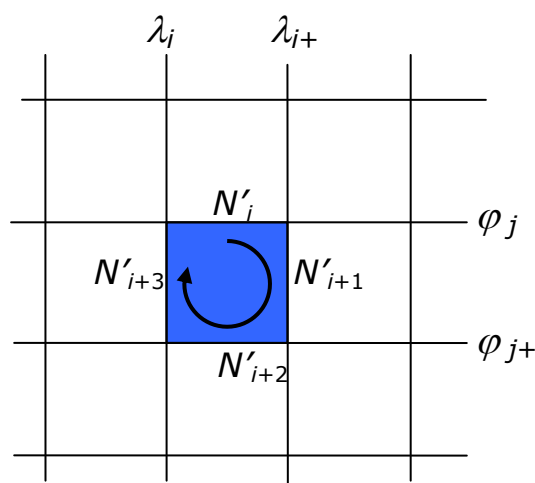
$$\Delta\lambda = \lambda_{i+1} - \lambda_i, \quad \Delta\varphi = \varphi_{i+1} - \varphi_i$$

$$c = 10^5 \cdot \frac{R}{2 \cdot \rho' \cdot \rho''} = 0,45 \text{ cm} \quad \{R = 6378 \text{ km}; \rho' = 3437,8'; \rho'' = 20626 5''.\}$$

A ξ_i és η_i , a ξ_{i+1} és η_{i+1} értékei ''-ben, a $\Delta\varphi$ és $\Delta\lambda$ értékei '-ben értendők. E helyettesítésekkel az N értékeit cm dimenzióban kapjuk.

$$N = N'_{(\varphi)} + N_0; \quad N = N'_{(\lambda)} + N_0; \quad N_0 = 0 \text{ esetén } N = N'_{(\varphi)} = N'_{(\lambda)}.$$

Az eddigi gyakorlat szerint csillagászati szintezéssel nagyobb területre geoidképet úgy határoznak meg, hogy először megfelelő sűrűségű hosszúsági és szélességi vonalak metszéspontjaiban (gyakorlatilag négyzethálózat sarokpontjaiban) meghatározzák a ξ és az η függővonal-elhajlás összetevők értékét. Ezt követően a szélességi vonalak mentén az η összetevők-, a hosszúsági vonalak mentén pedig a ξ összetevők felhasználásával számítják a geoid metszeteket.



A hagyományos szintezési poligonokhoz hasonlóan, egy zárt négyzetben az egyik sarokpontból kiindulva, majd ugyanoda visszatérve, ugyanazt a geoidunduláció-értéket kellene kapnunk:

$$N'_i + N'_{i+1} + N'_{i+2} + N'_{i+3} = 0.$$

Miután ez nem teljesül, a rács egészére a feltételes mérések módszere szerinti kiegyenlítést célszerű alkalmazni. A kiegyenlített geoidunduláció-értékek között az interpolálással kapott azonos, kerek értékű geoidundulációkból - a szintvonal-szerkesztéshez hasonlóan – grafikusán, vagy számítógépes szoftverrel izovonalas geoidunduláció-térképeket készítenek.

11.3 Számpélda

Feladat ismertetése:

Az egyes téglalapok közepén lévő sorszámok szerint egy-egy 10'×20' téglalapon belül szerkesztendő 5×5-ös rács pontjaira a függővonal-elhajlás értékek lineáris interpolálása, a rádspontokban a geoidunduláció-értékek meghatározása és geoidunduláció térkép (geoidkép) szerkesztése.

Adottak a sarokpontok földrajzi (φ , λ) koordinátái az IUGG67 ellipszoidon, ahol a függővonal elhajlási értékeket meghatározták (ξ , η). A pontosabb meghatározás érdekében, a sarokpontok közötti térben több hálópontot is meghatároztunk. Ez a művelet interpolálással oldható meg.

Az interpolálás eredményei:

$\varphi= 46-30-00$	INTERPOLÁCIO						$\varphi= 46-30-00$
$\lambda= 17-40-00$	$\xi=-2,6$	-1.0	0.6	2.3	3.9	5.5	$\lambda= 17-40-00$
	-1.4	-0.4	0.7	1.8	2.9	3.9	
	-0.2	0.3	0.8	1.3	1.8	2.3	
	0.9	0.9	0.9	0.8	0.8	0.8	
	2.1	1.5	0.9	0.4	-0.2	-0.8	
$\varphi= 46-20-00$							$\varphi= 46-20-00$
$\lambda= 17-20-00$	$\xi=3,3$	2.2	1.0	-0.1	-1.3	-2.4	$\lambda= 17-40-00$
	$\eta=2,3$	1.6	0.8	0.1	-0.7	-1.4	

A megadott képleteket alkalmazva, a rádspontokban kiszámíthatók a geoidundulációk:

$$N'_{(\varphi)} = c \cdot \sum_{i=0}^k (\xi_i + \xi_{i+1}) \cdot \Delta\varphi,$$

$$N'_{(\lambda)} = c \cdot \sum_{i=0}^k (\eta_i + \eta_{i+1}) \cdot \Delta\lambda \cdot \cos\varphi.$$

$$c = 10^5 \cdot \frac{R}{2 \cdot \rho' \cdot \rho''} = 0,45 \text{ cm} \quad \{R = 6378 \text{ km}; \rho' = 3437,8'; \rho'' = 20626 5''.\}$$

$$N = N'_{(\varphi)} + N_0; \quad N = N'_{(\lambda)} + N_0; \quad N_0 = 0 \text{ esetén } N = N'_{(\varphi)} = N'_{(\lambda)}.$$

Eredmények:

GEOIDUNDULÁCIÓ					
3.15	10.10	15.23	18.51	19.96	19.55
6.77	11.30	14.01	14.87	13.90	11.07
8.26	11.37	12.65	12.09	9.69	5.44
7.63	10.31	11.16	10.16	7.33	2.65
4.88	8.12	9.53	9.09	6.82	2.70
0.00	4.80	7.76	8.88	8.16	5.60

Az alsó sor geoidunduláció értékei az alsó sor sarokpontjai közötti η szerinti interpoláció után az

$$N'_{(\lambda)} = c \cdot \sum_{i=0}^k (\eta_i + \eta_{i+1}) \cdot \Delta\lambda \cdot \cos\varphi$$

képlet szerinti számítás eredményei, a többi geoidundulációt a

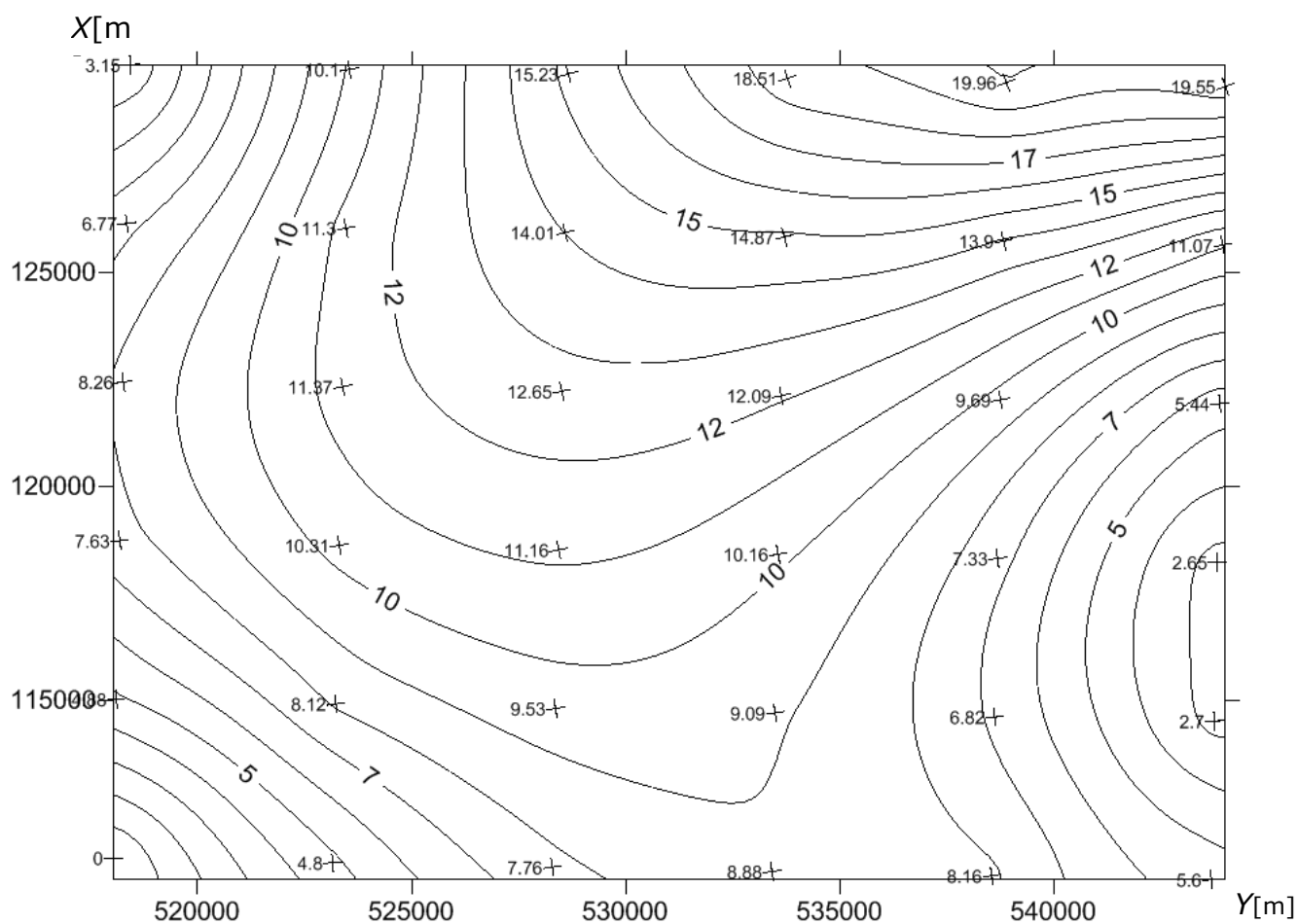
$$N'_{(\varphi)} = c \cdot \sum_{i=0}^k (\xi_i + \xi_{i+1}) \cdot \Delta\varphi$$

képlet alapján, a ξ interpoláció eredményeként kaptuk.

Ezen értékeket egy geoidundulációs térképen kellett ábrázolni EOVS rendszerben. A földrajzi koordináták EOVS-be való átszámításához a HungaPro 3.31. programot használtuk.

Pontszám	φ	λ	Y	X	N geoidunduláció
01	46-20-00	17-20-00	518023.523	111319.657	0
02	46-20-00	17-24-00	523155.599	111209.194	4.8
03	46-20-00	17-28-00	528287.771	111103.124	7.76
04	46-20-00	17-32-00	533420.037	111001.412	8.88
05	46-20-00	17-36-00	538552.389	110904.103	8.16
06	46-20-00	17-40-00	543684.798	110811.163	5.6
07	46-22-00	17-20-00	518104.828	115024.125	4.88
08	46-22-00	17-24-00	523233.743	114913.733	8.12
09	46-22-00	17-28-00	528362.756	114807.730	9.53
10	46-22-00	17-32-00	533491.857	114706.083	9.09
11	46-22-00	17-36-00	538621.041	114608.836	6.82
12	46-22-00	17-40-00	543750.311	114515.953	2.7
13	46-24-00	17-20-00	518186.132	118728.586	7.63
14	46-24-00	17-24-00	523311.890	118618.270	10.31
15	46-24-00	17-28-00	528437.739	118512.327	11.16
16	46-24-00	17-32-00	533563.677	118410.747	10.16
17	46-24-00	17-36-00	538689.705	118313.564	7.33
18	46-24-00	17-40-00	543815.822	118220.739	2.65
19	46-26-00	17-20-00	518267.430	122433.034	8.26
20	46-26-00	17-24-00	523390.032	122322.796	11.37
21	46-26-00	17-28-00	528512.719	122216.929	12.65
22	46-26-00	17-32-00	533635.502	122115.419	12.09
23	46-26-00	17-36-00	538758.369	122018.287	9.69
24	46-26-00	17-40-00	543881.326	121925.515	5.44
25	46-28-00	17-20-00	518348.731	126137.488	6.77
26	46-28-00	17-24-00	523468.173	126027.319	11.3
27	46-28-00	17-28-00	528587.705	125921.529	14.01
28	46-28-00	17-32-00	533707.326	125820.075	14.87
29	46-28-00	17-36-00	538827.026	125722.996	13.9
30	46-28-00	17-40-00	543946.826	125630.289	11.07
31	46-30-00	17-20-00	518430.030	129841.974	3.15
32	46-30-00	17-24-00	523546.316	129731.855	10.1
33	46-30-00	17-28-00	528662.690	129626.112	15.23
34	46-30-00	17-32-00	533779.143	129524.722	18.51
35	46-30-00	17-36-00	538895.695	129427.706	19.96
36	46-30-00	17-40-00	544012.329	129335.059	19.55

Az alábbi geoidundulációs térkép AutoCAD programmal készült:



Végezetül, ebben a modulban köszönöm meg lektorom, Dr. Benedek Judit minden részletre kiterjedő, figyelmemet elsősorban a matematikai jellegű hiányosságokra felhívó munkáját. Kritikai észrevételeit igyekeztem a lehető legteljesebb mértékben figyelembe venni. A kiküszöbölt hiányosságok Dr. Benedek Judit érdemei, ha valami mégis bent maradt, az én hibám.

Székesfehérvár, 2011. 02. 27.

Dr. Bácsatyai László

Irodalomjegyzék

Bácsatyai László: Felsőgeodézia, elektronikus jegyzet pdf formátumban, NYME Geoinformatikai Kar, Székesfehérvár ,

http://www.geo.info.hu/geodezia/index.php?option=com_content&task=view&id=27&Itemid=42

Hirt C. Flury J. (2008): Astronomical-topographic levelling using high-precision astrogeodetic vertical deflections and digital terrain model data. Journal of Geodesy 82, pp. 231-248.

C Hirt, B Bürki, A Somieski, G Seeber (2010): Modern Determination of Vertical Deflections Using Digital Zenith Cameras, Journal of Surveying Engineering, Vol. 136, No. 1, February 2010, pp. 1-12

G. Gerstbach (1996a): How to get an European centimeter geoid ("astro-geological geoid"), Physics and Chemistry of the Earth, Volume 21, Issue 4, Pages 343-346.

G. Gerstbach (1996b): The astro-geodetic use of CCD for gravity field refinement, Physics and Chemistry of the Earth, Volume 21, Issue 4, Pages 347-351.

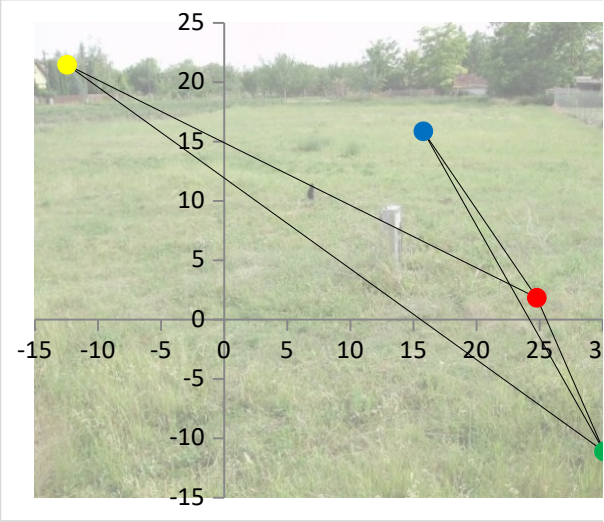
1	1
2	2
3	3
6	6

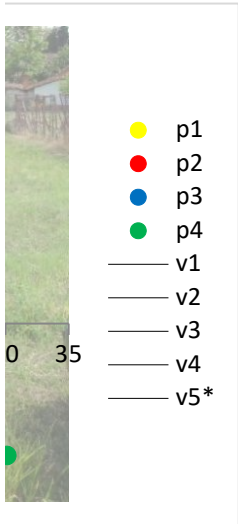
		1,7	1,4			
		2,4	8,2			
1,8	5,6	16,5	48,44	16,5	8,57	8,28
2,5	1,8	8,57	18,26	48,44	18,26	12,42
3,6	0,9	8,28	12,42			

	X	Y
p1	-12,45	21,47
p2	24,78	1,84
p3	15,78	15,87
p4	30,1	-11,11

Második adatkészlet (Ctrl+C majd Ctrl+V)		
	X	Y
p1	-10	15
p2	-10	-10
p3	25	15
p4	25	-10

VONALAK		
	X	Y
v1	-12,45	21,47
	24,78	1,84
v2	24,78	1,84
	15,78	15,87
v3	15,78	15,87
	30,1	-11,11
v4	30,1	-11,11
	-12,45	21,47
v5*	24,78	1,84
	30,1	-11,11





alapadatok		
11	21	31
12	22	32
13	23	33

relatív		
11	21	31
12	22	32
13	23	33

abszolút		
11	11	11
11	11	11
11	11	11

vegyes		
11	11	11
12	12	12
13	13	13

vegyes		
11	21	31
11	21	31
11	21	31

$$2 \quad 4,333333 = A1^2/A2 \cdot A3 + A4 - A5$$

$$3 \quad 0,444444 = (A1^2)/(A2 \cdot (A3 + (A4 - A5)))$$

4

5

6