



ÓBUDAI EGYETEM  
ÓBUDA UNIVERSITY

Alba Regia Műszaki Kar

Geoinformatikai/Mérnöki/  
Természettudományi és Szoftvertchnológiai Intézet

# **SZAKDOLGOZAT**

**Ipari létesítmény üzemeltetéséhez szükséges  
geodéziai adatbázis korszerűsítése**

**OE-AMK**

Flam Dániel

**2023**

T00586/FI12904/A-G



ÓBUDAI EGYETEM  
ÓBUDA UNIVERSITY

Óbudai Egyetem  
Alba Regia Műszaki Kar  
Geoinformatikai Intézet

## SZAKDOLGOZAT FELADATLAP

Hallgató neve: Flam Dániel

Szakdolgozat száma: [REDACTED]

Törzskönyvi száma: T000586/FI12904/A-G

Neptun kódja: [REDACTED]

Szak: földmérő és földrendező mérnök

Specializáció: Geoinformatika specializáció

**A dolgozat címe:** Ipari létesítmény üzemeltetéséhez szükséges geodézia adatbázis korszerűsítése

**A dolgozat címe angolul:** Upgrading Industrial Park Supporting Geodatabase

**A feladat részletezése:**

1. Ismertessen egy mintaterületet, ahol egy kiterjedt ipari létesítmény korábbi geodéziai munkáinak adatai rendelkezésre állnak!
2. Ismertesse a rendelkezésre álló adatokat!
3. Ismertesse a probléma megoldása során felmerülő transzformációs problémákat!
4. Ismertesse a felmerülő vetülettani problémákat!

**Intézményi konzulens neve:** Molnár Gábor Péter

**A kiadott téma elévülési határideje:** 2026. 02. 10.

**Beadási határidő:** 2023. 12. 15.

A szakdolgozat: Nem titkos.

Kiadva: Székesfehérvár, 2023. 10. 24.



[Handwritten signature]

Intézetigazgató

A dolgozatot beadásra alkalmasnak találok: 2023. 12. 15.

[Handwritten signature]

belső konzulens

külső konzulens



ÓBUDAI EGYETEM  
ÓBUDA UNIVERSITY

Alba Regia Műszaki Kar  
Geoinformatikai/Mérnöki/  
Természettudományi és Szoftvertechnológiai Intézet

## HALLGATÓI NYILATKOZAT

Alulírott hallgató kijelentem, hogy a szakdolgozat/diplomamunka saját munkám eredménye, a felhasznált szakirodalmat és eszközöket azonosíthatóan közöltem. Az elkészült szakdolgozat/diplomamunkában található eredményeket az egyetem és a feladatot kiíró intézmény saját céljára térítés nélkül felhasználhatja, a titkosításra vonatkozó esetleges megkötések mellett.

Kelt: Székesfehérvár, 2023. december 12.

  
.....  
hallgató aláírása

# 1. TARTALOMJEGYZÉK

|       |                                                                      |    |
|-------|----------------------------------------------------------------------|----|
| 1.    | Tartalomjegyzék .....                                                | 4  |
| 1.    | Bevezetés .....                                                      | 1  |
| 1.1   | A munkaterület bemutatása.....                                       | 2  |
| 1.2   | Vetületek és transzformációk.....                                    | 3  |
| 1.2.1 | Sztereografikus Vetület.....                                         | 3  |
| 1.2.2 | EOV (Egyesített Országos Vetület).....                               | 4  |
| 1.2.3 | ETRS89 és az OGPSH.....                                              | 5  |
| 1.2.4 | EHT és VITEL.....                                                    | 6  |
| 1.2.5 | A választott vetület .....                                           | 7  |
| 2.    | A kiinduló adatok bemutatása.....                                    | 8  |
| 2.1   | Analóg térképek .....                                                | 8  |
| 2.2   | Alappontok.....                                                      | 9  |
| 2.3   | Helyszíni mérések .....                                              | 12 |
| 3.    | Módszerek.....                                                       | 17 |
| 3.1   | Felhasznált szoftverek bemutatása a felhasználás szempontjából ..... | 17 |
| 3.1.1 | GNU Octave .....                                                     | 17 |
| 3.1.2 | GeoEasy és GNU GAMA hálózatkiegyenlítő modul.....                    | 17 |
| 3.1.3 | GeoZseni.....                                                        | 17 |
| 3.1.4 | QGIS és GDAL modul .....                                             | 18 |
| 3.1.5 | PROJ .....                                                           | 18 |
| 3.1.6 | ZWCAD és AUTOLISP rutinok.....                                       | 18 |
| 3.2   | Vetületek közötti átváltás módszerei .....                           | 19 |

|       |                                                                                                                                       |    |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.2.1 | Archív térképek georeferálása .....                                                                                                   | 19 |
| 3.2.2 | Vetületek közti átszámítások transzformációs paraméterekkel, paraméterek meghatározása mindkét rendszerben ismert pontok alapján..... | 22 |
| 3.3   | Poláris mérések feldolgozása általános geodéziai szoftverekkel .....                                                                  | 26 |
| 3.3.1 | Feldolgozás Geozseni szoftverrel .....                                                                                                | 26 |
| 3.3.2 | Feldolgozás GeoEasy szoftverrel.....                                                                                                  | 27 |
| 3.4   | Térképezés CAD környezetben a georeferált analóg térképekről és helyszíni felmérésekből.....                                          | 28 |
| 4.    | Eredmények .....                                                                                                                      | 31 |
| 4.1   | Georeferált archív térképek.....                                                                                                      | 31 |
| 4.2   | Transzformációs paraméterek .....                                                                                                     | 33 |
| 4.3   | Alapponthálózat .....                                                                                                                 | 35 |
| 4.4   | Korszerű térképi adatbázis .....                                                                                                      | 36 |
| 5.    | Diszkusszió .....                                                                                                                     | 38 |
| 6.    | Összefoglaló.....                                                                                                                     | 44 |
| 7.    | Summary.....                                                                                                                          | 45 |
| 8.    | Irodalomjegyzék és forrásjegyzék .....                                                                                                | 46 |
| 9.    | Ábrajegyzék .....                                                                                                                     | 47 |
| 10.   | Táblajegyzék.....                                                                                                                     | 49 |
| 11.   | Köszönetnyilvánítás.....                                                                                                              | 50 |
| 12.   | Függelék.....                                                                                                                         | 51 |

## 1. BEVEZETÉS

Szakdolgozatom célja, hogy bemutassam, miként lehet régi vetületű, papír alapú térképek adataiból korszerű adatbázist készíteni. Emellett bemutatom, hogyan lehet a mai technológiában is használni korábbi vetületeket, kapcsolatot teremteni ezek és a műholdas helymeghatározásban és térinformatikában használatos WGS84 rendszer között.

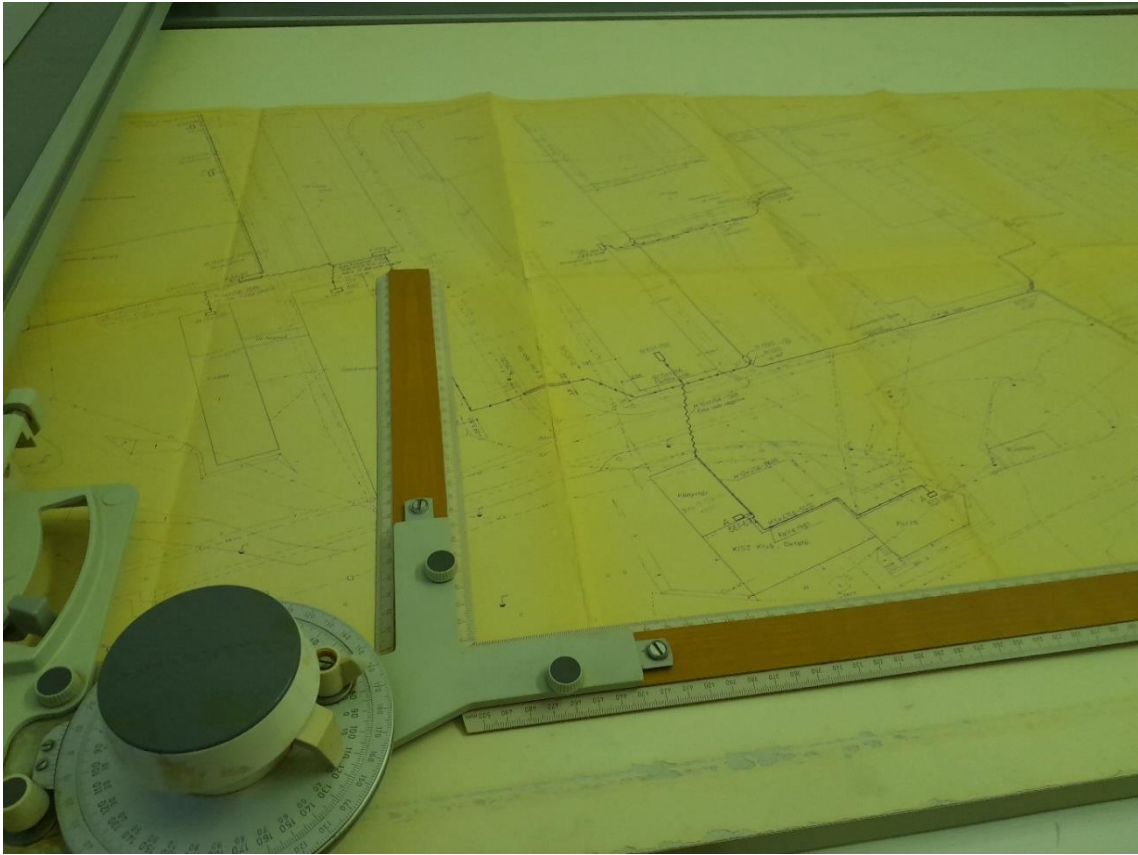
A projekt, ahol ezt bemutatom, a gödöllői Ganz Árammérőgyár üzemeltetési térképének digitalizálása és új alapponthálózatának létesítése.

Ez a feladat eleinte éles munka előkészítésének indult, de menet közben a jelentősége csökkenni kezdett. Ezért végül egy (mondhatni), pilot projekt lett belőle, célja a kutatás lett, illetve az, hogy tanuljak belőle. A munkát szabadidőmben, kizárólag saját eszközökkel, és nagyrészt nyílt forráskódú szoftverek segítségével végeztem el.

Egy földmérő technikus ismerősöm időről időre a gödöllői egykori GANZ Árammérőgyár területén végez különféle geodéziai feladatokat. Ezeket jelen pillanatban GPS technológia segítségével, EOVS rendszerben, vagy az egyes gyárcsarnokokon belüli munkákat helyi koordinátarendszerekben végzi el.

Az Üzemeltető részéről felmerült az igény arra, hogy a jelen pillanatban még papír alapon létező üzemeltetési térképek, közmű térképek, régi kiviteli és megvalósulási tervek digitalizálásra, korszerűsítésre kerüljenek, és egy modern GENPLAN alapját képezhessék.

Ehhez szükséges a térképek digitalizálása, valamint terepi mérések az azóta eltelt évtizedek során történt változások átvezetéséhez. Így tehát egyazon vetületben kell kezelnünk az átvett és felmért adatokat.



1. ábra: A Ganz Árammérőgyár üzemeltetői irodájában egy eredeti, '80-as évekbeli közmű helyszínrajz. A feladat ezen térképek tartalmából egy digitális térképi adatbázis elkészítése, és a változások vezetése helyszíni mérések alapján. (forrás: saját fénykép)

### 1.1 A munkaterület bemutatása

A gyártelep 11 hektáros területen helyezkedik el, Gödöllő nyugat-délnyugati részén. dél-ről a Gödöllői HÉV vonal határolja, a többi irányból pedig az Erzsébet park erdős területe. A '60-as években egy kiemelt fontosságú létesítmény volt a térségben, gyakorlatilag minyeg önálló városként üzemelt. Az itt dolgozók elmondása szerint például csak itt volt olyan üzlet, ahol például banánt vagy más déligyümölcsöt lehetett vásárolni. A gyártelep rendelkezett színházteremmel is, jelentős kulturális és sporttevékenység volt.

A gyártelepen kívül, sokszor nehezen elérhető és nehezen mérhető helyeken is találhatóak műtárgyak, ezeket a munka elvégzésekor szintén figyelembe kell venni. A területen nagyon sok közmű szerelvény található, köztük speciális, a termeléshez szükséges közegek szállításához (gőz, cian) szükségesek csővezetékek is. A szennyvíz kezelése és tisztítása a telephelyen belül történt a városi hálózat tehermentesítése céljából.

Ma már nincs termelés az egykori üzemekben, a csarnokokat bérbe adják más vállalkozásoknak.

## 1.2 Vetületek és transzformációk

Felvetődött a kérdés, hogy a munkához milyen vetületet használjunk. Röviden áttekintem a bemutatott munka szempontjából lényeges vetületi rendszereket.

### 1.2.1 Sztereografikus Vetület

Magyarország első matematikailag kidolgozott vetületi rendszere a sztereografikus vetület, melyet 1863-ban vezettek be. [1] Ez a rendszer kettős vetítést alkalmaz, a Bessel-féle ellipszoid (Bessel 1841) modellről a Gauss-gömbre, majd onnan egy síkra történik a vetítés.

*A vetület középpontja azonban nem a Gauss-gömb érintőjén (normálparalel) helyezkedik el, hanem attól északra. A térinformatikai szoftverek a vetületi középpont szélességének és a normálparalelnek az egymástól eltérő paraméterezését nem engedik meg, ahogy az általam számított verzió is figyelmen kívül hagyja az ellipszoidról gömbre történő vetítést.*

*Hőnyi (1967) kimutatta, hogy az ebből származó eltérés maximum centiméteres nagyságrendű lehet, Dr. Tímár és Dr. Molnár pedig egy pontosabb, 1,7cm-es értéket tudott megadni. [2]*

A vetületi rendszer délnyugati tájolású. A munka során én ettől annyiban tértem el, hogy az egyszerűség kedvéért megfordítottam Észak-keletire, mivel a munkaterületem a vetületi kezdőponttól északkeletre helyezkedik el.

A sztereografikus vetület hossztorzulása (U) a kezdőponttól 127 km-es sugarú körön belül éri el az 1:10000 értéket, a geodéziai pontossági követelmények kielégítésére ezen a körön belül alkalmazható.

Emiatt Magyarországon három sztereografikus rendszert is kialakítottak. A Budapesti rendszer kezdőpontja a Gellért-hegy főalappont. A Marosvásárhelyi rendszer, melynek kezdőpontja a Kesztejhegy főalappont. A harmadik, az Ivanici rendszer, Ivanicgradon található kezdőponttal. [1]Itt megjegyezném, hogy ez a harmadik rendszer valójában nem sztereografikus, hanem vetület nélküli rendszer, a vetületi egyenleteit nem dolgozták ki annak idején. [3]



A munkaterületem legtávolabbi pontja 25 km-re található a budapesti rendszer kezdő-pontjától.

Elvégeztem az  $U$  hossztorzulás számítását a munkaterületre vonatkozóan. A Bácsatyai László: Vetülettan 33. oldalán [1] található képlet szerint számítottam:

$$U = \frac{1}{12 \cdot R^2} \cdot (x_{12} + x_1 \cdot x_2 + x_{22} + y_{12} + y_1 \cdot y_2 + y_{22})$$

Az alábbi adatokkal dolgoztam:

$$y_1 = 22134.83$$

$$x_1 = 12093.80$$

$$y_2 = 21143.64$$

$$y_2 = 12180.27$$

$$R_{\text{Gauss-gömb}} = 6376512.966$$

$$m = 1.000003783$$

Ebből adódott a hossztorzulási tényező (1 km-re vetítve)

$$U [\text{mm}]: 4$$

Ez a számítás azt mutatja meg, hogy a vetület Gödöllő területén kiválóan alkalmas arra, hogy a helyi geodéziai munkák vonatkoztatási rendszerének használjuk.

### 1.2.2 EOVS (Egyesített Országos Vetület)

Az Egységes Országos Vetületi rendszert 1975-ben vezették be, azzal a céllal, hogy a polgári térképészetnek egységes alapot képezhessen. Erre a célra egy ferde tengelyű, redukált hengervetületet hoztak létre. Kettős vetítést alkalmaz, először az IUGG 1967 ellipszoidról a Gauss-gömbre, majd onnan a süllyesztett hengerre történik a vetítés.

Vetületi kezdőpontja a Gellért-hegy főalappont, a koordinátarendszer kezdőpontját ehhez képest azonban déli és nyugati irányban el van mozdítva. Ennek célja az, hogy praktikus módon az ország bármely pontján pozitív előjelű koordinátákkal lehessen számolni.

AZ EOVS rendszer hossztorzulása a következő képlettel számítható [1]:

$$U = \frac{1}{6 \cdot m_0 \cdot R^2} \cdot x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2$$

Ehhez a vetülethez az interneten elérhető egy online számító alkalmazás, a Budapesti Műszaki Egyetem honlapján. [4] Én ezzel számoltam ki a munkaterület egy pontján a következőket:

EOV X koordináta [m]: **249408**

Tengerszint feletti magasság [m]: **242.89**

Alapfelületi redukció [mm/km]: **-38**

Lineármódulus [mm/km]: **-40**

A kettő együtt [mm/km]: **-78**

Logikusnak tűnhet az EOV rendszer használata, mivel ezt a rendszert használjuk a mindennapi munkánk során. A mai GPS műszerekből a VITEL transzformációval EOV koordinátákat kapunk.

De vajon mennyire egyeznek a méréseink akkor, ha GPS-sel dolgozunk, és mennyire akkor, ha negyedrendű alappontokról polárisan mérünk fel? A terepi munkáim során, ha a munkaterületen vagy a környezetében található negyedrendű alappont, én mindig végzek rajta ellenőrző mérést GPS-sel, és sokszor tapasztalok több centiméteres, akár több deciméteres eltéréseket.

A válasz a két rendszer, az EOV és a műholdas helymeghatározás alapját képező ETRS89 közötti transzformációban keresendő.

### **1.2.3 ETRS89 és az OGPSH**

Az ETRS89 műholdas geodéziai hálózataink vonatkoztatási rendszere. A rendszer főbb paramétereit tekintve a WGS'84-hez hasonló, azonban az európai követőállomások koordinátáihoz kötött. Ennek oka, hogy az eurázsiai közetlemez évente körülbelül 2,5cm-t vándorol északkeleti irányban. Az ETRS rendszer viszont együtt mozog vele, így az elmozdulással járó koordináta változás kiesik. [5]

A rendszert definiáló hálózatot 1989-ben hozták létre, Magyarország és Csehszlovákia 1991-ben csatlakozott. Ekkor 5 hazai ponton történt 12 órás GPS észlelés, köztük Pécen.

Az 5 EUREF állomás rögzítésével került meghatározásra a 24 pontos hazai kerethálózat, melyből később kiegyenlítéssel számolták az 1153 pontból álló OGPSH hálózatot. [5]

Az OGPSH-t (Országos GPS Hálózat) 1995 és 1997 között hozták létre elsősorban saját bázis-rover vevőpárral történő mérések kezdőpontjainak, másrészt, hogy a két rendszer közötti átszámítást lehetővé tegye. Az OGPSH rendszerbe elsősorban negyedrendű alap-pontokat vontak be, de néhány olyan iránypont is bekerült a hálózatba, melyek korábban koordinátával sem rendelkeztek, csak egy másik pontról történő azimut számításra használták őket. A pontok kiválasztásánál az volt a szempont, hogy műholdas mérésre alkalmas legyen (kevés kitakarás), illetve, hogy kedvező térbeli eloszlással legyenek pontok. 2007-ben a hálózatot újra meghatározták, ennek oka már az aktív GNSS-hálózat támogatása volt. [5]

#### **1.2.4 EHT és VITEL**

Az OGPSH rendszer közel 1200 pontjára alapozva lehetett számítani a két rendszer közötti transzformációt. Az akkori FÖMI munkatársai, Dr. Borza Tibor és Dr. Kenyeres Ambrus eredetileg egy térbeli Helmert-transzformáció 7 paraméterét számították ki kiegyenlítéssel. A transzformáció maradék ellentmondásai között azonban fél métert is meghaladó eltéréseket tapasztaltak. Ezzel bebizonyosodott, hogy ez a módszer térinformatikai feladatokra igen, de geodéziai célokra nem használható. [5]

Geodéziai mérésekhez tehát helyi transzformációkat kellett használni, melynek több hátránya is volt: az egyes zónák határán történő mérések számításakor több eltérő eredmény is adódhat, illetve a számítás komoly gyakorlati tudást igényelt. [5]

A sok felmerülő hibalehetőség kiküszöbölésére hozta létre a FÖMI Kozmikus Geodéziai Obszervatóriuma az EHT elnevezésű transzformációs programot. A program a gnssnet.hu oldalon ingyenesen elérhető, és elsősorban utófeldolgozásra használható. [5]

Az egyre inkább elterjedő RTK (Valós idejű) GPS mérések miatt azonban szükség volt egy valós időben, a vevőkészülékben működő transzformációs programra, melynek az EHT-nak megfelelő pontosságot kell biztosítania.

Ezt nevezik VITEL-nek (Valós Idejű GNSS Helymeghatározásnál Használatos Terepi Transzformációs Eljárás).

Az eljárás úgy működik, hogy a GPS koordinátákból először a 7 paraméteres transzformációval előzetes koordinátákat számol. Ezután egy 5x5 km-es rácsháló sarokpontjaira kiszámított korrekciók alapján interpolálással számítja az aktuális korrekciókat. Végül a korrekciókat hozzáadja az előzetes koordinátákhoz. [5]

#### **1.2.5 A választott vetület**

A fent leírt szakirodalmi áttekintés alapján úgy döntöttem, hogy megtartom az eredeti térképek sztereografikus vetületét. A térképek georeferálásához mindenképpen érdemes ezt használni. Ahhoz, hogy a feldolgozott, nagy méretarányú üzemi térképek és az későbbi felmérések összhangban legyenek egymással, nem célszerű ezt EOVS rendszerbe áttanszformálni. Egyrészt az EOVS és a Sztereografikus vetület közötti országos transzformáció hibákkal terhelt. Megbízhatóságát a munkaterületre vonatkozóan nem ismerem. Nem ismerem továbbá a lokális átszámítási paramétereket se. Másrészt pedig a GPS méréseink során alkalmazott transzformáció szintén hibákkal terhelt, melyet egy korrekciós rács kezel, így a kapott koordináták valószínűleg szintén nem lesznek összhangban a sztereografikusról EOVS-ba transzformált üzemi térképek tartalmával.

Úgy döntöttem, hogy létrehozok egy lokális transzformációt az ETRS'89 és a Budapesti Sztereografikus vetület között, melynek alapját a felmérés idején használt helyi alappontok pontleírásaiban található koordináták és a nevezett pontokon végzett saját méréseim képezik.

## 2. A KIINDULÓ ADATOK BEMUTATÁSA

### 2.1 Analóg térképek

A munkához régi, papír alapú munkarészek álltak rendelkezésre. A feladat elvégzése során két munkából vettem át adatokat. Az egyik munkarész 1986-ból származik, a BGTV végezte a felmérést, és a távközlési hálózat felmérését tartalmazza. A másik egy teljes közmű alaptérkép, szakági térképekkel, 1992-ből, ennek készítője a Geométer Kft. volt. Az 1992-es munkából egyelőre a vízelvezetés szakági helyszínrajza lett felhasználva.

Az 1986-os munkarész szakági adattartalma kisebb, méretaránya azonban nagyobb (1:250, míg az 1992-es felmérés 1:500). Sztereografikus vetületű, tartalmaz örkereszteket, szelvénykereteknél koordináta-megírásokat. Jelkulcsos ábrázolással tartalmazza a felmérési alappontokat is. Szerepelnek rajta az épületek, útburkolatok. A felmért vezeték nyomvonalakhoz találhatók rajta pallér méretek, melyek nem csak a digitalizálást, de a felszerkesztést is lehetővé teszik.

Az 1992-es munkarészekeken nincsenek örkeresztek, nem találhatók rajta alappontok. A felmérés készítése során vélhetően az 1986-os munkarész adatait egészítették ki, a felmérés ortogonálisan történhetett. Ezt a munkarészt csak térkép-terep azonos pontok alapján lehet georeferálni, illetve a '86-os térkép adataihoz képest felszerkeszteni.

1. táblázat: A Ganz Árammérőgyár eredeti üzemeltetési térképeinek bemutatása, összehasonlítása.

|                    |                                                                      |                                                           |
|--------------------|----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| munka megnevezése: | GÖDÖLLŐ, Ganz Árammérőgyár TÁVKÖZLÉSI HÁLÓZAT SZAKÁGI HELYSZÍNRAJZA  | GÖDÖLLŐ, GANZ Mérőgyár Kft. KÖZMŰTÉRKÉPE                  |
| készítő cég:       | BUDAPESTI GEODÉZIAI ÉS TÉRKÉPÉSZETI VÁLLALAT                         | GEOMÉTER KFT.                                             |
| dátum:             | 1986                                                                 | 1992                                                      |
| vetület:           | Sztereografikus                                                      | Sztereografikus                                           |
| alapszint:         | Balti                                                                | Balti                                                     |
| alappontok:        | tartalmaz                                                            | nem tartalmaz                                             |
| örkeresztek:       | tartalmaz                                                            | nem tartalmaz                                             |
| méretarány:        | 1:250                                                                | 1:500                                                     |
| adattartalom:      | Épületek, utak, részük, távközlési hálózat, egyéb közművek fedlapjai | Épületek, utak, részük, összes közmű szakág helyszínrajza |

Ezekon kívül terv adatokat is kaptunk 1971-ből, de ezek egyrészt tervezett állapotot tartalmaznak, így annak helyessége, geometriai pontossága nem biztos, hogy megfelelő, másrészt vetületi információt sem tartalmaznak, így ezeket nem digitalizáltam.

## 2.2 Alappontok

A transzformáció számíthoz alappontokat választottam ki. A választásnál több szempont is volt:

- Minél régebbi állandósítás legyen, hogy lehetőleg eredeti, mért sztereografikus koordinátákkal rendelkezzenek.
- Olyan pontok legyenek, amelyek között vélhetően közvetlen iránymérések történtek a háromszögelés során, hogy a mérésből adódó hibák terjedését minimalizáljuk.
- Vélhetően ezekről történhetett az ipartelep alapponthálózatának levezetése, minél közvetlenebb kapcsolatban álljanak azzal.
- **Súlypontjuk nagyjából a gyártelepen helyezkedjen el**, hogy a munkaterületen minél pontosabb eredményeket adjon a transzformáció.

Úgy gondoltam, hogy a Gödöllői-dombság csúcsain (300 m fölötti) elhelyezkedő alappontok meg fognak felelni a feltételeknek. Némi kutatómunka után kb. 10 darab ilyen pontot választottam ki. Az alappontok ügyében ismét a helyi földmérő kolléga segített: korábbi munkákból már rendelkezett pontleírásokkal, és szinte az összes pont helyét felkereste már.



2. ábra: A Gyertyános alappont. 1926-ban állandósították, és a Budapesti Centrális Alapponthálózat egyik fő pontja is, alapvonal fejlesztő hálózati pont. A saját traszformáció számításomban szintén fontos szerepe volt. (forrás: saját fénykép)

Végül 7 ilyen pont lett bemérve, és ebből 5 került felhasználásra a traszformációs paraméterek számításához. Ezen kívül a gyártelep körül található 3 darab belterületi, negyedrendű pontot is bemértem, ezeket a traszformáció ellenőrzésének céljából.

2. táblázat A rendelkezésre álló alappontok adatai, pontszám, pontnév, koordináták, azok forrásai, valamint a felmérés vagy állandósítás ideje.

| Rendelkezésre álló sztereografikus adatok |              |          |          |        |                |            |
|-------------------------------------------|--------------|----------|----------|--------|----------------|------------|
| pontszám                                  | pontnév      | y        | x        | z      | forrás         | meghat.éve |
| 65-2011                                   | Gyertyános   | 16014.02 | 11747.02 | 325.12 | transzformáció | 1956       |
|                                           |              | 16014.15 | 11747.03 | 325.12 | eredeti mérés  | 1926       |
| 65-2227                                   | Bolnoka-II.  | 19371.37 | 10018.60 | 322.45 | transzformáció | 1982       |
| 65-2218                                   | Őr-hegy      | 20234.75 | 12581.49 | 282.79 | transzformáció | 1982       |
| 65-2060                                   | Fehér-tető   | 18327.91 | 7118.97  | 278.19 | transzformáció | 1956       |
| 65-2225                                   | Patkó-tető   | 18365.78 | 11580.55 | 317.62 | transzformáció | 1982       |
| 66-1106                                   | Öreg-hegy-I. | 23898.70 | 14836.76 | 304.01 | transzformáció | 1982       |
| 66-1102                                   | Boncsok      | 22193.67 | 16496.78 | 317.26 | transzformáció | 1982       |
|                                           |              | 22193.85 | 16496.81 | 317.26 | eredeti mérés  | 1930       |
| 66-1113                                   | Gudra        | 24782.72 | 14092.50 | 284.69 | transzformáció | 1975       |
| Levezetett (városi) pontok                |              |          |          |        |                |            |
| 65-2219                                   | -            | 21200.09 | 12476.26 | 236.43 | transzformáció | 1982       |
| 65-2216                                   | -            | 21289.32 | 12747.42 | 239.87 | transzformáció | 1982       |
| 65-2220                                   | -            | 21767.38 | 12368.72 | 230.88 | transzformáció | 1982       |

Ha megfigyeljük az évszámokat, észre lehet venni, hogy Gödöllőn a negyedrendű felmérés ideje megegyezett a Ganz mérőgyár felmérésének időpontjával (1980-as évek eleje). Mindkét munkát a Budapesti Geodéziai és Térképészeti Vállalat végezte, de tudomásom szerint az alapponthálózati munkákra külön felmérési osztály volt. Mégis nagyon valószínű, hogy a két munka között volt kapcsolat, összefüggések. A **2216**, **2219** és **2220** számú pontok a gyárterület közvetlen közelében találhatók.



### 2.3 Helyszíni mérések

A számítási munkához kiinduló adatként a saját méréseimet is fel kellett használnom. Úgy gondolom, hogy a terepi adatgyűjtés folyamatát is érdemes bemutatnom az alábbiakban.

A terepi munkák eltérő időben történtek meg, 2023. áprilisától októberig. Kronológiai sorrendben először a gyárterület környezetében mértem negyedrendű pontokat. Később, a nyár folyamán történt meg a dombtetőkön a régebbi alappontok felkutatása és bemérése, végül pedig az ipartelepen belüli felmérés.

A munkák során a saját eszközeimet használtam.



3. ábra: Egy nehezen kivitelezett pontraállítás és GPS mérés az Öreg-hegyen. A transzformációba bevont pontok felkeresése, mérése is izgalmas feladatnak bizonyult. (forrás: saját fénykép)

A kiválasztott alappontokon RTK-GNSS mérést végeztem 2\*120 epocha terjedelemben, az egyes mérések között legalább negyedóra eltéréssel. Ellenőriztem, hogy néhány centiméteren belül egyeznek-e a mérések, majd a végleges eredmény a középérték lett. Néhány ponton a műszer jelrúdon, bipoddal kitámasztva állt, de előfordult az is, hogy műszerlábbon, kényszerközpontosítóval lett a műszerállás kialakítva.

A Ganz gyárban a felmérésekre végül csak 2023. október végén került sor. Mostanra kiderült, hogy a munka elvégzése nem sürgős és az is kétséges, hogy mennyire van rá szükség. Ennek ellenére a tudományos érdeklődés és a feladat szakdolgozati téma mivolta miatt elvégeztem.

A korábban állandósított 8 db alappont (**101-108 psz.**) került csak meghatározásra, új pontokat nem állandósítottam. Felsőrendű szintezés sem történt.

A mérés idejére azonban már voltak előzetes transzformáció számítások, és a térképszelvények georeferálása és kiértékelése is megtörtént. Ezért úgy gondoltam, hogy egy kis időt rászánok a régi felmérési alappontok felkutatására. A GPS vezérlőjébe feltöltöttem ezen pontok átszámított koordinátáit, és kitűztem őket. Az nyilván várható volt, hogy a szegek közül egyet sem lehet már ilyen hosszú idő után megtalálni. A felmérési kövek közül kettőt, a **3847** és **3852** jelű pontokat kitűzés után, gyalogsági ásóval sikerült megtalálni, a segítő földmérő technikus kolléga és az ott tartózkodó helyi dolgozók döbbene-tére. A **3847** jelű ponton ráadásul akkor egy szétbontott BMW gépkocsi parkolt hibás és beragadt fékrendszerrel, felújításra várva, és ennek az elmozdítása sem volt kis feladat.



4. ábra: A 3847 számú, eredeti felmérési alappont. Ilyen kis méretű, keresztvesséssel ellátott köveket használtak az eredeti felmérés során. A pont átszámított koordinátáit GPS-sel tűztem ki, és néhány centiméternyi föld eltávolítása után elő is került. (forrás: saját fénykép)

A többi felmérési kő a sirt feltöltésnek és kisebb átépítéseknek esett áldozatul, vagy olyan fásulás nőtt ki a környezetükben, hogy nem volt érdemes emiatt irtásba kezdeni.

Ezután megtörtént az RTK-GNSS mérés a pontokon. A műszer vasfiguránsra helyezve, 2\*120 epocha mérést végzett a pontokon. Az új szegek közül a **104**-es számú pontot kivéve mindegyiken történt műholdas észlelés. A **104**-es pont annyira körül volt véve épületekkel, hogy nem volt értelme néhány percnél tovább várni a fix megoldást. A két újonnan feltárt felmérési kövön azonban történt GPS mérés.

A mérőállomás szoftverébe feltöltöttem az előzetes koordinátákat, valamint a kiértékelt térképet is. Így már a helyszíni mérés során lehetőségem volt megfelelő illesztőpontokat választani, illetve vizsgálni a térkép-terep azonosságot.

A műszerrel zárt hurok alakban sokszögvonalat vezettem az új szegeken. A felmérési köveket egykarú poláris pontként mértem be. Az atmoszférikus adatokat mobil interneten folyamatosan figyelemmel kísértem, ezeket a műszerben álláspontonként frissítettem. A



sokszög pontokon kényszerközpontos prizmát alkalmaztam, mely egy **Leica GZR103**-as típusú, optikai vetítővel és csöves libellával ellátott közdarabon lett elhelyezve. Ennek a közdarabnak egy további előnye az, hogy a prizma magassága tökéletesen megegyezik a műszer távcsövének központi magasságával. Így tehát ha kiveszem a közdarabot a prizmával, és a helyére a mérőállomást rakom, a műszermagasság azonos lesz a korábbi jelmagassággal. A jelmagasságokat szalaggal, és a műszer *Autoheight* funkciójával is mértem. Ez úgy működik, hogy a műszer állótengelyében el van helyezve egy lézeres távmérő, és pontraálláskor a felmérő szoftver automatikusan felkínálja a használatát. Ilyenkor magassági külpontosságot is meg lehet adni neki. Ez akkor hasznos, hogyha a pontjelben süllyeszték van, és a vízszintes értelmű központi jel magassága eltér a szintezett magasságtól, de ez az eltérés a gyártásból adódóan ismertnek tekinthető. A kézi és automata mérés egyébként minden esetben 1 mm pontossággal ugyanazt az eredményt adta ki.



5. ábra: Irány- és távméréses alapponthálózati munka a gyártelepen. A transzformációval számított sztereografikus alappontok között sokszögvonalat vezettünk, és ellenőrző részletmérés is történt. (forrás: saját fénykép)

A sokszögpontokról menet közben részletméréseket is végeztem, majd ezek végeztével visszairányoztam az alappontokat, az elcsavarodás ellenőrzésének céljából. Az ellenőrző pontokat úgy választottam ki, hogy egyértelműen térkép-terep azonos pontok legyenek, és a helyszínen szemmel láthatóan nem lettek átépítve, módosítva. Régi épület sarokpontokat, közmű aknák fedlapjait, támfalak jellemző sarokpontjait mértem be. Emellett néhány burkolatot, íveket is végig mértem, hogy látszódjon, mennyire illeszkedik ez a geometria a térképezettre. Az épület pontokat jellemzően prizma nélküli módon mértem, a magassági irányzást figyelmen kívül hagyva. A közművek, burkolatok esetében kézben tartott prizmára, a jelmagasságot is dokumentálva történt a mérés.

Végül ez a 8 álláspont is elég nagy feladatnak bizonyult, az utolsó 2 álláspontot már sötétedés után fejeztük be. Szerencsére a műszer ATR-je (Automatic Target Recognition, Automatikus céltárgy felismerés) sötétben is pontosan méri a prizmát. Végül a 8 álláspont, 2 külső irány (kövek) és összesen 189 részletpont bemérése történt meg. Ez a digitalizált térkép ellenőrzésére bőségesen elegendőnek mondható.

### 3. MÓDSZEREK

#### 3.1 Felhasznált szoftverek bemutatása a felhasználás szempontjából

##### 3.1.1 GNU Octave

A GNU Octave egy matematika-orientált tudományos programozási nyelv. Használata a Matlab-hoz hasonló, és azzal nagy részben kompatibilis. Elsősorban mátrix és vektor műveletek elvégzéséhez használható. A szoftver rendelkezik 2D és 3D vizualizációs felülettel is. Az octave.org oldalról letölthető, ingyenesen felhasználható alkalmazás. A projekt során a transzformációs paraméterek kiszámításához szükséges kiegyenlítő számítások elvégzéséhez használtam. [6]

##### 3.1.2 GeoEasy és GNU GAMA hálózatkiegyenlítő modul

A GeoEasy egy nyílt forráskódú, szabadon felhasználható szoftvercsomag. Geodéziai számításokra használható, poláris pont számítás, 2D és 3D hálózatok számíthatók vele. A hálózatkiegyenlítéshez a GNU GAMA modult használja, mely szintén nyílt forráskódú alkalmazás. A legtöbb műszergyártó nyers mérési formátumát kezeli, így a Leica GSI formátumot is. Emellett számos egyéb geodéziai számítás végezhető vele, úgy mint:

- regressziós egyenesek, körök, görbék, síkok számítása
- digitális terepmodell készítés és szintvonalak generálása
- transzformációs számítások

A szoftvercsomagot a DigiKom Kft. fejleszti. [7]

##### 3.1.3 GeoZseni

A Geozseni szintén egy általános geodéziai feldolgozó szoftvercsomag. Ez kereskedelmi forgalomban vásárolható alkalmazás, melyet az Intelligeo Kft. fejlesztett. A fejlesztésével az elmúlt években felhagytak, helyette a modernebb és a GeoEasy-hez hasonlóan GMU GAMA alapokon nyugvó YASC (Yet Another Surveying Calculator) elnevezésű alkalmazás fejlesztése folyik. [8]

### 3.1.4 QGIS és GDAL modul

A QGIS (Quantum GIS) egy nyílt forráskódú térinformatikai szoftvercsomag. Tetszőlegesen bővíthető különféle modulokkal, így például a munkám során a beszkenelt térképek georeferálásához használt GDAL modullal is. [9]

A GDAL függvénykönyvtár a térinformatikában szokásos raszteres és vektoros formátumok közötti konverzióhoz, és térinformatikai műveletek elvégzésére alkalmas. [10]

### 3.1.5 PROJ

A PROJ egy általános koordináta-transzformációs szoftver. Alkalmas a geodéziai vetületek kezelésére, hiszen ismeri a legtöbb ellipszoid-modellt. A forráskód a proj.org oldalról letölthető, és számos kereskedelmi szoftver is ezt alkalmazza. [11]

A csomag tartalmazza a proj, cs2cs és a cct parancssorból indítható végrehajtható állományokat.

**proj:** Ismeri a főbb vetületeket, ellipszoidról vetületi koordinátákra transzformál és vissza. Ez a szoftver teszi lehetővé az egyes geodéziai dátumok paraméterezését térinformatikai programokban. [2] [12]

**cs2cs:** koordinátarendszerek közti átváltást teszi lehetővé. Vetületeket definiálhatunk benne. Dátumok közti átváltásra használható, például Helmert, polinomiális transzformációk segítségével Széles választékát biztosítja a transzformációs megoldásoknak.

**cct:** Az előbbieket kibővítése, konverziókat (pl. ellipszoidról geocentrikusra) is tartalmaz. A parancssoros műveletek összefűzése a műveletek egymás utáni végrehajtását is lehetővé teszi (pipeline funkció).

### 3.1.6 ZWCAD és AUTOLISP rutinok

A ZWCAD egy DWG kompatibilitással rendelkező CAD műszaki rajzoló szoftver. A program Professional verzióját használtam, mely bővíthető Autolisp nyelven és Visual-Basic-ben írt segédprogramokkal. [13]

A lisp segédprogramok nagy részét, melyeket a mindennapi munkám során használok, és a szakdolgozati projektben is alkalmaztam, **Papp Ferenc földmérő** készítette, és honlapjáról ingyenesen letölthető. [14]

A teljesség igénye nélkül néhány hasznos funkció:

- pontlista beolvasása és pontok attribútumos blokkokkal történő megjelenítése
- georeferált raszterképek beolvasása
- derékszögű bemérések szerkesztése és ortogonális méretek megírása
- őrkereszt hálózat elhelyezése
- koordináták megírása
- blokkok elhelyezése pontokra pontkód attribútum alapján
- vonal jelkulcsolás

### 3.2 Vetületek közötti átváltás módszerei

A projektben a legfontosabb feladat a vetületek közti átváltások megoldása volt. Egyrészt a beszkenelt, raszteres térképeket kellett a sztereografikus vetületben elhelyezni, másodrészt pedig a gyárterület új felmérési alappontjait, melyek WGS'84 koordinátákkal rendelkeztek, szintén a sztereografikus vetületbe kellett átszámolni. Mindkét feladat eltérő módszerrel végezhető el.

#### 3.2.1 Archív térképek georeferálása

Minden egyes beszkenelt raszteres képnek van saját sík-koordináta rendszere, a pixel koordináta-rendszer. Rendszerint a kép bal alsó sarka (0,0) és minden képpont 1-1 névekményt jelent. Az első koordináta az adott képpont oszlopának számát, a második koordináta a képpont sorának számát jelöli. A rendszer mértékegysége a pixel (képpont).

Ahhoz, hogy ezt a képet beillesztjük valamely rendszerbe, illesztőpontokat (GCP; Ground Control Point.) kell kijelölnünk, melyeknek a cél vetületben ismerjük a koordinátáit. Lehetőség szerint a cél vetületnek azt a geodéziai dátumot kell választani, amelyben a térkép készült.

*"A georeferálás azt jelenti, hogy a képelemekhez koordinátákat rendelünk és pontosan meghatározzuk, hogy azok milyen földrajzi vagy vetületi koordináta-rendszerben értelmezettek."* [3]



Az illesztőpontok kiválasztására több módszer is van. A legelterjedtebb, de legnagyobb hibalehetőségeket hordozó módszer az egyes tereptárgyak (épület sarkok, aknák stb.) kijelölése. Ez különösen régi térképekre igaz, hiszen a részletméréseket régen jelentősen pontatlanabban lehetett elvégezni, mint a mai mérés technikával. A másik felmerülő probléma még az lehet, hogy ezeknek a terepi pontoknak az eloszlása biztos, hogy szabálytalan, ezért, ha egy magasabb fokú polinommal történik a transzformáció, a hibák véletlenszerűen és ellenőrizhetetlenül terjednek tovább.

Az ideális megoldás ezzel szemben az, hogy ha a térképen található ismert koordinátájú keretjelek, illetve örkeresztek. Ezek ugyanis egyrészről a mérési hibáktól függetlenek, másrészről szabályos térbeli eloszlásúak.

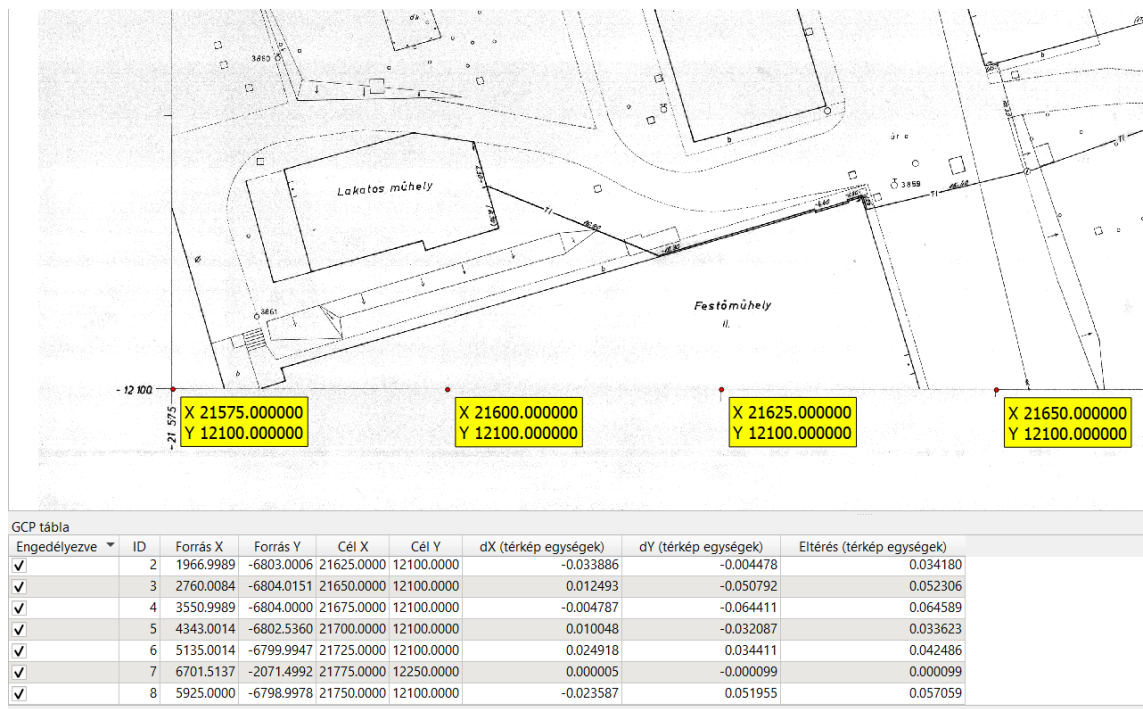
Az 1986-os hírközlési munkarészekben szerencsére volt 1:250-es méretarányú őrháló, így erre el lehetett végezni az illesztést.

Az illesztés módja is többféle lehet: lineáris, kvadrátikus, illetve köbös.

Az átmintavételezés azt jelenti, hogy egy rácsot töltünk ki, ahol kerek koordináta értékek vannak, amit az eredeti kép pixeleivel töltünk fel. Ha a kerek koordinátaértékhez kiszámoljuk, hogy az eredeti kép melyik pontját kell oda behelyezzük, akkor, annak a koordinátája általában tört szám lesz. A legegyszerűbb megoldásnál a ponthoz legközelebbi értéket választjuk ki (nearest neighbor). A bilineáris megoldásnál (x, y irányban) 4 legközelebbi pont súlyozott átlagát vesszük. A köbös megoldásnál 3x3 képpontot veszünk figyelembe, és egy sinus cardinalis függvényrel történik a számítás. Ezt a megoldást nagy körültekintéssel célszerű alkalmazni, digitális terepmodellek illesztéséhez nem javasolt, mert kiugró, hamis magassági értékeket generálhat.

A kapott térképszelvényeket egy OCE400 típusú lapszkennerral szkenneltem be, 600 DPI felbontással. A szkennelt állományokat TIF formátumban kezeltem. A feldolgozás első része QuantumGIS szoftverben történt, a GDAL eszköztár segítségével.

Több számítási megoldás is rendelkezésre áll a georeferáló programrészben, alapesetben az Affin transzformációt célszerű alkalmazni. A térképen belenagyítással kijelölhetők az illesztőpontok (GCP – Ground Control Point), melyek jelen esetben a koordinátával ellátott keretjelek és az örkeresztek. A jelölés után be lehet gépelni a koordinátákat a cél vetületben. Az összerendezés koordinátalistáját (GCP tábla) el lehet menteni.



6. ábra: A keretjelek és örkeresztek kijelölése, GCP-ként a georeferáláshoz, QGIS programban. Lent a GCP-k két rendszerbeli koordinátái és az Affin transzformáció maradék hibái. (forrás: saját kép)

Attól függően, hogy a milyen transzformációs megoldást választunk, a program kijelzi a pontok maradék hibáit. Ezt alapértelmezetten pixel mértékegység rendszerben teszi meg, de beállítható vetületi mértékegységekkel (méter) is. A képernyőn megjeleníthetők az illesztőpontok cél koordinátái is, így segítve a kijelölést.

Az 5. számú szelvény illesztése esetében, mikor Affin transzformációt alkalmaztam, az átlagos maradék hiba 7,5cm volt, ezért úgy döntöttem, kipróbálok egy másik módszert is.

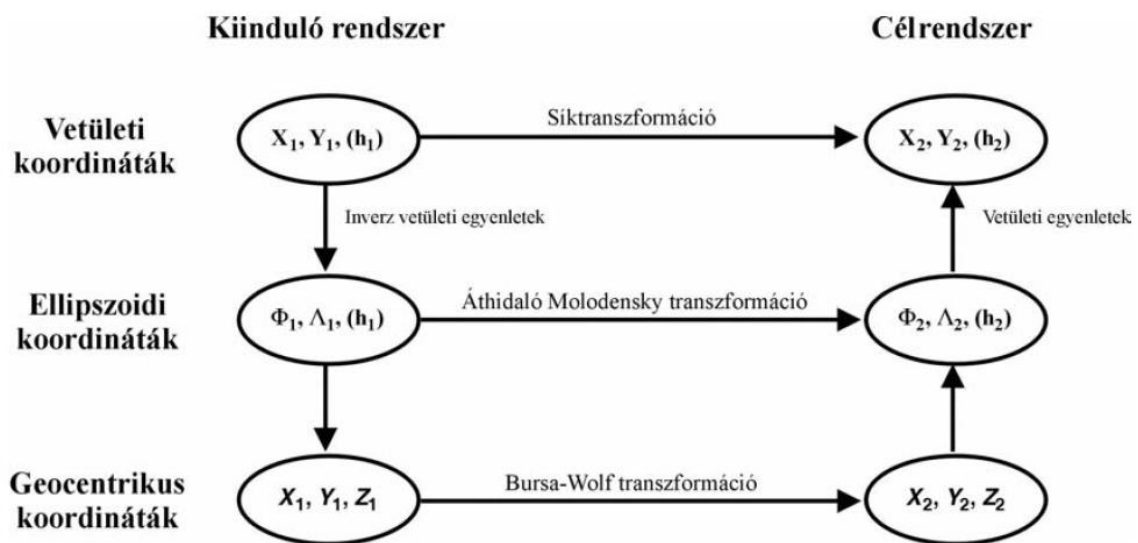
A Vékonylemezes Spline - Thin Plate Spline (TPS) algoritmus több lokális polinomot használva mintegy gumilepedőként feszíti a rasztert az illesztőpontokra, ezzel minimálisra csökkenti a teljes felület görbületét. A GCP-ktől távol eső területek a kimenetben el lesznek mozgatva, hogy megfeleljenek a GCP-k megfeleltetésének, de egyébként helyileg minimálisan deformálódnak. A TPS a leghasznosabb a sérült, deformált vagy más módon kissé pontatlan térképek vagy rosszul ortorektifikált légi- és űrfelvételek georeferálására. Hasznos az ismeretlen vetületi típussal vagy paraméterekkel rendelkező térképek hozzávetőleges georeferálására és implicit újravetítésére is, de ahol egy szabályos rács vagy az ad-hoc GCP-k sűrű halmaza illeszthető egy referenciatérkép-réteggel. Technikailag

legalább 10 GCP-t igényel, de általában többre van szükség a sikerhez. A módszer leírása a QGIS kézikönyvből. [9]

A két módszeren kívül lehetőség van még első-, másod-, és harmadfokú polinomos, illetve Helmert, transzformációra is.

### 3.2.2 Vetületek közti átszámítások transzformációs paraméterekkel, paraméterek meghatározása mindkét rendszerben ismert pontok alapján

A következő feladat a Ganz gyárba tervezett, sztereografikus alappontok számításához szükséges transzformációs állandók számítása volt. A számítás alapját képező pontok koordinátái rendelkezésre álltak az ETRS'89 rendszerben saját méréseimből, sztereografikus rendszerben pedig a pontleírásokból.

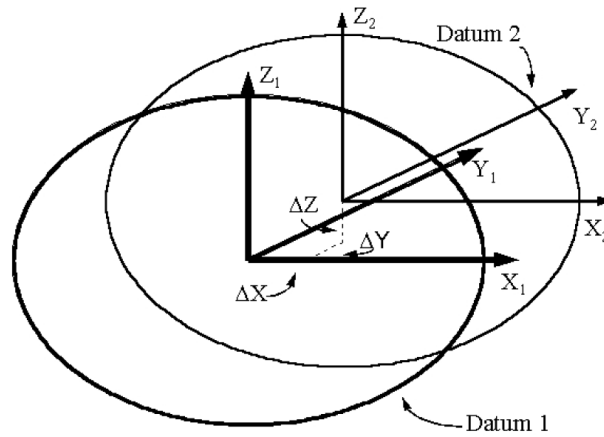


7. ábra: A három átszámítási mód folyamatábrája [12]

Az átszámítás három lehetséges módja:

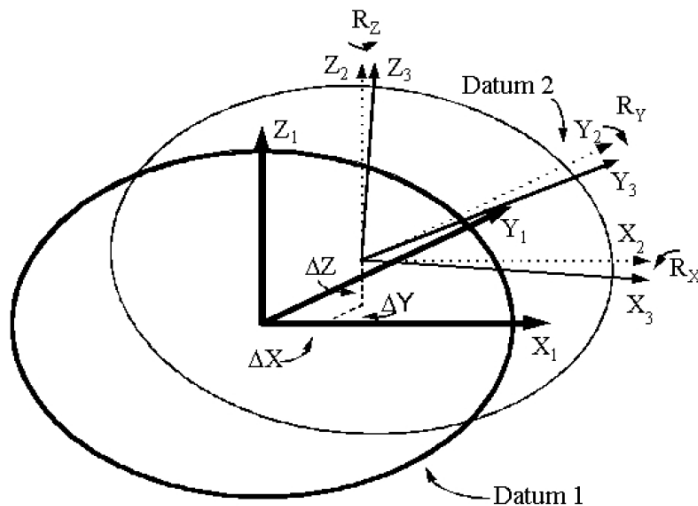
1. A direkt polinomiális transzformáció, mely az azonos pontok különböző vetületi rendszerben értelmezett koordinátái alapján, magasabb rendű polinomok becslésén alapul. [3] Ezt a módszert elvetettem, mivel itt nem két vetület közötti kapcsolatra van szükség, hanem két ellipszoid modell között szerettem volna létrehozni a kapcsolatot. (A saját méréseim az ETRS'89 rendszerben értelmezettek.)

2. Az ellipszoidi koordináták között az áthidaló Mologyenszkij-transzformáció vagy korrekciós rács szerinti eltolás: Ez a módszer már az ellipszoidok között teremt kapcsolatot. Az átszámítási paraméterek a kezdőpont 3 irányban történő elmozdulás vektorjai. ( $dY$ ,  $dX$ ,  $dZ$ ).



8. ábra: Az áthidaló Mologyenszkij formulák [3]

3. Az ellipszoid-centrikus Descartes koordináták közötti Bursa-Wolf transzformáció 7 paraméteren alapszik: a kezdőpontok eltolása, elforgatás 3 tengely mentén, és egy méretarány tényező.



9. ábra: A Bursa-Wolf transzformáció [3]

A két lehetőség közül a Mologyenszkij-paraméterezés számítása egyszerűbb, de eredményei többnyire pontatlanabbak a Bursa-Wolf módszernél. [3] A nagyobb pontosság elérése érdekében a Bursa-Wolf paraméterezés mellett döntöttem.

A számítás bemenő és kimenő adatai a pont geocentrikus koordinátái a két ellipszoidon:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} + (1 + k) \cdot \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_Z & -\varepsilon_Y \\ -\varepsilon_Z & 1 & \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y & -\varepsilon_X & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

Az  $X_1, Y_1, Z_1$  a pont forrás (kiinduló) rendszerbeli ellipszoidcentrikus Descartes koordinátái.

Az  $X_2, Y_2, Z_2$  a pont cél rendszerbeli koordinátái.

$dX, dY, dZ$  a három tengelyen történő elmozgatás.

Az  $1+k$  a méretarány tényező.

$\varepsilon_X, \varepsilon_Y, \varepsilon_Z$  pedig a három tengely irányában történt elforgatási szögek.

Ahhoz, hogy az átszámítást el tudjuk végezni, a közös pontok alapján először ezt a hét paramétert kell kiszámítani.

A paraméterek becslését kiegyenlítéssel számíthatjuk.

Az egyenletben a könnyebb kezelhetőség érdekében bevezetjük a következő mennyiségeket:

$$1 + k = A$$

$$(1 + k) \cdot \varepsilon_X = B$$

$$(1 + k) \cdot \varepsilon_Y = C$$

$$(1 + k) \cdot \varepsilon_Z = D$$

Ezeket felhasználva a következő egyenleteket kapjuk:

$$X_2 = dX + A \cdot X_1 + B \cdot Y_1 + C \cdot Z_1$$

$$Y_2 = dY + B \cdot X_1 + A \cdot Y_1 + D \cdot Z_1$$

$$Z_2 = dZ - C \cdot X_1 - D \cdot Y_1 + A \cdot Z_1$$

Az egyenletek a paraméterekre nézve lineárisak, meghatározásukra alkalmazható a Gauss-féle legkisebb négyzetek módszere. [3] A probléma a II. kiegyenlítési csoport segítségével oldható meg, ahol a mérések a mindkét rendszerben adott X,Y,Z ellipszoid-centrikus koordináták, a közvetítő egyenletek a fenti képlettel leírt összefüggések, és a meghatározandó paraméterek pedig az egyenletekben szereplő dX, dY, dZ, A, B, C, D együtthatók.

Ehhez a közvetítő egyenleteket, a hibatagok elhagyásával a következő egyenletrendszer adódott:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_n \\ Y_1 \\ \dots \\ Y_n \\ Z_1 \\ \dots \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & Z_1 & -Y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & X_n & 0 & Z_n & -Y_n \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & -Z_1 & 0 & X_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & Y_n & -Z_n & 0 & X_{n1} \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & Y_1 & -X_1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & Z_{n1} & Y_n & -X_n & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \\ A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}$$

A deriváltakat tartalmazó mátrixot nevezzük **A**-nak (alakmátrix). Az egyenlőség általában nem teljesül, az egyenlet két oldalának különbsége az **I**, atisztatag vektor.

A paraméter számítás előtt azonban még egy fontos feladat volt: A pontleírásokban található sztereografikus koordinátáknak képezni kell a Bessel-ellipszoidon értelmezett, derékszögű (ellipszoid-centrikus) koordinátáit.

Ehhez a proj függvénykönyvtár parancssorból végrehajtható utasításait használtam. A **cart.bat** fájlban megadtam a vetületünk jellemzőit (kezdőmeridián, kezdő hosszúság, és a cs2cs (egyik koordináta rendszerből a másikba átváltást végrehajtó) programot használtam, a következőképp:

```
cs2cs +proj=sterea +ellps=bessel +lat_0=47.4860106 +lon_0=19.0491511 +to
+proj=cart +ellps=bessel
```

Ez a kód a Budapesti Sztereografikus koordinátákból ellipszoid centrikus derékszögű koordinátákat számol. A programba nem csak egyesével, hanem txt kiterjesztésű koordináta listából is be lehet vinni az adatokat, és egy kimeneti szövegfájlban tárolni azokat.

A paraméterek meghatározását a GNU Ocatve programmal hajtottam végre.

Először definiáltam a koordinátákat *X1wgs*, *Y1wgs*, *Z1wgs*, *X1bess*, *Y1bess*, *Z3bess* stb. elnevezésekkel. A wgs a GPS-sel mért koordinátákat, a bess jelölés pedig a Bessel ellipszoidon értelmezett, kiinduló adatokat volt hivatott jelölni.

„**A**” néven jelöltem az alakmátrixot, melybe a parciális deriváltakat írtam be.

Az **l** vektorba írtam be a proj segítségével számolt Bessel ellipszoidi derékszögű koordinátákat.

A keresett 7 paraméter meghatározásához a normál egyenletrendszer képletét használtam:

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

ahol az N mátrix inverzét úgy kapom, hogy az alakmátrixot megszoroztam a transzponáltjával és vettem az inverzét, a **b** vektort pedig úgy, hogy szintén A transzponáltjával szoroztam meg az l vektort:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{l})$$

Az így kapott x paramétervektorból visszaszámoltam a paramétereket, és egyből ki is számítottam a mért pontok Bessel-ellipszoidon értelmezett derékszögű koordinátait.

A kapott geocentrikus koordinátákat a **carti.bat** nevű segédprogrammal számítottam vissza sztereografikus rendszerbe:

**cs2cs +proj=cart +ellps=bessel +to +proj=sterea +ellps=bessel +lat\_0=47.4860106 +lon\_0=19.0491511**

### 3.3 Poláris mérések feldolgozása általános geodéziai szoftverekkel

#### 3.3.1 Feldolgozás Geozseni szoftverrel

Az új sztereografikus pontokat beolvastam a Geozseni szoftverbe. Hasonlóképp tettem a mérőállomásból kiolvasott GANZSTG.MJK elnevezésű mérési jegyzőkönyvvel.

Az új alappontok meghatározásához úgy döntöttem, hogy hálózat kiegyenlítést alkalmazok. A kiegyenlítésnél a 102 és 3852 számú pontokat kötöttem meg, mint adott pontokat. Ezen a két ponton történt a legtöbb GPS érzékelés, az egyes mérési időszakok között

ezeknél voltak a legkisebb eltérések. Emellett ezek a pontok a mintaterület délnyugati és északkeleti sarkában helyezkednek el, és viszonylag kevés a kitakarás ezeken a pontokon, így minden szempontból logikus ezeket megkötni.

A többi alappont előzetesként lett megadva és a kiegyenlítéssel új koordinátákat kapott. 1-2 cm javítást kaptak így a pontok. A kiegyenlítési paraméterezést úgy állítottam, hogy a távmérési középhibát 1mm-nek, az iránymérés középhibáját 2"-nek adtam meg, tapasztalataim szerint a műszer ezt a megbízhatóságot tudja hozni. Az előzetes középhibát 1 cm-ben állapítottam meg.

A programban lehetőség van a távmérések és tájékozások vizsgálatára, vizsgálati jegyzőkönyv készítésére. *A távmérések középhibája 1mm-re, a tájékozások középhibája pedig 2,995"-re adódott.*

Alapponthálózati számításoknál olyan ellenőrzést is szoktam végezni, hogy azokon a pontokon, ahol 3-nál több irányzás történt, szabad álláspontot is számítok, így ellenőrizve, milyen maradék hibákra lehet számítani a hálózat használatánál.

Tekintve, hogy végül szintezésre nem került sor, a magassági adatokat trigonometriai hálózat számítással határoztam meg. Itt önkényesen a **102-es** pont magasságát fogadtam el, és ehhez igazítottam hozzá a többi pontot. Természetesen, ha valamikor éles munkákra kerül sor a munkaterületen, *ezt a hiányosságot mindenképp pótolni kell.*

### 3.3.2 Feldolgozás GeoEasy szoftverrel

A hálózatkiegyenlítést elvégeztem a GeoEasy szoftverrel is, ellenőrzésképpen.

Itt a paraméterezést egy kicsit máshogy oldottam meg.

#### **Számítási paraméterek:**

Vetületi redukció [mm/km]: **3.9**

Átlagos tengerszint feletti magasság [m]: **225.3**

Irány/zenit középhiba ["]: **2**

Táv. középhiba [mm]: **1**

Táv.középhiba [mm/km]: **1**



Először is egy rövid sokszögvonala pontjaként kiszámítottam a 104-es pont koordinátáit, melyen nem történt GPS mérés. Az alapponthálózatot szabad hálózatként számítottam ki úgy, hogy minden koordinátát és minden tájékozást előzetesnek fogadtam el. A szabad hálózatkiegyenlítés előnye, hogy kiesnek a kényszerek, melyeket a GPS mérések pontatlansága okoz, és jobb középhiba kép mutatkozik. [15]

Ezután kiszámoltam az álláspontokról mért poláris részletpontokat, és a kapott új koordinátákat szövegfájlba mentettem.

### 3.4 Térképezés CAD környezetben a georeferált analóg térképekről és helyszíni felmérésekből

A georeferált szelvényeket tiff-ként mentettem el, az illesztési paramétereket tfw kiterjesztésű fájlba mentve. Az így definiált fájlok ITR, illetve AutoDesk Civil3d szoftverbe egyszerűen beilleszthetők beágyazott funkcióval, de lisp rutinokkal egy egyszerű CAD környezetbe is behívhatók. Én az utóbbi módon jártam el.

A beolvasott raszteres állományok átláthatóságát (Transparency) 75-80% körülire állítottam, hogy az átfedések tartalma is jól látható legyen, valamint, hogy az átrajzolt vektorok jól elkülönüljenek a képek tartalmától.

A szerkesztést a *Magyar Mérnökkamara Geodéziai és Geoinformatikai Tagozat 2022-es szakmai útmutatójának* [16] Autocad sablon állományát felhasználva végeztem el. A szakmai útmutató ugyan tervezési térképekhez készült, viszont tekintve, hogy az alapja a régi M2 szabályzat, szerintem bármilyen mérnökgeodéziai feladathoz jó. Egységes, áttekinthető rétegekiosztása és az eredeti szabályzatban is használt jelkulcs készlete segítségével könnyen el lehetett végezni a térképi objektumok osztályozását, áttérképezését.

A burkolt felületeket egységesen GEOD\_BURKOLAT rétegen rajzoltam meg, az épületeket GEOD\_EPITMENY\_UZEMI\_EPULET fólián. A közművek esetében, ha egyértelmű volt, hogy az adott elem milyen szakághoz (vízellátás, távfűtés, hírközlés stb.) akkor ennek megfelelő rétegekben térképeztem. Ahol nem egyértelmű aknákat, szerelvényeket láttam, azokat egyszerűen a GEOD\_KOZMU rétegen vettem fel.

Először a vonalas létesítményeket értékeltem ki. A vonaltípus jelkulcsokból hamar felismertem, milyen kerítés, épület, burkolt felület határoló vonalat látok, ennek megfelelően választottam meg a rétegeket. Burkolatok esetén egyeneseket és íveket is tartalmazó vonalláncokat használtam. Szabályos négyzet, téglalap alakú zárt poligonok esetén rect (téglalap) paranccsal rajzoltam. Ez arra is jó volt, hogy ellenőrizsem, a derékszögű elemek vajon a georeferált raszterképen is 90 fokosak-e (torzulás).

Topológia szempontjából ügyeltem arra, hogy ne legyenek egymást keresztező, vagy el nem érő vonalak (overshoot, undershoot), ezek mindig csomópontokban találkozzanak egymással. Törekedtem arra, hogy a modern térinformatikai adatbázisoknak megfelelő geometriai adatokat hozzak létre, zárt poligonokkal, láncolatokkal.

Kör alakú objektumoknál, vagy olyan pontoknál, amelyeknek kör jelkulcsa van (pl. kerek aknák, alappontok), először 3 ponttal megrajzoltam a kört, majd ennek a körnek a centrálisába szúrtam be a jelkulcsot.

Ahol ortogonális terepi méreteket találtam a térképezett közmű nyomvonalakra vonatkozóan, ott inkább azokat szerkesztettem fel, a vonal átrajzolása helyett. Itt kisebb-nagyobb eltérések voltak a kettő között, valószínűleg csak grafikusán térképeztek, az ortogonális pontokat nem számították ki.

A térképek egyébként, ahogy korábban írtam, 1:250 méretarányban készültek. Jellemzően 0,18 vastagságú tollal szerkesztették a térképi objektumokat, ez a vastagság kicsit kevesebb, mint 5cm-nek felel meg a térképi méreteken kifejezve. Emiatt digitalizált térképről csak ilyen pontossággal lehet levenni pontokat., de fontos megjegyezni, hogy a pontosság nem a valós állapothoz, csupán a térképezetthez képest értendő.

A kiértékelés után a térképet kartografáltam. A részüik esésnyilait, A rámpák irány jelöléseit elhelyeztem a megfelelő helyre. A feliratokat az eredetihez munkarészen lévő helyére, megfelelő betűtípussal és mérettel helyeztem el. A rajzi nyomtatási és modell térben értelmezett méretarányát én is 1:250-re állítottam, a jelkulcsokat ennek megfelelően 0,25-ös méretaránytényezővel állítottam be.

Az örkereszteket elhelyeztem és a szelvény sarkokat megírtam. Ehhez szintén egy lisp rutint használtam.



## 4. EREDMÉNYEK

### 4.1 Georeferált archív térképek

Összesen 5 térképszelvényt georeferáltam, mindegyikből készült Affin transzformációs és TPS módszerrel is egy-egy verzió. A Quantum GIS szoftverben exportáláskor mindegyikhez létrehoztam egy beillesztési paramétereket tartozó tfw állományt. A tfw-k segítségével lehet CAD szoftverekbe behívni a georeferált képeket úgy, hogy azok geometriailag megfelelő helyükre kerüljenek.

A CAD-es feldolgozás során mindkét verziót beolvastam a programba, hogy gyakorlatban tudjam összehasonlítani őket. A vizsgálat során az alábbi szempontok szerint ellenőriztem:

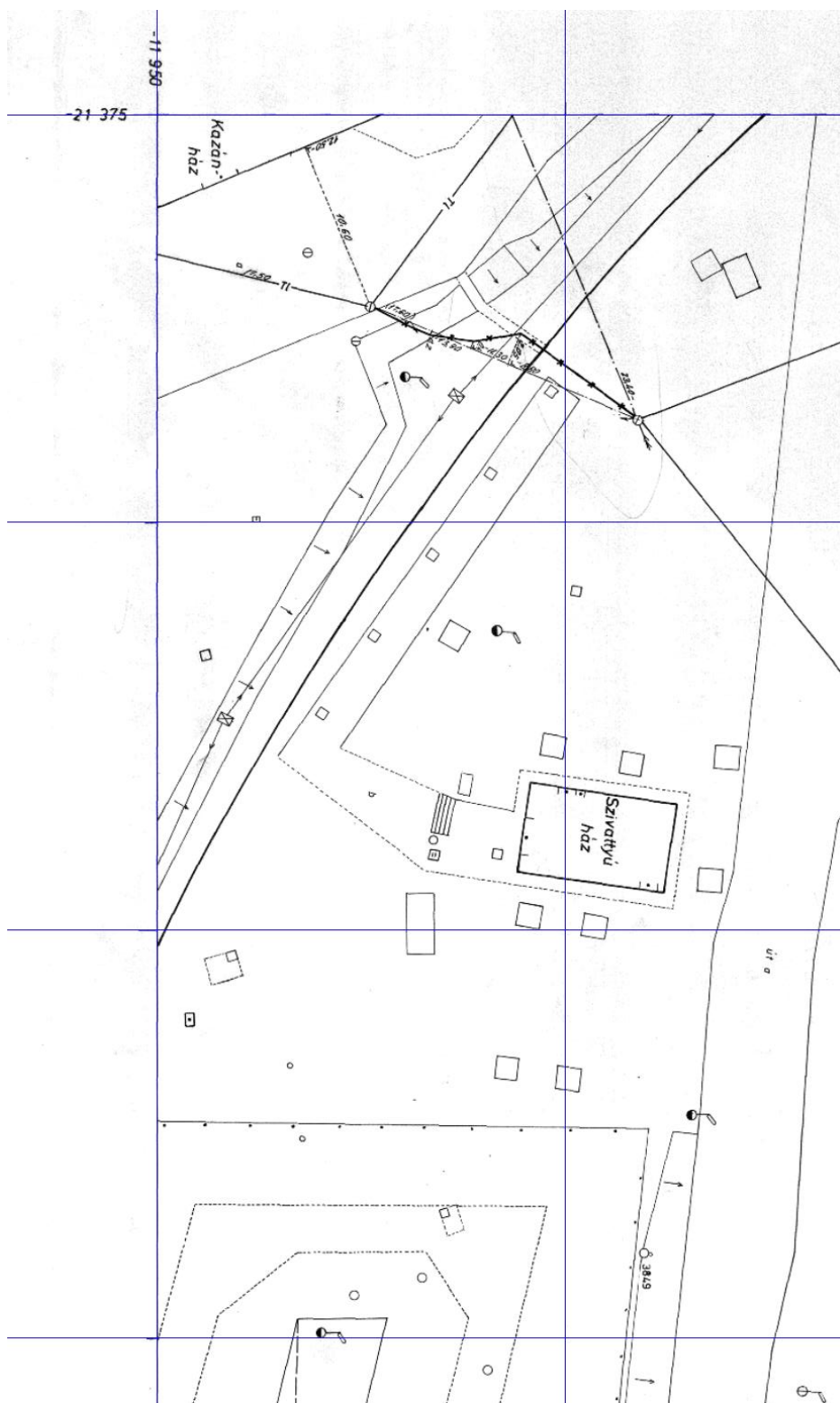
Szelvényhatárokon belül:

- A térképen egyenes vonalak mennyire maradnak egyenesek?
- A megírt abszolút hosszúságok mennyire egyeznek a vektorosan kiértékelt vonalak hosszával?

Szelvényhatárokon:

- 2 szomszédos szelvényen áthaladó vonalak mennyire torzulnak, milyen mértékű elrajzolódás tapasztalható?

Összességében elmondható, hogy a TPS módszerrel georeferált szelvények pontosabbak, a vektorizált vonalak hosszában és pozíciójában kb. 1-5cm, míg az Affin transzformáció esetében kb. 5-15cm eltérés tapasztalható.



10. ábra: Egy georeferált szelvény. A térinformatikai program derékszögű koordináta-hálója és ahogy a keretjelek illeszkednek rá. (forrás: saját kép)

## 4.2 Transzformációs paraméterek

Az OCAGE-ban elvégzett számítás a következő paramétereket eredményezte az ETRS89 ellipszoidcentrikus derékszögű, és a Budapesti Sztereografikus rendszer Bessel ellipszoidján értelmezett ellipszoid-centrikus derékszögű koordinátái közötti Bursa-Wolf transzformációhoz:

$$dX = -481.9608400687575$$

$$dY = 274.7421702146530$$

$$dZ = -821.1674267351627$$

$$A = 1.000016329765455$$

$$B = 1.534415034416450e-05$$

$$C = -3.699035172002861e-05$$

$$D = -6.417058776149191e-05$$

$$\varepsilon_x = 1.534389978187989e-05$$

$$\varepsilon_y = -3.698974768612464e-05$$

$$\varepsilon_z = -6.416953988795617e-05$$

Az epsilon értékeket természetesen itt radiánban kell értelmezni.

Ellenőrzésképpen először visszaszámoltam a kiinduló alappontokat a mértből, illetve ellenőrző számítást végeztem 3db, a gyárterület környezetében található olyan kisalapontra, melyek a transzformációban nem vettek részt, de mérés történt rajtuk. Mindkét esetben néhány centiméter pontossággal visszaadta a nyilvántartott koordinátákat, lásd a táblázatot:

3. táblázat: A Bursa-Wolf transzformáció elvégzése után a kiegyenlítés maradék hibái és az ellenőrzésként bemért városi alappontok eltérései, hibái.

| Számításba bevont pontok maradék hibái                       |                      |                      |                      |                            |                            |                            |              |              |              |
|--------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|--------------|--------------|--------------|
| psz                                                          | Y <sub>eredeti</sub> | X <sub>eredeti</sub> | Z <sub>eredeti</sub> | Y <sub>transzformált</sub> | X <sub>transzformált</sub> | Z <sub>transzformált</sub> | dy           | dx           | dz           |
| <b>2227</b>                                                  | 19371.37             | 10018.60             | 322.45               | 19371.33                   | 10018.59                   | 322.47                     | <b>0.04</b>  | <b>0.01</b>  | <b>-0.02</b> |
| <b>2060</b>                                                  | 18327.91             | 7118.97              | 278.19               | 18327.92                   | 7119.00                    | 278.18                     | <b>-0.01</b> | <b>-0.03</b> | <b>0.01</b>  |
| <b>2011</b>                                                  | 16014.02             | 11747.02             | 325.12               | 16014.05                   | 11747.04                   | 325.12                     | <b>-0.03</b> | <b>-0.02</b> | <b>0.00</b>  |
| <b>1106</b>                                                  | 23898.70             | 14836.76             | 304.01               | 23898.72                   | 14836.80                   | 304.00                     | <b>-0.02</b> | <b>-0.04</b> | <b>0.01</b>  |
| <b>2218</b>                                                  | 20234.75             | 12581.49             | 282.79               | 20234.73                   | 12581.44                   | 282.80                     | <b>0.02</b>  | <b>0.05</b>  | <b>-0.01</b> |
| Városi pontok (transzformáció számításban nem vettek részt.) |                      |                      |                      |                            |                            |                            |              |              |              |
| psz                                                          | Y <sub>eredeti</sub> | X <sub>eredeti</sub> | Z <sub>eredeti</sub> | Y <sub>transzformált</sub> | X <sub>transzformált</sub> | Z <sub>transzformált</sub> | dy           | dx           | dz           |
| <b>2216</b>                                                  | 21289.32             | 12747.42             | 239.87               | 21289.39                   | 12747.46                   | 239.78                     | <b>-0.07</b> | <b>-0.04</b> | <b>0.09</b>  |
| <b>2219</b>                                                  | 21200.09             | 12476.26             | 236.43               | 21200.09                   | 12476.25                   | 236.40                     | <b>0.00</b>  | <b>0.01</b>  | <b>0.03</b>  |
| <b>2220</b>                                                  | 21767.38             | 12368.72             | 230.88               | 21767.37                   | 12368.78                   | 230.86                     | <b>0.01</b>  | <b>-0.06</b> | <b>0.02</b>  |

A transzformáció számítás négyzetes középhibái:

VRMS: **0.004 m**

HRMS: **0.007 m**

### 4.3 Alapponthálózat

A mintaterületen egy 8 pontból és a 2 meglévő felmérési kőből álló alapponthálózatot határoztam meg. Az alappontok sztereografikus vetületben ismert koordinátákkal rendelkeznek. A magassági értékeik egyelőre az ellipszoidi magasságból levezetett értékek, de a hálózat bármikor beköthető az EOMA rendszerbe vonalszintezéssel.



11. ábra: A Ganz Árammérőgyár területén állandósított 8 db új alappont (101-108) és a hálózat részét képező két régi felmérési kő (3847, 3852). (forrás: saját kép)

A hálózat kielégíti az általános földmérési munkák elvégzéséhez szükséges elvárásokat. Mérési és kitűzési feladatok könnyen elvégezhetőek róla. Keretrendszert biztosít az elkészült térképi adatbázis aktualizálásához.

Mivel a GPS mérés és a poláris mérések jegyzőkönyve is rendelkezésre áll, a hálózat szükség esetén EOVS rendszerben, annak vetületi redukcióit alkalmazva újra számítható. Így felhasználható ingatlan-nyilvántartási vagy e-Közmű felmérési munkák alapjául is.



#### 4.4 Korszerű térképi adatbázis

A CAD rajzot úgy készítettem el, hogy az eredeti felmérés adatait és küllemét maximálisan megőrizze, ugyanakkor későbbi geoinformatikai adatbázis építésre is használható legyen. Természetesen ez a munkarész egy több, mint 30 éves állapotot örökít meg, a körmérés- és számítástechnikájának megbízhatóságával, annak minden hibájával együtt.

A térkép megbízhatóságának ellenőrzésére beolvastam a terepen mért ellenőrző pontokat.

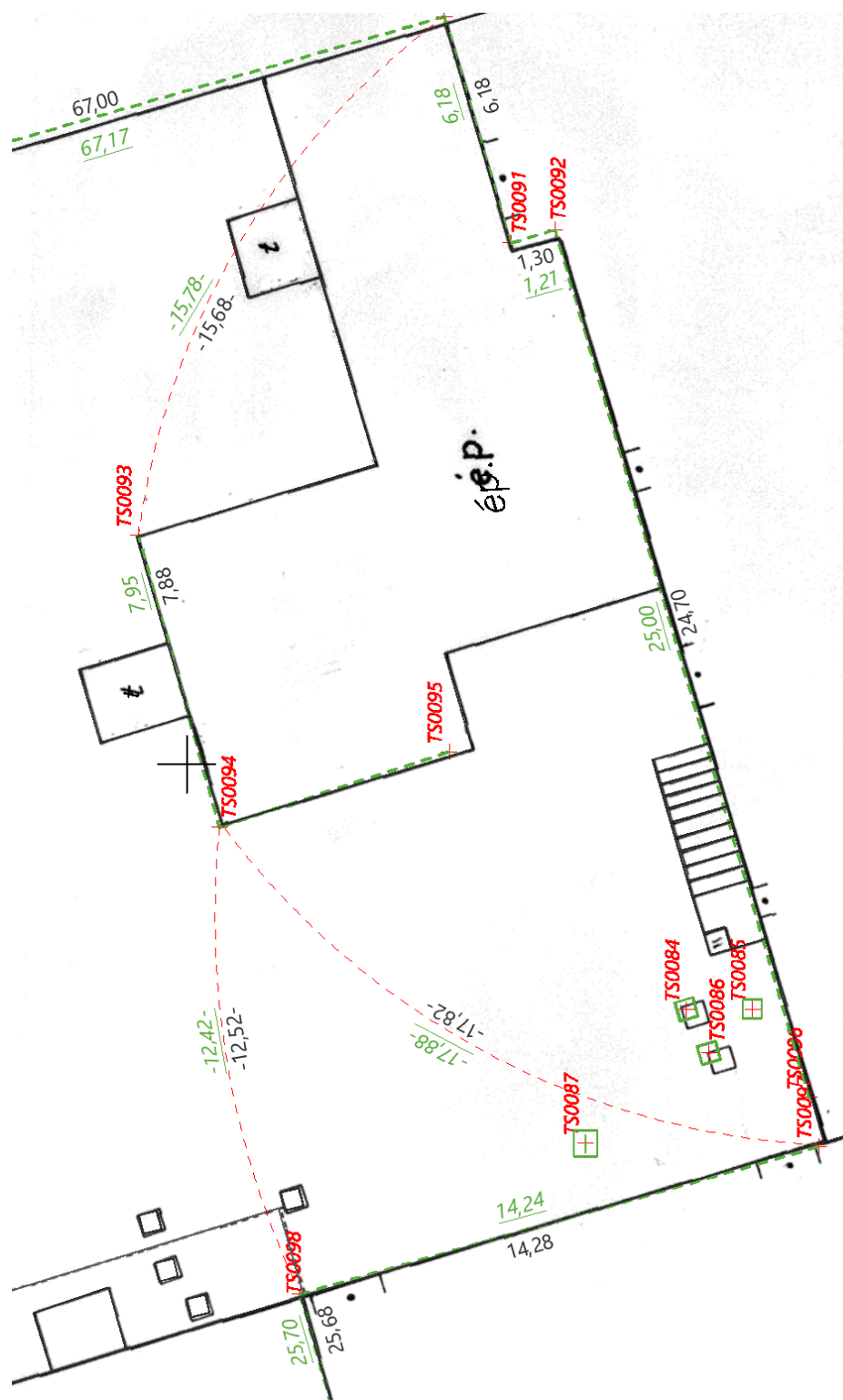
A teljesség igénye nélkül készítettem egy táblázatot néhány pont térképi és felmért helyzetéről, azok különbségéről:

4. táblázat: A helyszínen mért ellenőrző pontok és a georeferált térképeken kiértékelt részletpontok eltérései.

| psz              | Y <sub>mért</sub> | X <sub>mért</sub> | Y <sub>térképi</sub> | X <sub>térképi</sub> | dy    | dx    | d    | pontjelleg |
|------------------|-------------------|-------------------|----------------------|----------------------|-------|-------|------|------------|
| TS0044           | 21503.54          | 12149.25          | 21503.44             | 12149.01             | 0.10  | 0.25  | 0.27 | fedlap     |
| TS0127           | 21511.37          | 12065.10          | 21511.32             | 12065.05             | 0.05  | 0.05  | 0.07 | ép.sarok   |
| TS0036           | 21525.77          | 12155.58          | 21525.77             | 12155.58             | 0.00  | 0.01  | 0.01 | lépcső     |
| TS0098           | 21536.11          | 12072.04          | 21536.04             | 12072.00             | 0.07  | 0.04  | 0.08 | ép.sarok   |
| TS0161           | 21537.68          | 11995.27          | 21537.79             | 11995.30             | -0.11 | -0.03 | 0.12 | ép.sarok   |
| TS0062           | 21541.64          | 12143.33          | 21541.23             | 12143.35             | 0.41  | -0.02 | 0.41 | ép.sarok   |
| TS0084           | 21543.57          | 12061.91          | 21543.47             | 12061.70             | 0.10  | 0.21  | 0.23 | fedlap     |
| TS0094           | 21548.35          | 12074.15          | 21548.40             | 12074.07             | -0.04 | 0.08  | 0.09 | ép.sarok   |
| TS0089           | 21551.03          | 12132.82          | 21550.87             | 12132.62             | 0.16  | 0.20  | 0.26 | ép.sarok   |
| TS0030           | 21553.66          | 12163.81          | 21553.31             | 12163.85             | 0.36  | -0.03 | 0.36 | ép.sarok   |
| TS0053           | 21553.71          | 12162.06          | 21553.51             | 12162.01             | 0.21  | 0.05  | 0.21 | fedlap     |
| TS0093           | 21556.01          | 12076.27          | 21555.96             | 12076.31             | 0.05  | -0.04 | 0.07 | ép.sarok   |
| TS0025           | 21606.06          | 12166.10          | 21605.95             | 12165.98             | 0.11  | 0.12  | 0.16 | fedlap     |
| TS0173           | 21615.84          | 12014.61          | 21615.70             | 12014.73             | 0.14  | -0.12 | 0.18 | fedlap     |
| TS0008           | 21623.11          | 12166.89          | 21622.71             | 12166.73             | 0.39  | 0.15  | 0.42 | ép.sarok   |
| TS0018           | 21628.17          | 12173.91          | 21628.18             | 12173.77             | -0.01 | 0.14  | 0.14 | fedlap     |
| TS0177           | 21631.28          | 12071.71          | 21631.11             | 12071.88             | 0.17  | -0.17 | 0.24 | ép.sarok   |
| TS0186           | 21635.01          | 12125.82          | 21634.60             | 12125.92             | 0.42  | -0.10 | 0.43 | ép.sarok   |
| Átlagos eltérés: |                   |                   |                      |                      | 0.14  | 0.04  | 0.21 |            |

A számított négyzetes középhiba:

RMS: **0.032 m**



12. ábra: Georeferált szelvényre illesztve a helyszíni mérés. Láthatóak a bemért részletpontok, és a térkép-terep azonosítás vizsgálata összemérésekkel. Aláhúzott-dőlt: helyszíni méretek; álló: térképi (kiértékelt) méretek. (forrás: saját kép)

## 5. DISZKUSSZIÓ

A munkák megkezdése előtt sorra vettem, milyen nehézségek, buktatók lehetnek, és a projekt során ezeknek nagy részével találkoztam is, ezeket vagy az előre eltervezett módon, vagy egy új megoldás keresésével kellett kezelni.

A raszteres állományok georeferálásánál számítani lehetett arra, hogy a közel 40 éves térképlapok beszáradtak, az illesztőpontok kijelölése során hibák léphetnek fel. Az Affin transzformáció alkalmazásakor akár 10 cm-es maradék ellentmondások is megjelentek. Ezeket javítani egy magasabb fokú, polinomiális módszerrel lehet, ilyen volt a vékonylemez spline módszer, melyet az Affin mellett használtam. A módszer hátránya az, hogy nehezen lekövethető, nehezen ellenőrizhető. Ha a GCP-k eloszlása szabálytalan, vagy térképi helyzetük az eredeti térképezés hiányosságaiból adódóan nem megfelelő, könnyen alakulhatnak ki úgynevezett artefact-ok, műtermékek.

A polinomiális módszer tehát akkor alkalmazható, ha megfelelő számú, kellően pontos helyzetű és szabályos eloszlású GCP áll rendelkezésre. Egy-egy szelvényen 28 db keretjel és 6 darab rajzkereten belüli örkereszt látható. A széleken a keretjelek 25 méterenként, az örkeresztek 50 méterenként helyezkednek el. A szélektől befele tehát kissé szabálytalan az eloszlás, a térképlapok közepén, a 3 oszlopban, 2 sorban elhelyezkedő örkeresztek között a legkedvezőbb. Ezeken a területeken nagyon jól lehetett korrigálni a térképi adatokat, de a szélek mentén is 5cm-en belül sikerült egymáshoz képest a szelvényeket illeszteni. A módszer tehát jól alkalmazható, de csakis szabályos illesztő mező használatával és kellő mennyiségű ellenőrző mérés végrehajtásával.

Az alaphálózati transzformáció számítás is számos hibalehetőséget hordozott magában. Ha a kiinduló adatok nem megbízhatók, akár az eredeti sztereografikus adatok szempontjából akár, ha a saját méréseimben lépnek fel hibák, az mind rossz eredményhez vezet. Az alappontok kiválasztásánál ezért arra törekedtem, hogy olyan pontokat válasszak ki, amelyek között közvetlen iránymérések történtek, hogy a munkaterületem körüli alaphálózat relatív geometriája minél jobb legyen lokálisan.

A saját GPS méréseim szintén hibalehetőségeket hordozták magunkban. Az elmúlt időszakra jellemző aktív ionoszféra hatás miatt a terepi munkát meg kellett tervezni, az elő-

rejelzéseket a Lechner Tudásközpont Kozmikus Geodéziai Obszervatórium által üzemeltetett, **monitor.gnssnet.hu** weboldalon követtem figyelemmel. Az egyes pontok bemérését minden esetben legalább egyszer megismételtem eltérő időpontban.

A pontok magassági adatai is hordozhatnak magukban hibát. A 7 paraméteres Bursa-Wolf transzformáció végrehajtásához ugyanis a pontoknak nem csak a vízszintes, de a magassági adataira is szükség van. A negyedrendű vízszintes alappontok magassági értékei nem minden esetben centiméter pontosságúak. Gyakran csak trigonometriai magasságméréssel, deciméteres megbízhatósággal lettek meghatározva, hiszen a magasságmérésekhez a szintezési hálózatot használták fel.

A közös pontok egyenletes eloszlása itt is fontos, nem illeszkedhetnek egy egyenesre, és a munkaterületet nagy terjedelemben kell körülvenniük úgy, hogy súlypontjuk a munkaterületen helyezkedjen el.

A korábbiakban ismertetett, végleges számítási eljárást hosszú iterációs folyamat előzte meg. A számítás során a minimálisan szükséges 3 pont helyett 7 pontot használtam fel, és a végleges megoldásban csak azt az 5 pontot használtam fel, melyek a legjobban illeszkedtek egymáshoz. A kiugró hibákkal terhelt pontokat kihagytam a számításból.

A munkavégzés során szerzett tapasztalatom szerint a Bursa-Wolf paraméterek számítása nagyon érzékeny művelet, egy-egy kis változtatás is nagy eltéréseket okoz a végeredményben. Ezt a gyártelepen kívüli, városi negyedrendű pontokon, mintegy őrhálózaton vizsgáltam folyamatosan.

A 2. táblázatban látható, hogy néhány pontnak a sztereografikus koordinátái eredeti felmérésekből származnak, de transzformált koordinátával mindegyik rendelkezik. Ezt úgy kell érteni, hogy az EOVA felmérések után valamely lokális átszámítással lettek megadva a koordináták. Megfigyelhető, hogy az eltérő forrású adatok között nagy eltérések vannak.

Az EOVA alappontok sűrítése idején már jóval pontosabb eszközök álltak rendelkezésre a távolságméréshez. A hagyományos alapvonal méréseket ugyanis mérőláncokkal, később invar-drótokkal végezték. 8-10 km hosszú vonalakat mértek végig úgy, hogy az alapvonal minden 24 méterére karót helyeztek el, és a távolságot 6 drót segítségével mértek végig. Emellett végig is kellett szintezni, hogy a mért ferde távolságokat vízszintessé

lehesen redukálni, továbbá teodolittal mérniük kellett az egyenestől való eltérést. Az invar drótok komparálását egyébként a munkaterületemtől nem messze található Gödöllői alapvonalon végezték el. A Gödöllői alapvonalat pedig a Potsdamivel hasonlítottak össze. [17]

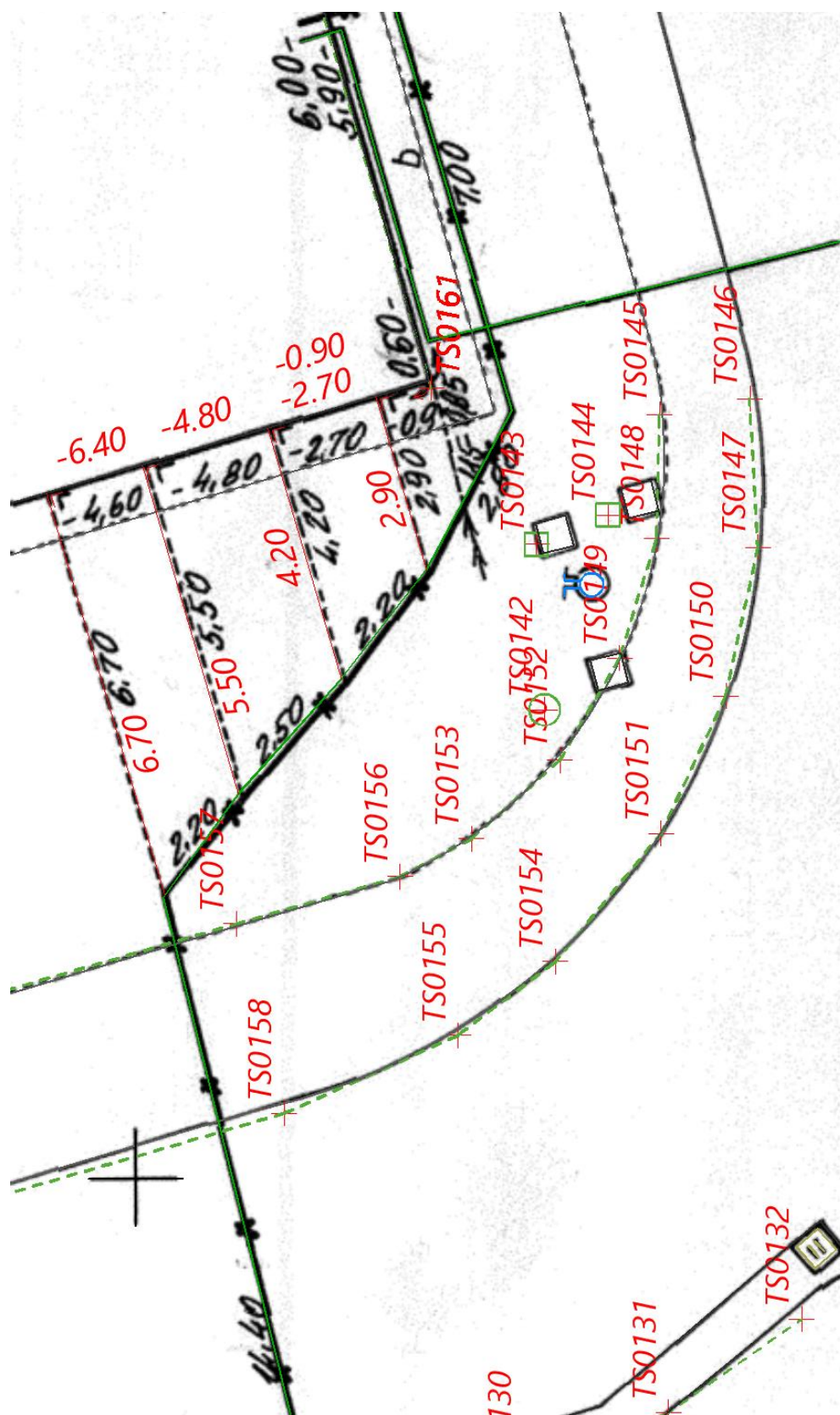
Ehhez képest a 20. század második felében már rendelkezésre álltak az elektrooptikai távmérő berendezések, melyek segítségével az alapvonal méréseket jóval kényelmesebben és pontosabban lehetett elvégezni. [17]

Ez a rövid szakmatörténeti kitekintés tehát megmagyarázza azt, hogy a régi, 19. századi vagy 20. század eleji koordináták között miért tapasztalható ekkora eltérés. A számítás során próbáltam az eredeti sztereografikus felmérések adatait felhasználni, egyértelmű volt, hogy nagy hibákat vittek bele a számításba. A végleges számítás során tehát már az EOV-ból átszámított sztereografikus koordinátákkal dolgoztam. Így az a koncepció, hogy a teljesen eredeti adatokra épülő hálózatot fogok kialakítani, megbukott, de ennek oka az, hogy ez a hálózat eleve olyan hibákat hordozott magában, amelyek egy korszerű geodéziai hálózattal szemben támasztott követelményeket már nem elégíti ki. Másrészt feltételezhető az is, hogy már a Ganz Árammérőgyár eredeti felmérési munkái során is ezeket az alapadatokat használták fel.

A számított transzformációs paraméterek néhány centiméter pontossággal jól működnek, a gyártelep területén és annak környezetében. Ezért további GPS alappontsűrítés során jól használhatóak az átszámításhoz. Továbbá számos korszerű mérőműszer kezelőfelületi szoftverében is definiálni lehet őket, így szükség esetén akár valós idejű műholdas méréseket is lehet velük végezni, közvetlenül a sztereografikus rendszerben.

Eleinte a digitalizálás kissé nehezen ment. Ilyen típusú feladatot nem sokat csináltam még, de szerencsére a második A0-s szelvény átrajzolása után már egészen rutinos lettem benne. Ettől függetlenül egy nagyon monoton feladat, tudtommal ma már ez a mesterséges intelligencia és gépi tanulás segítségével automatizálható. Persze a hibalehetőség, téves azonosítás lehetősége fennáll így is. Egyszer hallottam, hogy egy közmű szolgáltató egy külföldi (India) alvállalkozót bízott meg a nyilvántartási térképeinek digitalizálásával. Az elszámolás folyóméterben történt, az alvállalkozó a 0,5-ös tollal húzott nyomvonalak mellett a hasonló vastagságú szelvénykereteket is digitalizálta. És el is számolta.

Ilyet én a munka során nem csináltam, de azért nálam is történt elazonosítás. A térkép a felmért fákat is kis kör jelkulccsal ábrázolta, én ezekre automatikusan az „*AknaFedlap-Kor*” jelkulcsot helyeztem el. Kicsit gyanús volt, de nem elképzelhetetlen, hogy ennyi közmű szerelvény legyen egy ilyen kiterjedt ipari területen, ezért így hagytam. A terepi méréskor persze kiderült az igazság, viszont a hibát egyelőre nem orvosoltam.



13. ábra: Az ellenőrző mérés, a vektorizált térképi objektumok és a georeferált raszteres állomány összemácsolva, CAD szoftverben. (forrás: saját kép)

Az elkészült digitális térképeket is vizsgáltam a pontosság, megbízhatóság szempontjából. Voltak olyan térképi objektumok, amelyekre nagyon szépen illeszkedett a felmérés, akár épület, burkolat vagy tereptárgyak. Sok esetben azonban több deciméteres eltéréseket is láttam.

Ugyan néhány napig még próbáltam javítani az állományokon, viszont a Bursa-Wolf transzformációs eljárás és örkeresztekre történő illesztés bizonyult a legjobbnak. Nem sikerült tehát olyan lokális transzformációt számítani, például az épület sarokpontok vagy közmű szerelvények alapján, amellyel ugyanilyen mértékű hibák nem jelentek volna meg. Az eredeti felmérésen is látható például, ha egy épület falszakaszt választottak alapvonalnak, a mért és térképi végméretek eltértek, az általam polárisan felmért sarokpontok között azonban centiméter pontossággal ugyanazt a végméretet lehet levenni.

Próbáltam úgy is, hogy a két felmért eredeti kisalappontot használom fel a transzformációhoz, viszont ezek tényleges koordinátáit nem ismerem, a kiértékelt középpontokkal számolva pedig ezek önmagukhoz képest is 20-30 cm-t feszülnek. Ha valahol meg lehetne találni a felmérési alappontok eredeti koordinátajegyzékét, és legalább 4-5 ilyen pontot elszórtan, a munkaterület széleinél sikerülne felkutatni és bemérni, akkor abból lehetne egy másik paraméterezést számolni, de nem biztos, hogy jobb eredményekkel, mint a jelen szakdolgozatban bemutatott folyamat.

Utólag kiderült, hogy a telep földmérési alaptérképe fotogrammetriai eljárással készült, mindenféleképp kisebb méretarányban és pontossággal, mint az üzemeltetési térképek. A részletes felmérés során sokszor ezen térképek adataira támaszkodva, ortogonálisan történt a felmérés. Elképzelhető, hogy volt tahimetrikus eljárás is. A különböző mérési technikák alkalmazása okozza a térkép belső konzisztenciájának hibáit, de akár a kézi szerkesztésből is eredhetnek. Emellett nem szabad elfelejteni, hogy a felmérés óta eltelt több évtized során néhány helyen szemmel láthatóan változások mentek végbe. A könyvtár épület például egyértelműen átépítésre került.

Ennek ellenére úgy gondolom, hogy a rajta szereplő adatok felhasználhatók, egy részletes felmérés után kiegészítő adatok átvételére, a föld alatti közművek feltáráshoz mindenképpen segítséget nyújtanak.



## 6. ÖSSZEFOGLALÓ

Szakdolgozatom célja volt részletesen bemutatni a gödöllői Ganz Árammérőgyár üzemeltetési térképeinek korszerűsítését. A szakdolgozat első sorban a felmerülő vetülettani problémákat és azok megoldásait mutatja be.

A budapesti sztereografikus vetületű térképeket szkenneltem, majd az így kapott raszteres állományokat keretjelek és örkeresztek segítségével egy polinomiális módszerrel georeferáltam. A raszter térképeket CAD szoftverrel vektorizáltam. Elkészítettem egy digitális alaptérképet a Magyar Mérnöki Kamara Geodéziai és Geoinformatikai Tagozatának szakmai útmutatója alapján.

Tekintve, hogy a '80-as években elkészült térképek tartalmát aktualizálni is kell, az új felmérési munkákhoz egy keretrendszert is létre kellett hoznom az eredeti vetületben.

Ehhez először ki kellett számítanom egy lokális transzformációt a modern GPS műszerek által használt ETRS'89 rendszer és a Budapesti Sztereografikus vetület között. A számításhoz 5 db régi alapponton végeztem hosszútávú műholdas érzékeléseket, és meghatároztam az ETRS'89-en értelmezett geocentrikus koordinátaikat. A pontok eredeti sztereografikus koordinátaiból és tengerszint feletti magasságukból geocentrikus koordinátákat számoltam a sztereografikus vetület alapfelületét képző Bessel ellipszoidon. Az immár mindkét rendszerben ismert pontok alapján kiszámítottam egy Bursa-Wolf transzformációs eljárás 7 paraméterét. A transzformációs állandókkal néhány centiméteres pontossággal lehet átszámítani a két rendszer között.

A munkaterületen műholdas módszerrel, valamint hagyományos irány- és távméréssel új alapponthálózatot határoztam meg, melybe bevontam két eredeti felmérési alappontot is. Az alapponthálózat budapesti sztereografikus vetületben értelmezett, és alkalmas arra, hogy az elkészült digitális üzemeltetési térkép kiegészítő mérései elvégezhetők legyenek róla.

## 7. SUMMARY

The aim of my thesis was to present in detail the upgrading of high resolution map used for site management of Ganz Electricity Meter Factory in Gödöllő.

Generally, the thesis presents the projection problems that arise and their solutions.

I scanned the original maps interpreted in Budapest Stereographic Projection and georeferenced the resulting raster datasets by fiducial and tic marks using a polynomial method. The raster maps were vectorized using CAD software. I created a digital map based on the professional guidelines of Surveying, and Geo-information Division of the Hungarian Chamber of Engineers.

Given the need to update the content of the maps produced in the 1980s, I also had to create a framework for new surveys in the original projection.

To do this, I first had to calculate a local transformation between the ETRS'89 system used by modern GPS instruments and the Budapest Stereographic Projection. For this calculation I made long-range satellite observations on 5 old control points and determined their geocentric coordinates as interpreted by ETRS'89. I calculated geocentric coordinates on the Bessel ellipsoid used for the stereographic projection from the horizontal stereographic coordinates of the points and their altitude. Using the points now known in both systems, I calculated the 7 parameters of a Bursa-Wolf transformation. The calculated transformation coefficients allow us to convert between the two systems with an accuracy of a few centimeters.

I defined a new geodetic network in the study area using GNSS satellite methods and conventional direction and distance measurements, including two original control points. The new network is interpreted in Budapest Stereographic Projection and is suitable for additional surveys for the digital site management map.

## 8. IRODALOMJEGYZÉK ÉS FORRÁSJEGYZÉK

- [1] L. Bácsatyai, Vetülettan, Székesfehérvár, 2008.
- [2] G. Tímár, G. Molnár és G. Márta, „A budapesti sztereografikus, illetve a régi magyarországi hengervetületek és geodéziai dátumaik paraméterezése a térinformatikai gyakorlat számára,” *Geodézia és Kartográfia*, pp. 16-21, 2003.
- [3] G. Tímár és G. Molnár, Térképi vetületek és alapfelületek, Budapest: Eötvös Lóránd Tudományegyetem, 2013.
- [4] B. M. E. ÁGT, „EOV vetületi hossztorzulás kalkulátor,” [Online]. Available: [http://www.agt.bme.hu/on\\_line/hossztorzulas.html](http://www.agt.bme.hu/on_line/hossztorzulas.html).
- [5] T. Borza, A. Kenyeres és G. Virág, „Műholdas geodéziai vonatkoztatási rendszerünk (ETRS89) felújítása,” [gnssnet.hu](http://gnssnet.hu), 2007.
- [6] G. Octave, „<https://octave.org/>,” [Online]. Available: <https://octave.org/>.
- [7] K. Digikom, „GeoEasy,” Digikom Kft., [Online]. Available: [https://www.digikom.hu/szoftver/geo\\_easy.html](https://www.digikom.hu/szoftver/geo_easy.html). [Hozzáférés dátuma: 01 12 2023].
- [8] „Geozseni - Geodéziai és Térinformatikai Megoldások,” Intelligeo Kft., [Online]. Available: <https://www.geozseni.hu/>. [Hozzáférés dátuma: 01 12 2023].
- [9] „QGIS Geographic Information System. Open Source Geospatial Foundation Project,” QGIS.org, 2023. [Online]. Available: <http://qgis.org>.
- [10] „GDAL - GDAL documentation,” [Online]. Available: [gdal.org](http://gdal.org). [Hozzáférés dátuma: 01 12 2023].
- [11] „PROJ - PROJ 9.3.1. documentation,” [Online]. Available: [proj.org](http://proj.org). [Hozzáférés dátuma: 01 12 2023].

- [12] G. Molnár és G. Tímár, „A legjobb vízszintes illeszkedést biztosító Molodensky-paraméterek meghatározása azonos pontok adatai alapján,” *Geodézia és Kartográfia*, %1. szám2004.04., pp. 9-13, 2004..
- [13] K. CAD Design, „ZWCAD Magyarország - CAD Design Kft.,” ZWSOFT, [Online]. Available: [zwcad.hu](http://zwcad.hu). [Hozzáférés dátuma: 01 12 2023].
- [14] F. Papp, „Papp Ferenc földmérő honlapja,” [Online]. Available: <http://pf-prg.hu/>. [Hozzáférés dátuma: 01 12 2023].
- [15] Z. Síki, „Hálózat kiegyenlítés,” MMK-GGT Továbbképzési tananyag, 2016-2017.
- [16] Z. Síki, L. Csemniczky, D. Holéczyné Kajtár, M. Lehoczky, Z. Répás és I. Tóth, „Szakmai útmutató digitális tervezési alaptérképek készítéséhez A minőségi mérnöki munka segítése, a jó gyakorlat bemutatása, javaslat a térképek rétegszerkezetére és az alkalmazandó jelkulcsokra,” Magyar Mérnöki Kamara, Budapest, 2022.
- [17] B. Rónai és Z. Papp, „Országos vízszintes alaphálózati munkáink,” in *A BGTV munkái és eredményei*, Budapest, Budapesti Geodéziai és Térképészeti Vállalat, 1972, pp. 27-32.

## 9. ÁBRAJEGYZÉK

1. ábra: A Ganz Árammérőgyár üzemeltetői irodájában egy eredeti, '80-as évekbeli közmű helyszínrajz. A feladat ezen térképek tartalmából egy digitális térképi adatbázis elkészítése, és a változások vezetése helyszíni mérések alapján. (forrás: saját fénykép). 2
2. ábra: A Gyertyános alappont. 1926-ban állandósították, és a Budapesti Centrális Alapponthálózat egyik fő pontja is, alapvonal fejlesztő hálózati pont. A saját traszformáció számításomban szintén fontos szerepe volt. (forrás: saját fénykép)..... 10

|                                                                                                                                                                                                                                                                                            |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3. ábra: Egy nehezen kivitelezett pontraállítás és GPS mérés az Öreg-hegyen. A transzformációba bevont pontok felkeresése, mérése is izgalmas feladatnak bizonyult. (forrás: saját fénykép) .....                                                                                          | 12 |
| 4. ábra: A 3847 számú, eredeti felmérési alappont. Ilyen kis méretű, keresztvéséssel ellátott köveket használtak az eredeti felmérés során. A pont átszámított koordinátáit GPS-sel tűztem ki, és néhány centiméternyi föld eltávolítása után elő is került. (forrás: saját fénykép) ..... | 14 |
| 5. ábra: Irány- és távméréses alapponthálózati munka a gyártelepen. A transzformációval számított sztereografikus alappontok között sokszögvonalat vezettünk, és ellenőrző részletmérés is történt. (forrás: saját fénykép) .....                                                          | 15 |
| 6. ábra: A keretjelek és örkeresztek kijelölése, GCP-ként a georeferáláshoz, QGIS programban. Lent a GCP-k két rendszerbeli koordinátái és az Affin transzformáció maradék hibái. (forrás: saját kép) .....                                                                                | 21 |
| 7. ábra: A három átszámítási mód folyamatábrája [12].....                                                                                                                                                                                                                                  | 22 |
| 8. ábra: Az áthidaló Mologyenszkij formulák [3].....                                                                                                                                                                                                                                       | 23 |
| 9. ábra: A Bursa-Wolf transzformáció [3] .....                                                                                                                                                                                                                                             | 23 |
| 10. ábra: Egy georeferált szelvény. A térinformatikai program derékszögű koordinátahálójára és ahogy a keretjelek illeszkednek rá. (forrás: saját kép).....                                                                                                                                | 32 |
| 11. ábra: A Ganz Árammérőgyár területén állandósított 8 db új alappont (101-108) és a hálózat részét képező két régi felmérési kő (3847, 3852). (forrás: saját kép) .....                                                                                                                  | 35 |
| 12. ábra: Georeferált szelvényre illesztve a helyszíni mérés. Láthatóak a bemért részletpontok, és a térkép-terep azonosság vizsgálata összemérésekkel. Aláhúzott-dőlt: helyszíni méretek; álló: térképi (kiértékelt) méretek. (forrás: saját kép) .....                                   | 37 |
| 13. ábra: Az ellenőrző mérés, a vektorizált térképi objektumok és a georeferált raszteres állomány összemácsolva, CAD szoftverben. (forrás: saját kép) .....                                                                                                                               | 42 |

## 10. TÁBLAJEGYZÉK

|                                                                                                                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. táblázat: A Ganz Árammérőgyár eredeti üzemeltetési térképeinek bemutatása, összehasonlítása. ....                                                      | 8  |
| 2. táblázat A rendelkezésre álló alappontok adatai, pontszám, pontnév, koordináták, azok forrásai, valamint a felmérés vagy állandósítás ideje. ....      | 11 |
| 3. táblázat: A Bursa-Wolf transzformáció elvégzése után a kiegyenlítés maradék hibái és az ellenőrzésként bemért városi alappontok eltérései, hibái. .... | 34 |
| 4. táblázat: A helyszínen mért ellenőrző pontok és a georeferált térképeken kiértékelt részletpontok eltérései. ....                                      | 36 |

## 11. KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Elsősorban szeretnék köszönetet mondani a konzulensemnek, Dr. Molnár Gábor Péternek a támogatásért, a tanácsokért a projekt végrehajtásához, és a segítséget a dolgozat megírásához.

Továbbá Csörgits Péternek, akinek a szakmai irányítása alatt évekig dolgoztam és mindig fordulhatok hozzá szakmai tanácsért. Ez a szakdolgozatban bemutatott projekt terepi méréseinek megtervezése során sem történt másként.

Ezúton szeretnék megemlékezni Papp Ferencről, aki évtizedeken át tartó munkájával és saját fejlesztésű földmérési segédprogramjaival rengeteg földmérő kollégának a munkáját könnyítette meg. Munkássága, szakmai felkészültsége, és a programozásban való jártassága példaértékű a magyar földmérők számára.

Köszönöm a családomnak a támogatást az egyetemi tanulmányaim során.

Végül, de nem utolsó sorban szeretném megköszönni Lőrincz Viktornak, aki a szakdolgozatban bemutatott projekt szervezője, és aki a helyszíni mérésekben, és a kiinduló adatok gyűjtésében segítségemre volt.

## 12. FÜGGELÉK

### A transzformáció számítás OCATAVE kódja

format long

#A Mért WGS84 koordináták Bolnoka, Fehér-tető, Gyertyános, Öreg-hegy, Ór-hegy

Xwgs1= 4068436.3510

Xwgs2= 4070773.4330

Xwgs3= 4068333.8020

Xwgs4= 4063573.8870

Xwgs5= 4066339.0300

Ywgs1= 1425137.7970

Ywgs2= 1424840.8820

Ywgs3= 1421550.4250

Ywgs4= 1428248.3180

Ywgs5= 1425326.7960

Zwgs1= 4685525.9690

Zwgs2= 4683538.8330

Zwgs3= 4686700.7330

Zwgs4= 4688750.3190

Zwgs5= 4687223.3720

#A Bessel ellipszoidra átszámolt STG koordináták

#Bolnoka, Fehér-tető, Gyertyános, Öreg-hegy, Ór-hegy



Xbess1= 4067938.9200

Xbess2= 4070276.1600

Xbess3= 4067836.1600

Xbess4= 4063076.5400

Xbess5= 4065841.5000

Ybess1= 1425102.8700

Ybess2= 1424805.8000

Ybess3= 1421515.3800

Ybess4= 1428213.6700

Ybess5= 1425291.9500

Zbess1= 4684953.6700

Zbess2= 4682966.5800

Zbess3= 4686128.3900

Zbess4= 4688177.9200

Zbess5= 4686651.0600

#Az alakmátrix

A= [1,0,0,Xwgs1,0,Zwgs1,-Ywgs1;

1,0,0,Xwgs2,0,Zwgs2,-Ywgs2;

1,0,0,Xwgs3,0,Zwgs3,-Ywgs3;

1,0,0,Xwgs4,0,Zwgs4,-Ywgs4;

```

1,0,0,Xwgs5,0,Zwgs5,-Ywgs5;
0,1,0,Ywgs1,-Zwgs1,0,Xwgs1;
0,1,0,Ywgs2,-Zwgs2,0,Xwgs2;
0,1,0,Ywgs3,-Zwgs3,0,Xwgs3;
0,1,0,Ywgs4,-Zwgs4,0,Xwgs4;
0,1,0,Ywgs5,-Zwgs5,0,Xwgs5;
0,0,1,Zwgs1,Ywgs1,-Xwgs1,0;
0,0,1,Zwgs2,Ywgs2,-Xwgs2,0;
0,0,1,Zwgs3,Ywgs3,-Xwgs3,0;
0,0,1,Zwgs4,Ywgs4,-Xwgs4,0;
0,0,1,Zwgs5,Ywgs5,-Xwgs5,0]

```

#A b eredményvektor

```

b= [Xbess1;Xbess2;Xbess3;Xbess4;Xbess5;
Ybess1;Ybess2;Ybess3;Ybess4;Ybess5;
Zbess1;Zbess2;Zbess3;Zbess4;Zbess5]

```

#Az X elmozdulásvektor számítása; paraméterek

```
X=inv(A'*A)*(A'*b)
```

```
dX=X(1)
```

```
dY=X(2)
```

```
dZ=X(3)
```

$$A=X(4)$$

$$B=X(5)$$

$$C=X(6)$$

$$D=X(7)$$

$$E_x=B/A$$

$$E_y=C/A$$

$$E_z=D/A$$

#101-108 sorban aztan 3847, 3852

Xapw= [4066159.029;4066124.411;4066180.124;4066227.249;4066294.597;  
4066217.239;4066184.457;4066193.240;4066297.457]

Yapw= [1426755.415;1426730.566;1426638.167;1426621.780;1426682.453;  
1426793.736;1426774.166;1426629.586;1426672.781]

Zapw= [4686864.526;4686902.002;4686887.710;4686852.575;4686777.108;  
4686805.983;4686837.915;4686879.126;4686778.271]

format long

Xell= [4068436.3510;4070773.4330;4068333.8020;4063573.8870;4066339.0300]

Yell= [1425137.7970;1424840.8820;1421550.4250;1428248.3180;1425326.7960]

Zell= [4685525.9690;4683538.8330;4686700.7330;4688750.3190;4687223.3720]

Xvaros= [4065849.303;4066065.794;4065950.872]

Yvaros= [1426273.318;1426253.589;1426814.048]

Zvaros= [4687301.034;4687115.864;4687037.884]

Xvissz= dX+A\*Xell-D\*Yell+C\*Zell

Xvissz= dY+D\*Xell+A\*Yell-B\*Zell

Zvissz= dZ-C\*Xell+B\*Yell+A\*Zell

Xvarvissz= dX+A\*Xvaros-D\*Yvaros+C\*Zvaros

Yvarvissz= dY+D\*Xvaros+A\*Yvaros-B\*Zvaros

Zvarvissz= dZ-C\*Xvaros+B\*Yvaros+A\*Zvaros

Xapt= dX+A\*Xapw-D\*Yapw+C\*Zapw

Yapt= dY+D\*Xapw+A\*Yapw-B\*Zapw

Zapt= dZ-C\*Xapw+B\*Yapw+A\*Zapw