



ÓBUDAI EGYETEM
ÓBUDA UNIVERSITY

DOKTORI (PHD) ÉRTEKEZÉS

SZUCHY PÉTER

Rezgéscsillapítás párhuzamosan csatolt rugó-tömeg rendszerekkel

Témavezető: Prof. Dr. Cvetityánin Livia
Prof. Dr. Bíró István

Szigorlati/komplex vizsga bizottság:

Elnök:

Prof. Dr. Pokorádi László

Tagok:

Prof. Dr. Réti Tamás

Dr. habil Fekete Gusztáv

Dr. habil Czifra Árpád

Nyilvános védés teljes bizottsága:

Elnök:

Prof. Dr. Rajnai Zoltán

Titkár:

Bakosné Dr. Diószegi Mónika

Tagok:

Prof. Em. Dr. Patkó Gyula

Dr. Horváth Richárd

Prof. Dr. Kiss Péter

Bírálok:

Dr. Pinke Péter

Dr. habil Fekete Gusztáv

Nyilvános védés időpontja:

2023.

TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ.....	5
BEVEZETÉS	7
A tudományos probléma megfogalmazás	8
Célkitűzés(ek).....	8
A téma kutatásának hipotézisei	8
Kutatási módszerek	9
1 REZGÉSEK	10
2 REZGÉSEK ELLENI VÉDEKEZÉS	12
2.1 Dinamikus rezgés csillapító.....	14
2.2 Rezgésszigetelés	19
2.3 Metaanyagok	20
2.3.1 Optikai metaanyagok.....	21
2.3.2 Akusztikus metaanyagok.....	21
2.3.3 Mechanikus metaanyagok.....	27
3. A VIZSGÁLT AKUSZTIKUS METAANYAG MODELLJE.....	31
3.1 Tömeg-a-tömegben modell.....	31
3.2 Negatív effektív tömeg	32
3.3 Nem-lineáris tömeg-a-tömegben alrendszer.....	34
3.4 Negatív effektív tömeg a gyakorlatban	35
3.5 A „Tapéta”-jellegű metaanyag struktúra	37
4. MÉRÉSEK	56
4.1 Mérő rendszer kialakítása.....	56
4.2 Egy és két szabadságfokú alrendszer rezgés mérési tervei.....	58
4.3 Hajlított tartós modell leírása	60
4.4 Hajlított tartós modellen végzett mérések	65
5. SZIMULÁCIÓK	75

5.1	Öt szabadságfokú rezgő rendszer szimulációs vizsgálatai	75
5.2	Tömegek közötti csillapítás hatása a transzlációs modell gerjesztett rezgéseire.....	80
	ÚJ TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEK – TÉZISEK	82
	PUBLIKÁCIÓK LISTÁJA	83
	A tézispontokhoz kapcsolódó tudományos közlemények.....	83
	IRODALOMJEGYZÉK.....	85
	JELÖLÉSEK	91
	RÖVIDÍTÉSJEGYZÉK	93
	TÁBLÁZATJEGYZÉK	94
	ÁBRAJEGYZÉK	95
	FÜGGELÉK.....	99
	KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS.....	118

ELŐSZÓ

Többször érte már az a kritika a cikkeimet, hogy a tények tudományos és szakszerű rögzítése helyett elmesélem a kutatások történetét. Valóban hajlok arra, hogy színes kalandként jelenítsem meg az eseményeket, mivel bennem így élnek. Engedjék meg nekem, hogy csak itt, ebben az előszóban, saját stílusomban írjam le, mi hogyan történt.

A kutatás úgy kezdődött, hogy Lívia Cveticanin professzor asszony meglátogatta intézményünket, és mikor velem találkozott, felvetett egy roppant érdekes kutatási témát: a jugoszláv háborúban lelőtt és általuk bevizsgált F-117 Nighthawk Lopakodó különleges, radar hullámok elnyelésére készített bevonatának technológiáját át lehetne ültetni a mechanikus rezgések elleni védekezésbe. Ennek módja egy „negatív effektív” tömeg létrehozása egy tömeg-a-tömegben rendszerben. Mechanika tanárként és háborús filmek kedvelőjeként rögtön megfogott a téma, és nekiláttunk az elmélet kidolgozásának másik témavezetőmmel, Bíró István dékán úrral hármásban. A hagyományos translációs modell leírására a számomra rendkívül informatív forgóvektoros megközelítést választottam, amit sikerrel alkalmaztam két szabadságfokú, lineáris karakterisztikájú rendszer esetében. Ezzel megnyílt az út a főtömeghez több tömeg párhuzamos csatolása esetében is, aminek hatására megálmodtam a „tapéta” jellegű metastruktúrát, öt szabadságfokkal. Közben sikertelenül próbálkoztam a nem-lineáris rendszer forgóvektoros megoldásával, melyet majdnem egy éve Cveticanin Professzor asszony sikerrel megoldott. 2018 őszén döntés született, hogy az elmélet vizsgálatára hajlított tartós megoldású, öt szabadságfokú, befogott tartón végzett mérésekre lesz szükség. Az ehhez szükséges eszközök beszerzése egy évig tartott, ami alatt kidolgozásra kerültek a hajlított tartós modellre vonatkozó elméleti alapok, amelyek sokkal bonyolultabbak voltak az eredeti translációs modellhez képest. A mérések kezdetére sajnos megérkezett a pandémia miatti online élet is, aminek hatására a teljes mérő rendszert haza telepítettem. A gerjesztés nélküli egy szabadságfokú mérések szépen haladtak, a kapott eredményeket online egyeztettem témavezetőimmel. Az eredmények pontosítása érdekében be lett vezetve a rugalmas befogás elmélete, amihez a rugók tömegének redukálása is megtörtént. A két szabadságfokú rendszerek mért saját frekvenciái már nem elhanyagolható mértékű eltérést mutattak az elméletihez képest, s itt jelentkezett először a tartó kitérítési módjának kérdése: a legvégén kitérítve a befogott tartót csak egy saját frekvenciát kaptam, mivel a két tömeg tökéletesen azonos fázisban rezgett. A három szabadságfokú rendszer esetében csak két saját frekvenciát tudtam kimérni, és emiatt visszanyúltam a matematikai modell elméleti vizsgálatához.

Kiderült, hogy egészen kicsiny csillapítás is eliminálja a közbülső saját frekvenciát, és csak a legnagyobb és legkisebb saját frekvencia mérhető ki.

A méréseket követően a szimulációra helyeztem a hangsúlyt: az öt szabadságfokú translációs és hajlított tartós modellek összehasonlítása, valamint a csillapítások rezonancia frekvenciára gyakorolt hatása került előtérbe.

Itt tartok most, de a kutatás még koránt sem fejeződött be. A továbbiakban az elmélet továbbfejlesztése érdekében a „tapéta”-jellegű metaanyag elemi cellájának a fizikai és matematikai modelljét szeretném felírni, ahol a csatolt tömeget leszorító rugalmas anyag alakváltozása alapján meghatározható lesz a rugóállandó.

BEVEZETÉS

Az értekezésben először röviden foglalkozom a rezgésekkel, kiemelve azok negatív hatásait, majd áttérek a rezgések elleni védekezésre. Szem előtt tartva a kutatás témáját, a csatolt rugó-tömeg rendszereket, a dinamikus rezgés csillapítás és a metaanyagok szakirodalmi feldolgozása következik. A metaanyagok rendkívül széles spektrumú témakörének bemutatásában célirányosan az akusztikus metaanyagokra, azon belül is a fononikus kristályokra helyeztem a hangsúlyt. A továbbiakban a kutatási téma elméleti megalapozása következik, ahol a rezgések leírásában a számomra rendkívül informatív forgóvektoros megközelítést hoztam előtérbe, amit sikerrel alkalmaztam két szabadságfokú, lineáris karakterisztikájú rendszer esetében. Ezzel megnyílt az út a főtömeghez több tömeg párhuzamos csatlakoztatására is, aminek hatására megálmodtam a „tapéta” jellegű metaanyagot, öt szabadságfokú rendszerrel. Ennek kiterjesztése n szabadságfokra található az I. tézisben. Az elmélet gyakorlati mérésekkel történő alátámasztására hajlított tartós modellt választottam, melynek fizikiai és matematikai leírása következik. Az eredmények pontosítása érdekében be lett vezetve a rugalmas befogás elmélete (II. tézis), amihez a rugók tömegének redukálása is megtörtént. A méréseket követően a szimulációra helyeztem a hangsúlyt: bemutatom az öt szabadságfokú transzlációs és hajlított tartós modellek összehasonlítására kidolgozott módszert (III. tézis), valamint a csillapítások rezonancia frekvenciára gyakorolt hatását (IV. tézis).

A tudományos probléma megfogalmazás

A rezgések sok gondot okoznak az emberi szervezetnek és a műszaki alkotásoknak egyaránt. Emiatt nagy erővel folynak a rezgés hatásának csökkentésére irányuló kutatások, melyek közül az elmúlt húsz évben kiemelkedett a metaanyagok kutatása, ahol az anyag elsődleges tulajdonságait annak szerkezete szolgáltatja. A metaanyagok közül az akusztikus metaanyagok alkalmasak az általam megcélzott 1000 Hz alatti frekvencia tartományban létrejövő rezgések mérséklésére, célszerűen megtervezett kialakításuknak köszönhetően. Ezek közül is a „tömeg-a-tömegben” rendszer került előtérbe, ahol az általam kitalált „Tapéta”-jellegű akusztikus metaanyag rezgéscsillapító tulajdonságainak vizsgálata folyt.

Célkitűzés(ek)

„Tapéta”-jellegű akusztikus metaanyag leírása translációs és hajlított tartós n -szabadságfokú, gerjesztett, csillapított vibrációs mechanikai és matematikai modellekkel, ahol a fő tömeghez $n-1$ darab párhuzamosan csatolt tömeg tartozik. A modellek vizsgálatának célja olyan, a gyakorlatban is alkalmazható, tömeg-a-tömegben elrendezésű akusztikus metaanyag fizikai tulajdonságait leíró paramétereinek meghatározása, amellyel alkalmassá válik a fő tömeget érő gerjesztés hatásának jelentős csökkentésére, egyes speciális esetekben megszüntetésére. A modell lehetővé teszi a metaanyag paramétereinek célszerű beállításával a rezgéscsökkentés hatékony megvalósítását a kívánt gerjesztési frekvencia tartományban.

A téma kutatásának hipotézisei

- A rezgés amplitúdójának csökkenése érhető el célszerűen megtervezett, párhuzamosan csatolt tömegekkel („Tapéta”-jellegű akusztikus metastruktúra) a csatolmányok saját frekvenciái körüli frekvencia-tartományban.
- Amennyiben a fő tömeget érő külső gerjesztés frekvenciája valamelyik párhuzamosan csatolt tömeg saját frekvenciájának közelébe ér, a csatolt tömeg (rezonanciája folytán) átveszi a fő tömegetől a mozgási energiát és lelassítja azt.
- A többi párhuzamosan csatolt tömeg nem befolyásolja ezt a jelenséget (amennyiben kellő távolságot biztosítunk a csatolt tömegek saját frekvenciái között), így adott gerjesztési frekvencián csak egy csatolt tömeg fog rezonálni.
- A csatolt tömegek rugóinak nem-lineáris rugókarakterisztikái esetén a lineáris rugókarakterisztikákhoz képest szélesebb megállító sáv adódik.

Kutatási módszerek

- Irodalomkutatás
- Elméleti módszerek:
 - Mechanikai modellek felállítása és matematikai leírása.
 - Főtömeg rezgési amplitúdójának számítása a gerjesztési frekvencia függvényében analitikus és numerikus megoldással, valamint végeelem analízissel.
- Gyakorlati módszerek:
 - Hajlított tartós modell kidolgozása a mérés gyakorlati megvalósíthatósága érdekében.
 - Előzetes számítások alapján 3D szilárdtest modell készítése, majd az abból nyert fizikai adatok (tömeg, méret, stb.) alapján a rendszer előállítása, a sajátfrekvenciák kimérése.

1 REZGÉSEK

Rezgésnek nevezzük azt a mozgást, amikor a vizsgált test egyenes vonalú, adott határok közötti mozgása során a sebességvektor legalább kétszer irányt vált. Legtöbbször periodikus gerjesztésekkel találkozunk a mindennapi gyakorlatban, és emiatt számunkra a periodikus rezgések a meghatározóak. Ezek Fourier-sorba fejtése után harmonikus rezgőmozgást kapunk, ezért a vizsgálatom ezekre a gerjesztett rezgésekre fog kiterjedni.

A rezgéseket sokféle szempont szerint kategorizálhatjuk:

- időbeli lefolyása szerint: harmonikustól az ütés-szerűig többféle rezgés
- mozgás jellege szerint: translációs, rotációs rezgés
- szabadságfok szerint: egy- vagy több szabadságfokú
- csillapítás szerint: csillapítatlan vagy csillapított
- gerjesztés szerint: szabad vagy gerjesztett rezgés
- összetevők karakterisztikája szerint: lineáris vagy nem-lineáris rezgés.

A rezgések mozgásegyenletei a későbbiekben kerülnek bemutatásra. A kiindulási alap a translációs rezgés lesz, amit forgóvektoros ábrázolással fogok leírni.

Rezgések hatása

A rezgések különleges helyet foglalnak el a műszaki életben: egyrészt pozitív hatásúak, amikor a rezgő mozgás a működés feltétele (pl. rosták, tömörítő gépek), másrészt negatív hatásúak, mivel az emberi szervezet és a műszaki szerkezetek is érzékenyek bizonyos rezgésekre.

Az emberi szervezetre a rezgések negatív, akár kóros hatással is lehetnek. Kisebb behatás esetén csak kényelmetlen érzés, teljesítménycsökkenés léphet fel, később alvászavar, koncentráció csökkenése, vérnyomás növekedése, vagy akár organikus eltérések is létrejöhetnek. Különböző rezgésekre a szervezet eltérő részei érzékenyek: pl. alacsonyabb frekvenciájú és nagyobb amplitúdójú rezgéseket a csontok, ízületek nyelnek el, míg magasabb frekvenciájú, kisebb amplitúdójú rezgések a lágy részeket károsítják. A rezgés károsító hatása szempontjából igen fontos a behatolási kapu (expoziáció) helye [1-2]:

- Lokális, ami általában a kezét jelenti. Leggyakoribb okozói a kézi szerszámok: légkalapács, ütvefúró, láncfűrész, lapvibrátor, stb.
- Általános, azaz egész testre ható. Leggyakoribb okozói a munkagépek, nehézgépek (traktor, rakodó- és kotrógépek, stb.) és a gépalapok.

Számos egyéb tényező is befolyásolja a károsodást (pl. hideg, páratartalom, fizikai kondíció, stb.), melyeket itt nem részletezek.

Az emberre negatív hatással bíró rezgések egy speciális formája a zaj. Az emberi fül 20 - 20 000 Hz tartományban képes a rezgéseket érzékelni a belső fülben található Corti-féle szerv szőrsejtjeinek segítségével. Intenzív zaj hatására ebben a szervben a következő hallórendszeri károsodások lépnek fel [3]:

- Hallás adaptáció: a hallásküszöb körüli hang hatására a küszöb megemelkedik már néhány percnyi behatásra is, így azt már nem halljuk tovább.
- Hallás fáradás: hosszan tartó, nagy intenzitású inger hatására a szőrsejtek reverzibilisen károsodnak, ami a hallásküszöb emelkedéséhez vezet. Azt ingert követően egy bizonyos feléledési idő alatt a fül regenerálódik, a küszöb visszatér az eredeti szintre.
- Hangtrauma: amennyiben a feléledési idő alatt újabb zaj éri a Corti-szervet, akkor az elváltozás irreverzibilissé válik.

A hangnyomásszint emelkedése jelentősen növeli a károsodás mértékét [4]:

- 30 dB felett pszichés problémák jelentkeznek,
- 65 dB felett vegetatív problémák keletkeznek,
- 90 dB felett hallószerv károsodása következik be,
- 120 dB felett fizikai fájdalom lép fel,
- 160 dB-nél átszakad a dobhártya,
- 175 dB fölött halált okoz

A műszaki szerkezetek is érzékenyek bizonyos rezgésekre, gondoljunk például a fáradásos törésre, épületek esetében a földrengésre, hidak esetében a szél okozta rezonanciára. Kevésbé látványos hatása lehet a rezgésnek például az erősebb kopás, a gyártott termék minőségének csökkenése, a mérőberendezések hibás mérése, vagy gépjárművek esetében a stabilitás és kormányozhatóság csökkenése [5].

Viszont a gépek állapotáról, egyes meghibásodásokról a rezgések alapján is nyerhetünk információt, emiatt a rezgésdiagnosztika az utóbbi évtizedekben jelentős fejlődésen ment keresztül. A rezgésdiagnosztika eszköztárával akár bontás nélkül, működés közben kaphatunk információt a gép működéséről, állapotáról, annak változásáról.

2 REZGÉSEK ELLENI VÉDEKEZÉS

Az utóbbi években a géptervezés egyik kiemelten fontos feladata az, hogy csökkentse a zaj és vibráció szintjét az emberi hallás alacsonyabb frekvencia-tartományában, 0,1-1 kHz között. Denis szerint a rezgés kontrollnak két típusa van: a passzív és az aktív. A rezgés szintjének passzív kontrollja rendszerint vagy a szerkezet saját frekvenciájának a működtetési frekvencia sávból történő kimosztását célozza meg, vagy (ha ez nem lehetséges) a rezonancia amplitúdó nagyságának csökkentésére törekszik a saját frekvencia meghagyása mellett, rezgéscsillapítás segítségével [6, p 2]. Az aktív kontroll a rezgés kibocsátására fókuszál.

A rezgés elleni védekezések kategorizálásához induljunk ki a transzmissziós modellből (1. ábra):



1. ábra Rezgés terjedése az emissziótól az immisszióig.

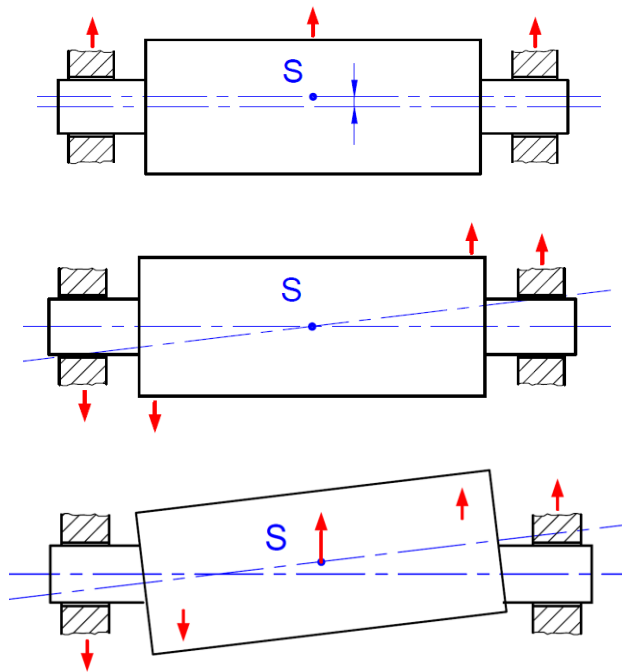
A rezgések negatív hatásának csökkentésére különböző eszközök állnak rendelkezésre a következők szerint:

1. A rezgés megszüntetése vagy a kibocsátott energia csökkentése a forrásnál.
2. Rezgések transzmissziójának csökkentése. Rezgés elnyelése, szigetelés.
3. Rezgés hatásának csökkentése a befogadó részéről. Ezek eltérő megoldások emberi és gépi oldalon, ezekre a disszertáció nem terjed ki.

Nézzük meg az első két pontot részletesebben:

Természetesen mindig a legjobb megoldás a rezgés okának a megszüntetése, illetve ha arra nincs mód, akkor legalább a kibocsátási energia redukálása. Ez történhet rezgésszegény technológiák felhasználásával, vagy utólagos rezgéscsökkentéssel. A teljesség igénye nélkül nézzünk néhány példát:

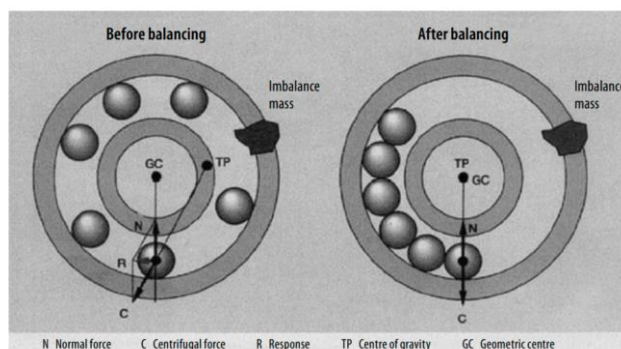
A gépek környezetében az egyik leggyakoribb rezgésforrás a forgó alkatrészek kiegyensúlyozatlanságából ered, amit megfelelő kiegyensúlyozással lehet mérsékelni. Statikus kiegyensúlyozatlanság esetén a forgó rész tömegközéppontja nem esik rá a forgástengelyre, míg a dinamikus kiegyensúlyozatlanság esetén a forgástengely és a forgórésznek a forgástengelyhez legközelebb álló tehetetlenségi főtengelye tér el egymástól (2. ábra) [7, pp 347-350].



2. ábra Statikus (fent), dinamikus (középen) és összetett (lent) kiegyensúlyozatlanság
Természetesen ez a két lehetőség egyszerre is fennállhat összetett (páros) kiegyensúlyozatlanság esetén. A megengedett maradó kiegyensúlyozatlanságra irányértékek vannak kidolgozva. [7, p 350]

Őrlőgép forgórészének automatikus kiegyensúlyozására mutat példát az 3. ábra [2].

Figure 8.2: Auto-balancing system for grinders (Donati and Bitsch, 1991)



3. ábra Őrlőgép automatikus kiegyensúlyozó rendszere [2]

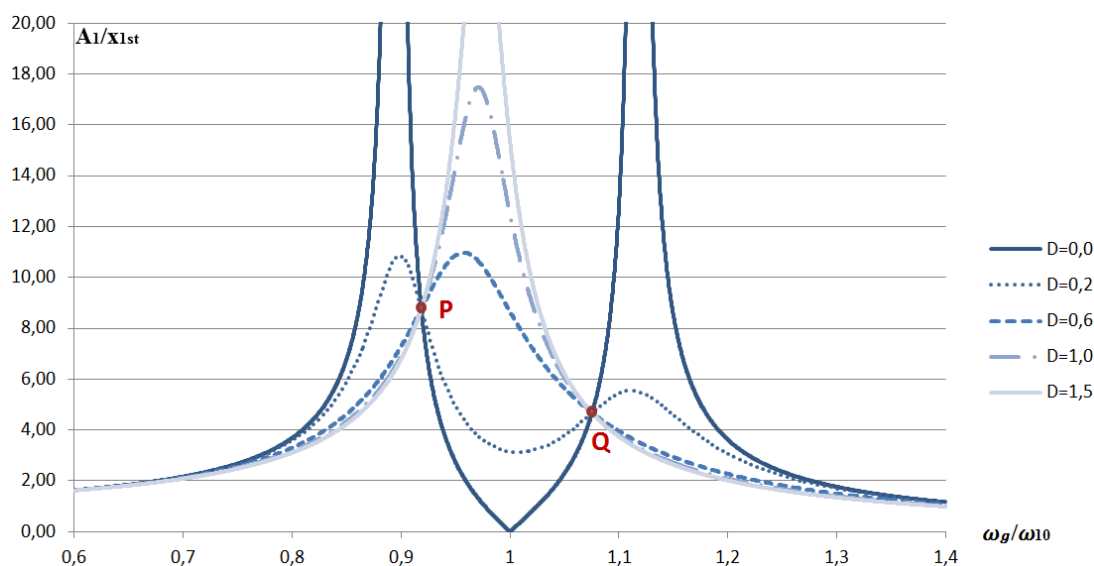
A forgórészre felragadt plusz tömeg eltávolítja a tömegközéppontot a geometriai középponttól. A forgórész most már az új súlyponti tengely körül forogva a kiegyensúlyozó golyókat a plusz tömeggel ellentétes oldalra mozgatja, ami a forgórész tömegközéppontját visszatéríti a geometriai középpontba.

A következő, zajcsökkentő műszaki megoldási példa mindenki számára ismerős: a személygépkocsi hátramenetben sokkal nagyobb zajt kelt, mint előremenetben. Ennek oka pedig a hajtómű fogaskerékpárjaiban rejlik: a sokat használt előremeneti fogaskerékpárok

ferde fogazással készülnek (amelyek drágábbak ugyan, de halkabb járásúak, mint az egyenes fogazásúak), míg a ritkábban használt hátramenetre egyenes fogazásúakat használnak (ahol a nagyobb zaj egyben figyelemfelkeltő hatású is).

2.1 Dinamikus rezgés csillapító

A rezgés keletkezésének és terjedésének bármelyik szakaszában találkozhatunk dinamikus rezgés csillapítással (Dynamic Absorbers, DA), amely egy megfelelően méretezett egy szabadságfokú rendszer (csatolt alrendszer) fő tömeghez történő csatlakoztatásával jön létre. Emiatt a rendszer szabadságfoka és ezzel a rezonancia frekvenciák száma is eggyel nő, de ha a csatolt tömeg és a fő tömeg közötti csillapítás kellően alacsony, akkor a rendszer működtetési frekvenciája környékéről elhangolhatóak a saját frekvenciák. A dinamikus rezgés csillapítás elméletét elsőnek J. P. Den Hartog dolgozta ki még a XX. század elején [5, 7], matematikai modelljét a két szabadságfokú rezgésnél mutatom be a későbbiekben. Az általa vizsgált (és számunkra is legfontosabb) rezonancia görbe (4. ábra) egy két szabadságfokú (2-DoF) rezgési példán keresztül kerül bemutatásra. A példában alkalmazott adatok a következők: gerjesztő erő: $F_0=1$ N; fő tömeg: $m_1=1$ kg; $s_1=2500$ N/m; $\omega_{10}=\sqrt{s_1/m_1}=50$ rad/s; $k_1=0$ Ns/m; csatolt tömeg: $m_2=0,05$ kg; $s_2=125$ N/m; $\omega_{20}=\sqrt{s_2/m_2}=50$ rad/s; k_2 értéke változó.



4. ábra Különböző csillapítású rezonancia görbék a P és Q invariáns pontokkal

Látható, hogy amikor a két tömeg között nincs csillapítás (ahol $D=k_2/(2m_1\omega_{10})=0$), a rendszernek két rezonancia pozíciója van, valamint $\omega_g=\omega_{10}$ gerjesztési frekvencia esetén a fő tömeg megáll. Amint a két test közötti csillapítási tényező (k_2) értéke növekszik, a

rezonancia görbék jellege változik, és a főtömeg többé nem áll meg. $D=0,32$ értékű csillapítási viszonzszám esetén már csak egy rezonanciahely létezik, végtelen nagy csillapítás pedig a két testet egy merev testté alakítja. Bármekkora is a két test közötti csillapítás, a rezonancia görbék mindig átmennek két invariáns ponton (P és Q). Akkor lesz egy dinamikus rezgéscsillapítás a legjobban elhangolva, ha a saját frekvencia viszonyok a következők (levezetés mellőzésével):

$$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \quad (1)$$

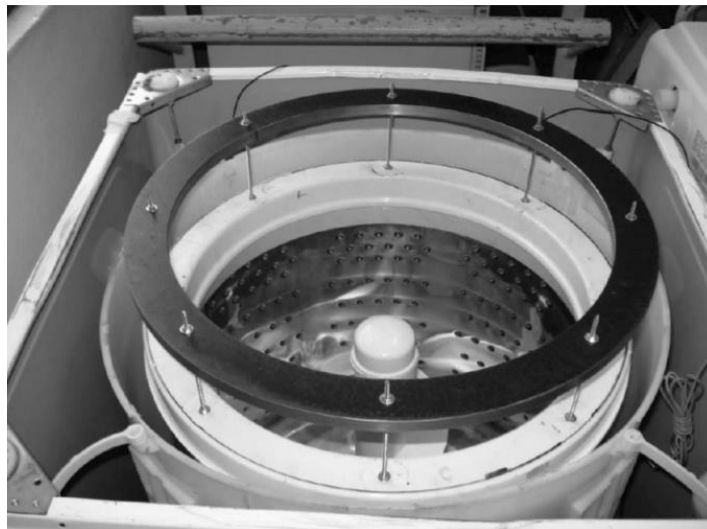
Ekkor a legkedvezőbb csillapítás úgy jön létre, ha a P és Q pontok azonos magasságban vannak (azonos az ordinátájuk) [7, pp 384-387]:

$$\left(\frac{A_1}{x_{1st}}\right)_P = \left(\frac{A_1}{x_{1st}}\right)_Q = \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \quad (2)$$

$$D_{opt} = \sqrt{\frac{3\frac{m_2}{m_1}}{8\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)^3}} = \frac{(k_2)_{opt}}{2m_1\omega_{10}} \quad (3)$$

A dinamikus rezgéscsillapító eszközöknek rendkívül kiterjedt szakirodalma van, kezdve a magas épületek szellőkés elleni rezgésvédelmétől [8] a nagy sebességű megmunkálásig [9]. Ezek közül csak néhány megoldást mutatok be:

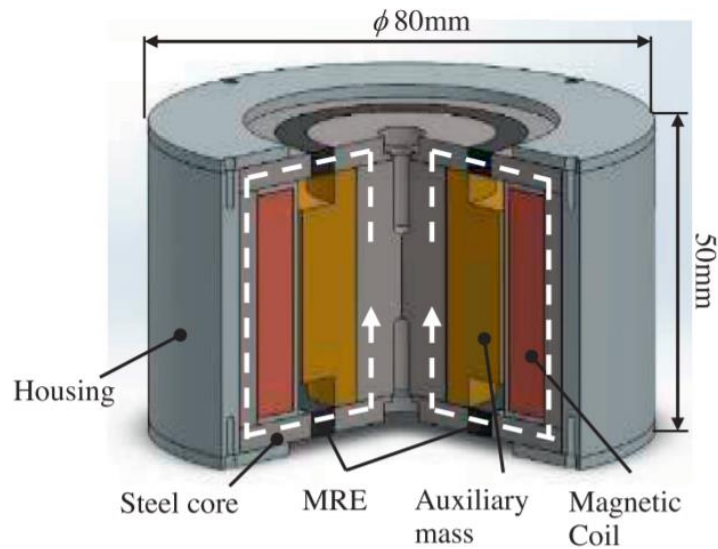
A dinamikus rezgéscsökkentés talán legelterjedtebb változatát a mosógépben találhatjuk meg. Ennek egy vertikális tengelyű változatával foglalkozott Campos és társa (5. ábra) [10].



5. ábra Forgó dinamikus rezgéscsökkentő szerkezet egy vertikális mosógép kosarának tetejére rögzítve [10]

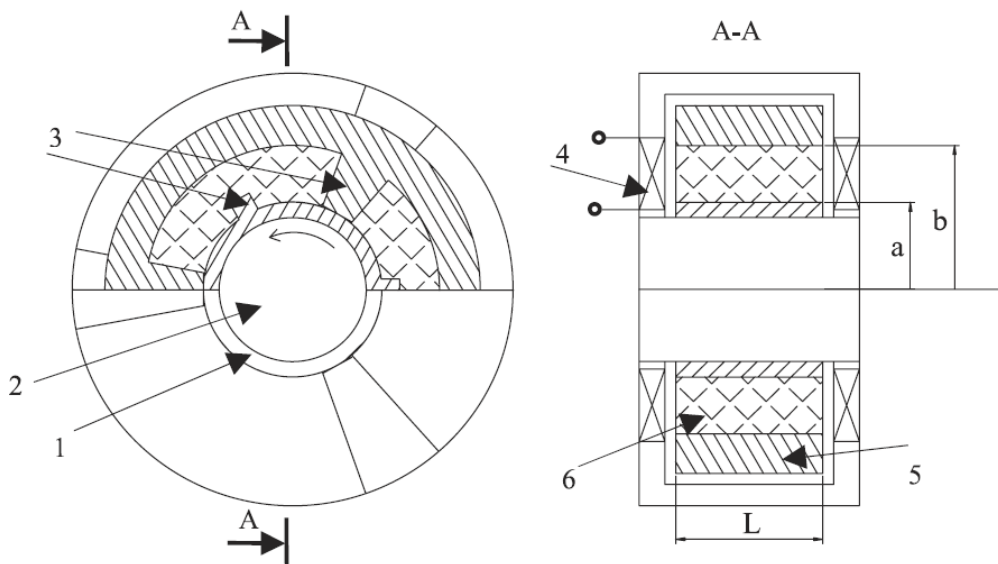
Komatsuzaki és társai által vizsgált, széles sávban változtatható rugómerevségű dinamikus rezgéscsillapítót mutat be az 6. ábra. A torziós rugómerevség változtatható az

elektromágneses aktivitású elasztomerre (Magnetorheological Elastomer, MRE) adott feszültség segítségével [11].



6. ábra Széles sávban állítható rugómerevségű dinamikus rezgéscsillapító sematikus ábrája [11]

Hasonló elképzelést mutat be az 7. ábra, egy adaptív hangolású rezgéscsökkentési (Adaptive Tunable Vibration Absorber, ATVA) koncepciót, amelyet erőátviteli rendszerek rezgéscsillapítására fejlesztettek ki lágy elektromágneses aktivitású elasztomerekkel (MRE).



7. ábra Adaptív hangolású rezgéscsökkentő koncepció: 1: belső henger, 2: forgó tengely, 3: fül, 4: elektromágneses tekercs, 5: külső henger, 6: MRE anyag [12]

A fülekkel ellátott belső henger rögzített a forgó tengelyen. A külső és belső hengerek közé helyezett MRE anyag úgy működik, mint egy torziós rugó. A belső hengerhez hasonlóan a

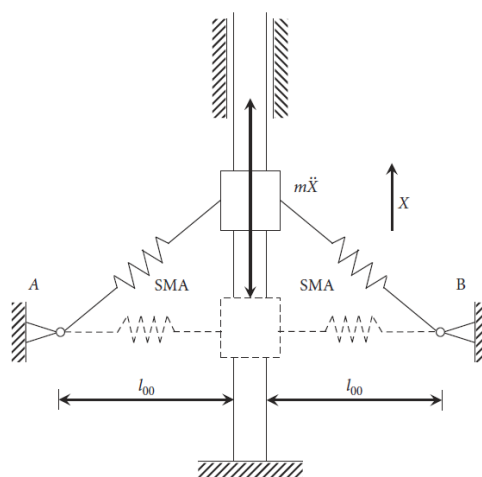
külső hengeren is fűlek vannak. Ezek a fűlek érintőirányú elasztikus erőket és ezzel elasztikus nyomatókot hoznak létre a hengerek között. Emiatt a külső henger rezegni képes a belsőhöz képest. Három elektromágneses tekercs hozza létre a mágneses mezőt az MRE rétegen keresztül [12].

A 8. ábra a londoni millenniumi gyalogos híd dinamikus vertikális és horizontális rezgéscsökkentő egységeit mutatja [13].



8. ábra A London Millennium Footbridge vertikális (jobbra fent) és horizontális (jobbra lent) irányú dinamikus rezgéscsökkentő egységei [13]

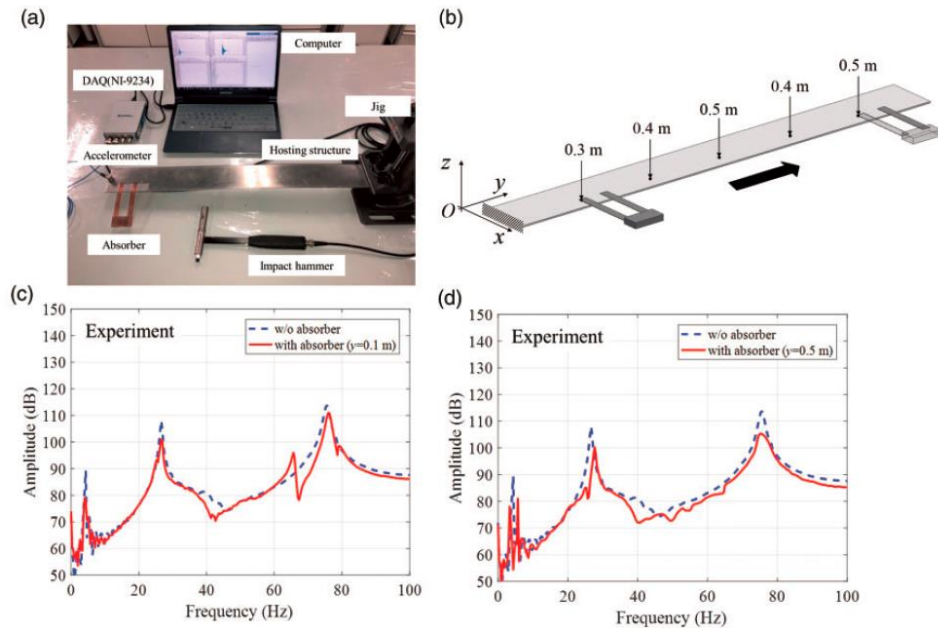
Tian Wang és társai egy geometriai nemlinearitással rendelkező oszcillátor modelljét mutatták be (9. ábra), amelyet egy alak-memóriájú ötvözetben (Shape Memory Alloy, SMA) alkalmaztak. Ez már átvezet a metaanyagok csoportjába [14].



9. ábra SMA oszcillátor rendszer modell [14]

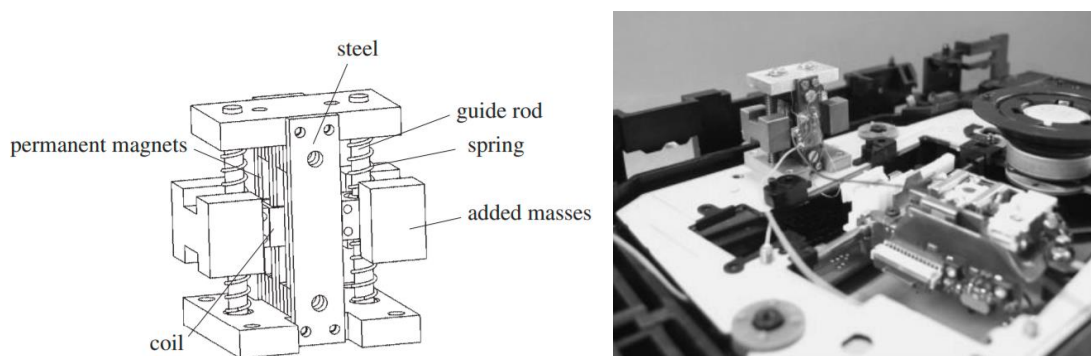
Gil Hoo Yoon és társai befogott tartón alkalmaztak különböző rezgési pozícióban dinamikus rezgéscsökkentő eszközt (10. ábra) többek között azt is vizsgálva, hogy a csatolt tömeg és a fő

tömeg saját frekvenciái közötti különbség miként befolyásolja a rezgéscsillapítást. Ez a vizsgálati mód nagyon hasonlít az általam kidolgozottra [15].



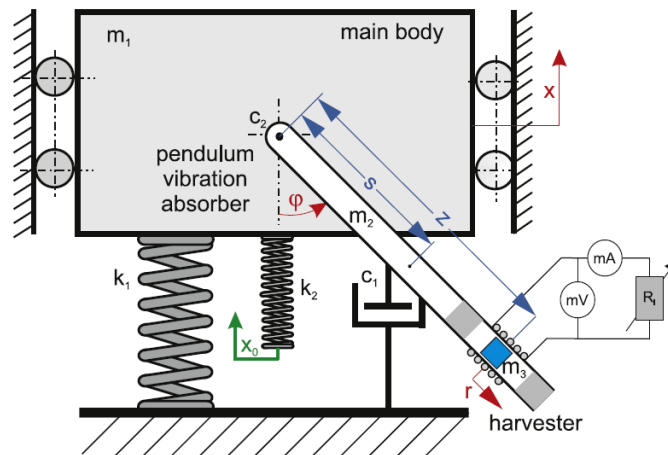
10. ábra Befogott tartón, különböző pozícióban alkalmazott dinamikus rezgéscsökkentő elem: (a) mérőrendszer, (b) csatolt tömeg pozíciói a befogott tartón, (c) (d) különböző pozíciók mellett mért főtömeg amplitúdók (folytonos vonal: csatolt tömeggel, szaggatott vonal: csatolt tömeg nélkül) [15]

Chi-Shen Chang és Tzong-Shi Liu az optikai lemez meghajtóba fejlesztett egy adaptív dinamikus rezgéscsillapító egységet (11. ábra), amely különböző sebességek mellett is hatásosan csökkenti a lemez vibrációját. Az egység 6000-10000 fordulat/perc közötti fordulatszám tartományban legalább 35%-os rezgéscsökkenést ért el [16].



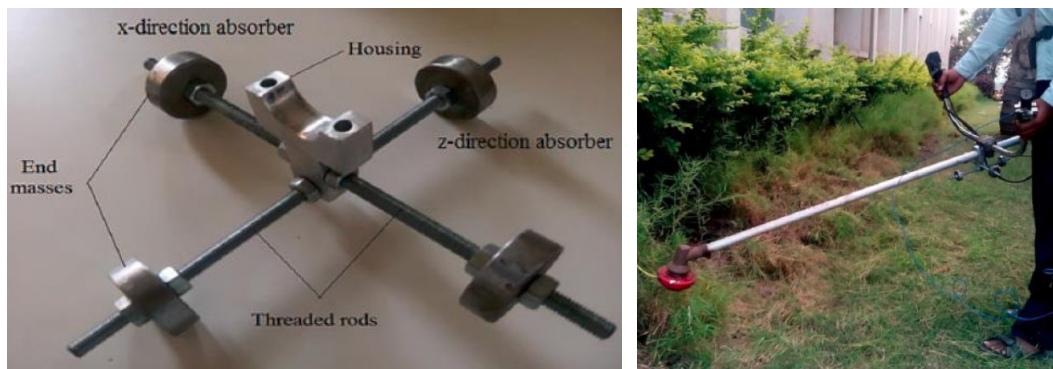
11. ábra Az optikai lemez meghajtóban alkalmazott adaptív dinamikus rezgéscsökkentő sematikus ábrája és installációja [16]

Kecik az inga és az elektromágnes kombinációjával egyszerre ért el rezgéscsökkentést és energia kinyerést (12. ábra). Ez utóbbit az ingára szerelt tekercsben elmozduló (lebegő) mágnes hozza létre [17].



12. ábra, Inga és elektromágnes kombinációja [17]

Sushil S Patil kézi fűnyíró géphez készített dinamikus rezgéscsökkentő szerkezetét mutatja be a 13. ábra. A vizsgálatok szerint az egy-tengelyű változat nem-vágó üzemmódban 39%-kal, vágó üzemmódban 44%-kal csökkentette a rezgést, míg a két-tengelyű változat esetében ez 63%, illetve 68% volt [18].



13. ábra Fűvágó trimerhez készített két-tengelyű dinamikus rezgéscsökkentő egység [18]

2.2 Rezgésszigetelés

A már kibocsátott rezgés terjedésének megakadályozására a legismertebb módszer a rezgésszigetelés. Hegedűs és Ludvig [5, 7] aktív rezgésszigetelésként írja le a gerjesztő erők környezetre átadódó mértékének csökkentését (gépről a talajra), míg passzív rezgésszigetelésként kezeli a védendő objektumra a környezetéből érkező rezgések mérséklését (talajról a gépre). Bármilyen irányból is nézzük, a cél az, hogy különböző, változatos abszorbereket építsünk be az emisszió és az immisszió közé. Az abszorberek által

elnyelt zaj mértékét, ezzel a szigetelés hatékonyságát a transzmissziós veszteség (Transmission Loss, TL) adja meg:

$$TL = 10\log_{10}\left(\frac{1}{T_c}\right) \quad (4)$$

$$TL = 10\log_{10}\left[1 + \left(\frac{\pi\rho hf}{c\rho_\alpha}\right)^2\right] \quad (5)$$

ahol T_c a transzmissziós együttható, ρ a sűrűség, h az anyag rétegvastagsága, f a frekvencia, ρ_α a levegő sűrűsége és c a hang terjedési sebessége a levegőben.

Mivel a négyzetes tagban egy adott f frekvencián a h rétegvastagságon kívül minden más tényező állandó, kiszámítható, hogy a szigetelőanyagon áthaladó hang szintje 5-6 dB-lel csökken az anyag tömegének duplázásával. Ez azt jelenti, hogy a transzmissziós veszteség 30 dB-lel történő növeléséhez 32-64-szer vastagabb és nehezebb szigetelőanyagra van szükségünk [19]. Ez viszont az abszorber és az egész gép súlyának intenzív növekedésével jár együtt, emiatt úgy tűnik, hogy ez az út nem járható.

A zajcsökkentés kutatása céljából az Európai Unió szervezésében elindult a COST Action CA15125: Design for Noise Reducing Materials and Structures (DENORMS) projekt 2015-2019. időtartamban. A cél olyan kis tömegű abszorberek, metaanyagok tervezése volt, amelyek hatékonyan csökkentik a zajt vagy rezgést adott frekvenciatartományon. Az anyagoknak ez a csoportja mesterséges, a természetben nem léteznek [20].

2.3 Metaanyagok

Metaanyagoknak nevezzük tehát azokat a mesterséges anyagokat, amelyek tulajdonságaik szempontjából nem az összetételük, hanem belső struktúrájuk az elsődleges [21]. A metaanyagok kutatása és fejlesztése mind a polgári szférában, mind a katonai területen nagy erővel folyik, legyen szó akár a lopakodó repülőgépekről, akár a szonár, azaz hangradar számára észlelhetetlen tengeralattjárókról. A metaanyagokkal foglalkozó tudományos cikkek száma a 2000. évben még elenyésző volt, míg 2019-ben meghaladta a 3500-at [22, p 2]. Metaanyagok között megkülönböztetünk optikai, akusztikus és mechanikus metastruktúrákat [22, p 1]. A számunkra legfontosabb akusztikus metaanyagok tervezésének ötlete az optikai metaanyagokból ered, amelyeket elektromágneses hullámok adott frekvencián történő kiküszöbölésére terveznek.

2.3.1 Optikai metaanyagok

A metaanyagok közül az optikai metaanyagok kutatása bír a legnagyobb múlttal. Az optikai metaanyagok kölcsönhatásba lépnek az elektromágneses hullámokkal és adott hullámhosszon optikai rezonancia segítségével megállítják azokat [23]. Az elmélet szerint az optikai metaanyagoknak egyszerre negatív az elektromos permittivitásuk (ϵ) és a mágneses permeabilitásuk (μ), aminek következménye a negatív törésmutató (n). Az optikai metaanyagok kutatásai igen széles spektrumon mozognak, de az érintett elektromágneses hullámok mind frekvenciatartomány, mind tulajdonságaik tekintetében kívül esnek a kutatási területemen, emiatt ezekkel csak érintőlegesen foglalkozom. Az optikai metaanyagok között megtaláljuk a plazmonikus abszorbereket (Plasmonic Metamaterial Absorbers), a fotonikus kristályokat (Photonic Crystals), a negatív indexű lencséket és a metaanyag antennákat [22].

2.3.2 Akusztikus metaanyagok

Az akusztikus metaanyagoknak negatív effektív tömegük van, ami természetesen csak a dinamikai hatásukat tekintve negatív [24].

Számunkra a 100 Hz – 1000 Hz között rezgések csökkentésére alkalmas akusztikus metastruktúrák a legfontosabbak, melyek alapvetően lyukakkal, csatornákkal, rezonátorokkal vagy szóró alegységekkel módosított vagy ellátott bázis anyagból állnak, amelyet három irányból közelíthetünk meg [22]:

1. Fononikus kristályok (Phononic / sonic crystals).

Ezek szóró és/vagy rezonáló alegységeket tartalmaznak szabályos elrendezésben a hordozó anyagban. Ezek az alegységek tipikusan eltérő akusztikus impedanciával rendelkeznek a hordozó anyaghoz képest. Legfőbb jellemzőjük azok a frekvenciasáv-rések (band-gap regions), ahol a rezgések terjedése gátolt a szóró és rezonáló alegységek kombinációjának köszönhetően [25-28].

2. Rezonáló struktúrák (Resonant structures).

Lyukak, csatornák vagy más beágyazott szerkezetek hozzák létre a rezonátorok rendszerét. A kivájt anyagokban, felerősített, hullámhossz alatti képzelt felbontás lehetséges a tűnékeny (evanescent) hullámok társításával. [29-30]

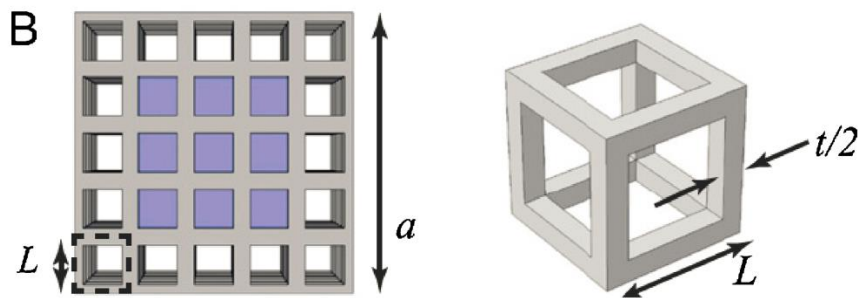
3. Labirintusok (Space coiling).

Egy anyagon belül a kiterjedt hajlított vagy hajtogatott akusztikus útvonalak negatív rugalmassági moduluszhoz vagy egyéb érdekes tulajdonsághoz vezethetnek. [31-33]

1. Fononikus kristályok

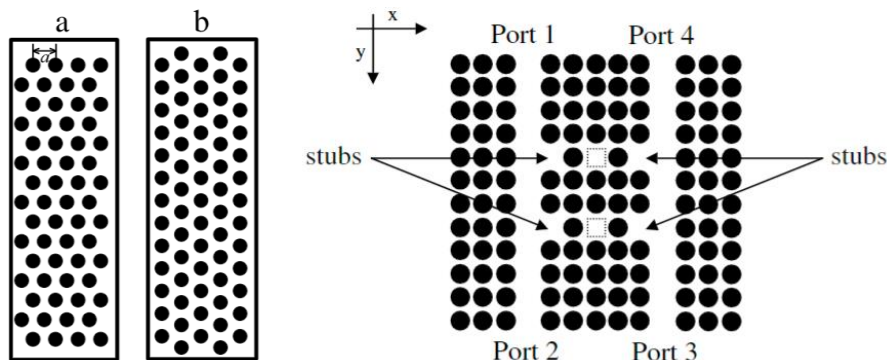
Az általunk vizsgált, tömeg-a-tömegben típusú metaanyag leginkább a fononikus kristályok közé sorolható. Nagyon sokféle típusú fononikus kristályt alakítottak ki nem-akusztikus-metaanyag módszerrel, ahol legtöbbször bevonatolt vagy anélküli szilárd gömböket vagy rudakat ágyaztak be polimer vagy folyadék szubsztrátumba. Ezek legnagyobb hiányossága a méret és a komplexitás, amely az alkalmazhatóságukat lehatárolja [33-34]. Léteznek viszont akusztikus-metaanyag módszerrel kialakított fononikus kristály struktúrák is, melyek az érintett frekvencia tartománytól függenek. Ezek körét Lucklum és Vellekop gyűjtötte össze [35], melyből a teljesség igénye nélkül kerül bemutatásra néhány megoldás:

Alacsony frekvencia tartományú rezgésvédelem esetén például lehet használni a Fused Deposition Modelling (FMD) módszert, melyre jó példa a Matlak és társai által létrehozott négyzetes polimer váz rács, melybe fém kockákat helyeztek [36]. A 10 kHz-ig használható szerkezetet a 14. ábra mutatja. Itt még kézzel kerültek behelyezésre a fém kockák.



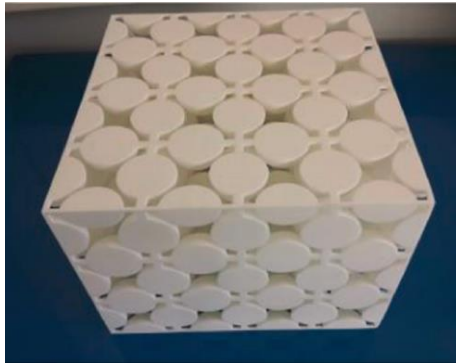
14. ábra Matlak és társai FMD modellje [36]

Pennec és társai a rezonátorok elrendezési módjának a rezgés csökkentésére gyakorolt hatását vizsgálták kétdimenziós fononikus kristályban (15. ábra) [37]. A metaanyagot kompozit anyagként hozták létre: az acél hengereket (rezonátor) epoxy mátrixba ágyazták különböző elrendezésekben.



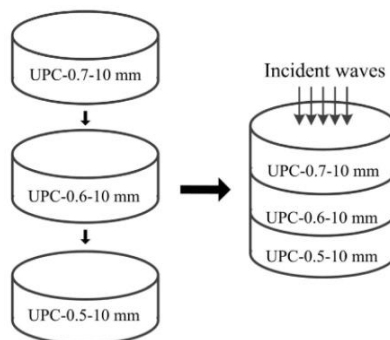
15. ábra A fém rezonátorok különböző elrendezési módjai az epoxy műgyanta mátrixban [37]

D'Alessandro és társai Selective Laser Sintering (SLS) technikával nylonból készítettek metastruktúrát (16. ábra), amely 20 kHz frekvenciáig használható [38].



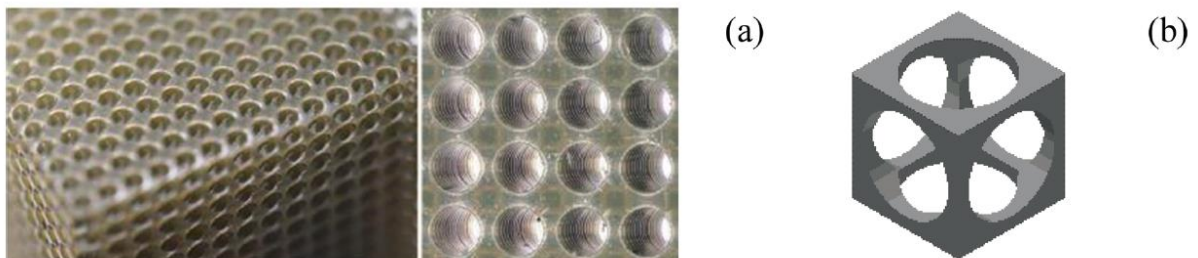
16. ábra D'Alessandro és társai nylon anyagból SLS készített metastruktúrája [38]

Zhang és társai készítettek egy struktúrát, amely a hang terjedési irányában fokozatosan változik (17. ábra). Ugyan az egzakt módszer és a foto-érzékeny polimer nem került leírásra, a vizsgált frekvencia tartomány felső határa 6,3 kHz volt [39].



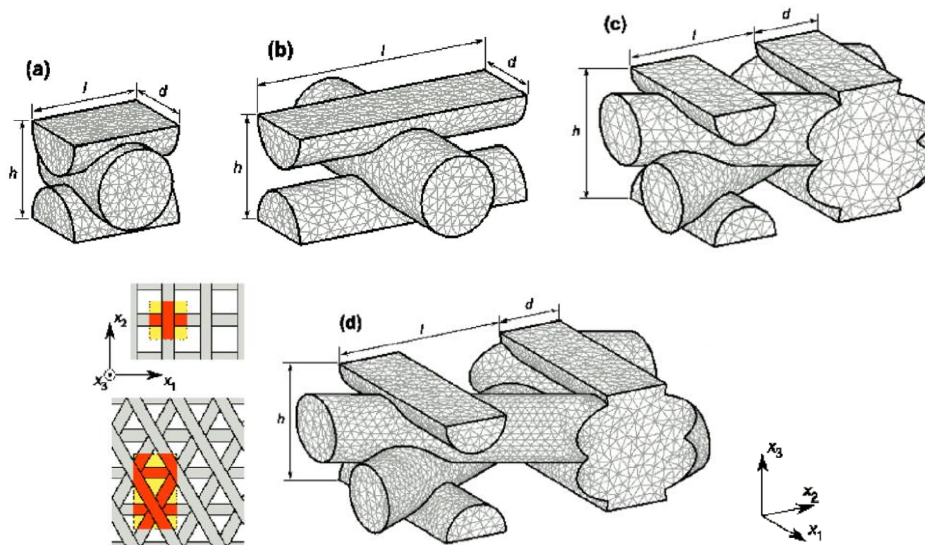
17. ábra, A hang terjedésének irányában változó metastruktúra [39]

Magasabb frekvencia tartományokra is léteznek fononikus kristály előállítási megoldások, mint például Micro Stereolithography (MSL), amellyel például levegő töltetű, három irányban metsződő hengeres csőrendszert hozott létre Lucklum és Vellekoop (18. ábra), [40],



18. ábra a) Lucklum és Vellekoop által MSL technológiával nyomtatott fononikus kristály, b) a struktúra leírásához használt egység cella [40]

vagy a Robocasting, amely egy kerámia anyagban készített állványzat [41], melyet Kruisova és társai is alkalmaztak szilikon-karbid (SiC) anyagból készített hexagonális és tetragonális struktúrájukhoz (19. ábra). [42]

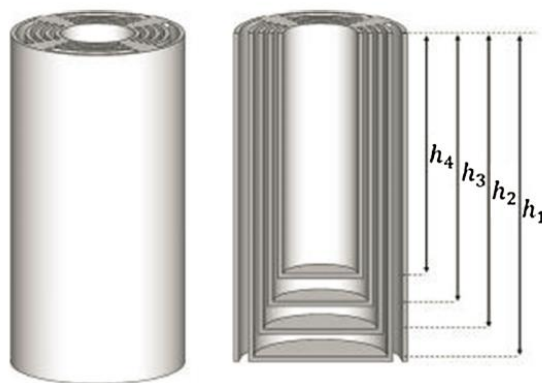


19. ábra Kruisová és társai által készített metastruktúra szerkezeti geometria variációi [42]

És még sorolhatnám, de ezek frekvencia tartománya kívül esik az érdeklődési körünkön.

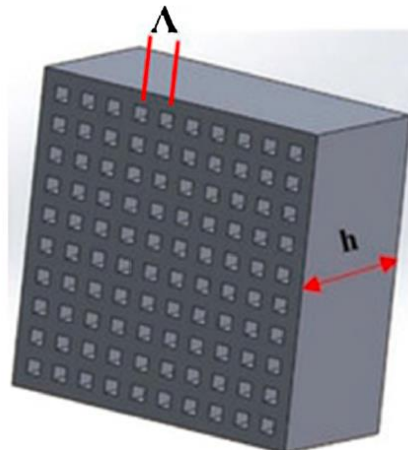
2. Rezonáló struktúrák

Rezonáló metaanyagokra jó példa a különböző átmérőjű és hosszúságú, egyik homloklfelületén zárt hengeres testekből épített metastruktúra (20. ábra) [43]



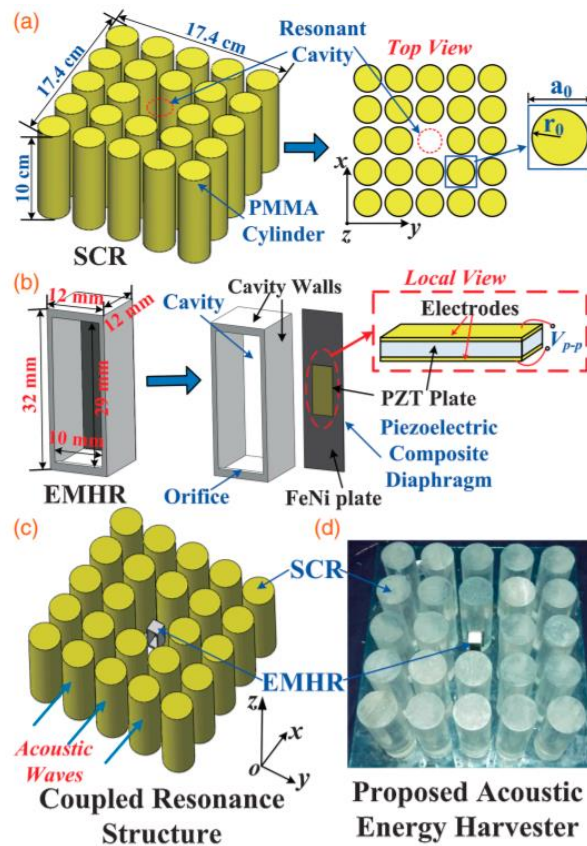
20. ábra Koncentrikus hengerekből készült rezonáló struktúrák [43]

Egy másik kutatásban hozzávetőlegesen 0,5 mm átmérőjű, hengeres Helmholtz rezonátorokat használtak a hangok tompítására a hallható tartományban. Laureti és társai a rezonancia elérése érdekében Fabry-Perot struktúrát használtak, ahol a mintadarab 100 darab csatornából állt, amely elé „L”-alakú, hullámhossz alatti dimenziójú rekesz lett elhelyezve (21. ábra) [44].



21. ábra Laurenti és társai Fabry-Perot metaanyaga levegőben használva. $h=14,8$ mm és $\Lambda=2.96$ mm [44]

Érdekes megoldást mutattak be Aichao Yang és társai, amikor a fononikus rezonátorokat (Sonic Crystal Resonator, SCR) elektromechanikus Helmholtz rezonátorra (ElectroMechanical Helmholtz Resonator, EMHR) szerelt piezzo kristállyal társították az akusztikus hullámok energiáinak lecsapolására (22. ábra) [45].



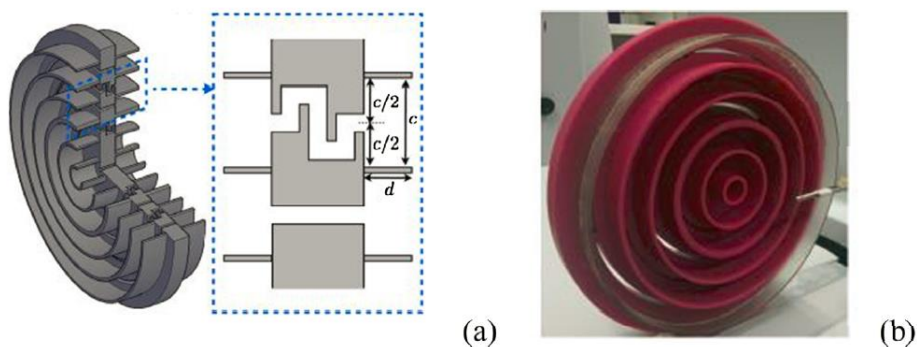
22. ábra Fononikus kristály és Helmholtz rezonátor társítása akusztikus hullámok energiáinak lecsapolására

3. Labirintusok

A labirintus (Space coiling) akusztikus metaanyagok olyan anyagok, amikben a rezgést vezető üregek tekervényesek, így hozva létre a rezgés amplitúdójában vagy fázisában olyan változásokat, amelyek érdekes akusztikus tulajdonságokhoz vezetnek. [46].

Érdekes példa a szarv (horn) geometria, amely kedvező, szimultán fázis és amplitúdó modulációra képes. [47]

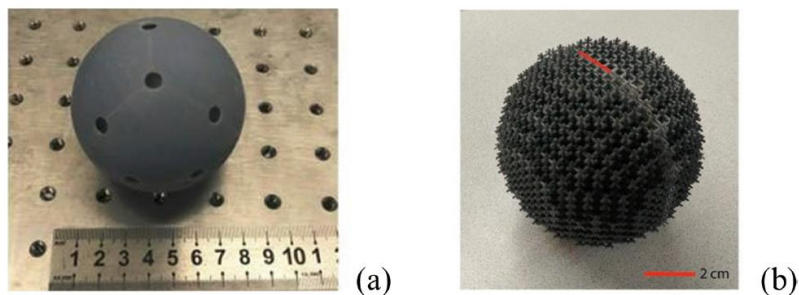
Fabry-Perot rezonancia szintén előfordulhat a közvetítő csatornában. Ez a hatás lett felhasználva a Fresnel lencse- féle metastruktúrában, amely 10 kHz frekvenciáig használható volt (23. ábra). [48].



23. ábra a) Fresnel lencse elvének használata labirintus metastruktúrában, b) maga az elkészült metaanyag.

Labirintus metastruktúrát 3D nyomtatással metaanyag „téglák” létrehozásával is lehet készíteni. Memoli és társai ebben a szokatlan megközelítésben minden téglát egyedi fáziskéséssel tervezett, amit például a rezgés vezetésére lehetett felhasználni. Az egység akusztikus levitáció bemutatására is alkalmas volt. [49].

Gömbölyű metastruktúrát is létre lehet hozni 3D nyomtatással. A Fu és társai által készített metaanyag (24. a) ábra) egy és kétpólusú rezonanciával rendelkezik a benne lévő labirintus szerkezetnek köszönhetően. Ez az anyag a két rezonancia frekvencia közötti tartományban blokkolja a hanghullám terjedését. [50].



24. ábra Gömb formájú metastruktúrák: a) Fu és társai [50], b) Xie és társai szerkezetei [51]

Xie és társai egy ettől eltérő, négyszögletes belső struktúrájú gömb metastruktúrát készítettek SLA nyomtatással (24. b) ábra). Két félgömb összeillesztésével kontrollálni tudták a refraktív indexet, így egy Lüneburg lencsét hozva létre, ahol a refraktív index radiálisan csökken a gömb közepétől a gömb felülete felé haladva. [51].

Ha a lokális rezonancia valamilyen okból kifolyólag kerülendő, a labirintus metanyagok képesek az elvárt metanyag jellemzők előállítására [52-53].

2.3.3 Mechanikus metaanyagok

Mechanikus metaanyagok geometriai struktúrájuknak (pl. mikro/nano rácsok) köszönhetően szokatlan mechanikai tulajdonságokat sikerült előállítani például a következőkben: rugalmassági modulusz, Poisson tényező, szakító szilárdság, energia elnyelés, hőtágulás, stb. [54-56].

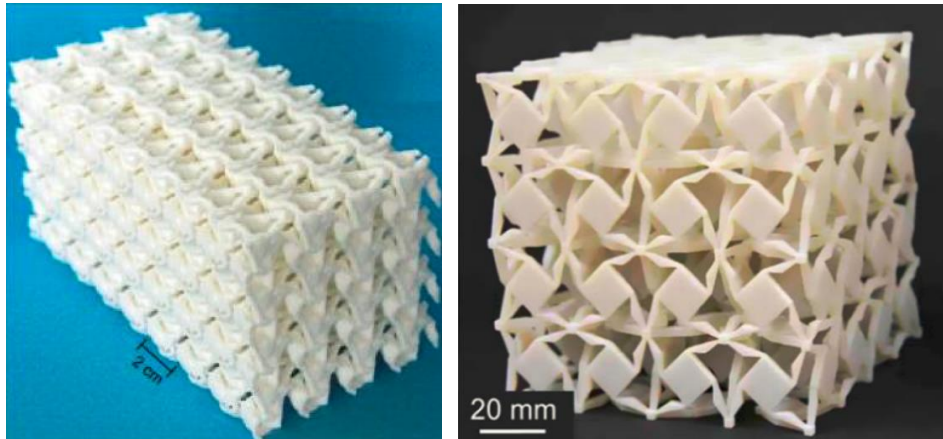
Xianglong Yu és társai a különleges mechanikai tulajdonságok szerint a következőképpen csoportosították a mechanikai metaanyagokat [57]:

- Poisson tényező (ν)
 - o auxetikus metaanyagok
- Rugalmassági modulusz (E):
 - o mikro/nanorácsok
 - o királis/anti-királis anyagok (királis: tükörkép, de nem teljes fedéssel)
 - o origami metaanyagok
 - o celluláris origami
 - o minta transzformációs anyagok
- Csúsztató rugalmassági/bulk modulusz (G/K)
 - o pentamod metaanyagok
 - o negatív összenyomhatóságú anyagok

Az auxetikus (auxetic) metaanyagok negatív Poisson tényezővel rendelkeznek, azaz húzó igénybevétel esetén hosszirányú megnyúlásuk mellett keresztirányban vastagodnak. Fokozott ellenállást tanúsítanak sérülés, felületi behatás ellen, jó akusztikus és rezgési jellemzőkkel és nagy energia-elnyelési képességekkel rendelkeznek. Három fő csoportba sorolják ezeket a mikrostruktúrájuk szerint: visszatérő (re-entrant, pl. csokornyakkendő), királis és forgó félmerev szerkezetű anyagok [54, 58].

Andreassen és társai topológiai optimalizálással tervezték meg a szelektív lézer szintézissel készített 3D metanyagukat, amely Poisson tényezőjének értéke $\nu = -0,5$ és a bulk modulusza a szilárd anyagénak mindössze 0,2%-a (25. bal ábra) [59].

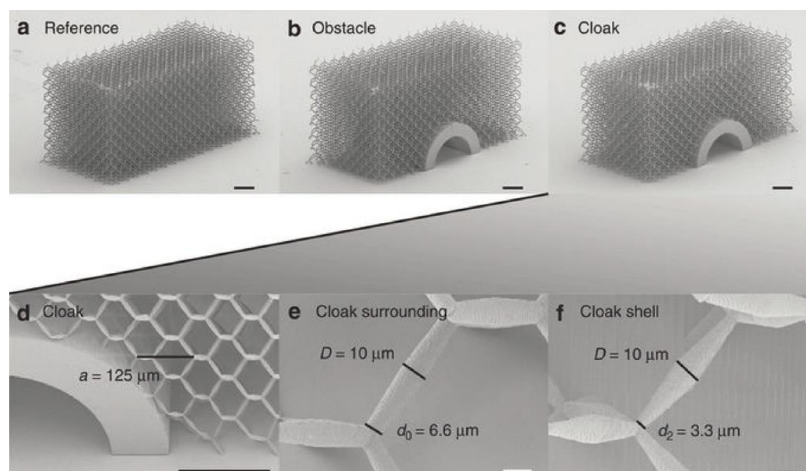
Bückmann és társai szintén SLS technológiával készítettek makroszkópikus polimer auxetikus struktúrát, melynek Poisson tényezője $\nu = -0,8$ (25. jobb ábra) [60].



25. ábra Szelektív lézer szintézissel (SLS) készült auxetikus metanyagok: balra: Poliamid struktúra $\nu=-0,5$ [59], jobbra: makroszkópikus polimer struktúra $\nu=-0,08$ [60]

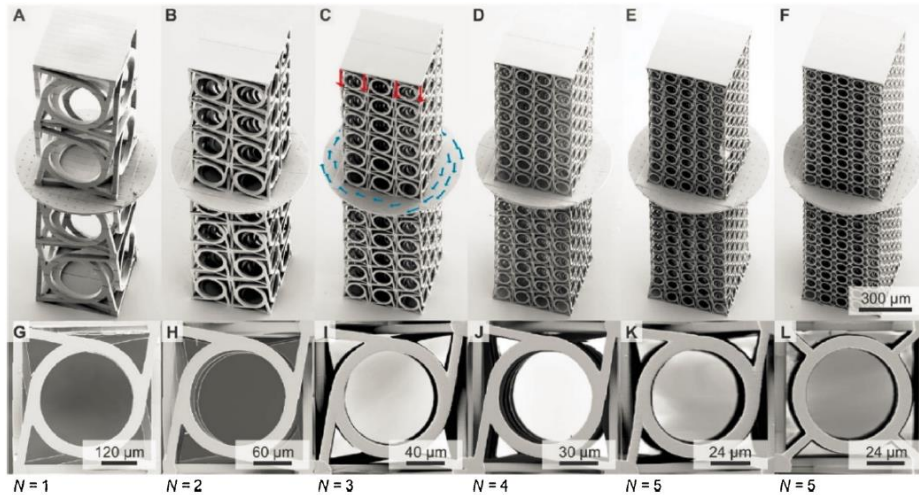
Pentamod (pentamode) metaanyagok (más néven meta-fluidok) bulk (kompressziós) modulusza igen magas a csúsztató rugalmassági moduluszukhoz képest, aminek következtében nem változtatják térfogatukat deformáció közben. A gyakran vizsgált pentamod mikrostruktúrák kúpos tartók speciálisan gyémánt ráciba rendezve [61, 62].

Bückmann és társai készítettek olyan pentamod struktúrát, amely elasztikusan elrejtí az adott tárgyat (26. ábra) [63].



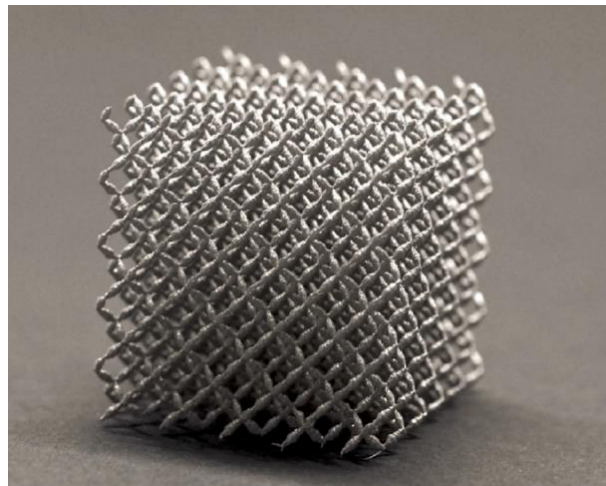
26. ábra Bückmann és társai által készített pentamod köpeny elasztikusan elrejtí a belsejébe rejtett merev hengert [63].

Frenzel és társai készítettek egy mechanikus metaanyagot, amely nyomás hatására csavarodni képes (27. ábra) [64]. Ezek az anyagok 3D lézeres mikro nyomtatással készültek és egytengelyű nyomás hatására 2°/%-nál is nagyobb elfordulás/tengelyirányú fajlagos nyúlást tudtak produkálni.



27. ábra Mechanikus metaanyag csavarodásra [64]

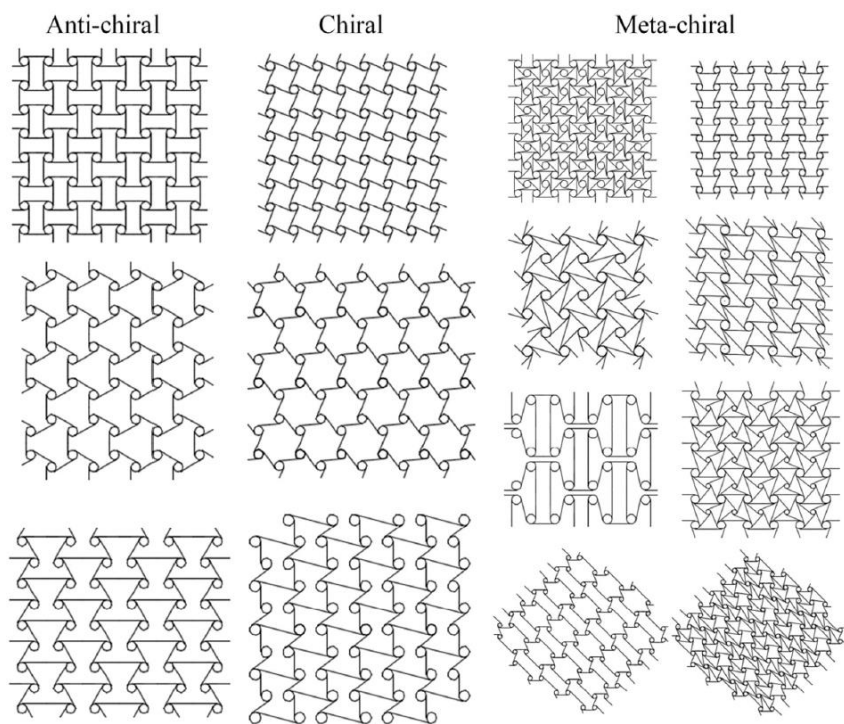
Bio-kompatibilis fém pentamod struktúrák létrehozására mutat példát a 28. ábra [65]. A titán ötvözet (Ti-6Al-4V) szelektív lézer ömlesztéses (SLM, Selective Laser Melting) technológiával készült. Az így készült fém szerkezet mechanikai tulajdonságai nagyságrendekkel jobbak voltak, mint a polimer komponensből készültké.



28. ábra Ti-6Al-4V anyagú pentamod rács szelektív lézer ömlesztéssel (SLM) készítve, biológiai felhasználásra [65]

Wenwang Wu és társai kiralitás szempontjából rendezték a struktúrákat (29. ábra) [66]. Vizsgálták a struktúrák hatását a mechanikai tulajdonságaikra és az alakváltozási

mechanizmusukra, valamint a kiralitás hatását többek között a rezgés csökkentésére, energia elnyelésre.

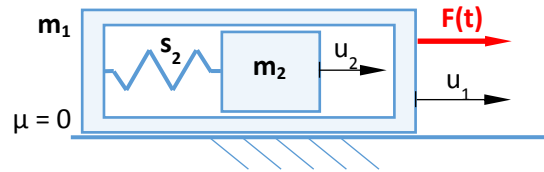


29. ábra 2D alap-struktúrák csoportosítása kiralitás szempontjából [66]

3. A VIZSGÁLT AKUSZTIKUS METAANYAG MODELLJE

Az általunk vizsgált akusztikus metaanyagokat a fononikus metaanyagok közé tudom besorolni, ahol egy hordozó anyagban rezonátorok vannak elhelyezve. A dinamikus rezgéscsökkentőktől leginkább az összetevők mérete és mennyisége választja el: itt nagyszámú és kisméretű egységek léteznek. A számunkra fontos energia-elnyelő képességet belső szerkezete adja, amit tömeg-rugó-rezgéscsillapító alrendszerekkel, rezonátorokkal modellezünk [67]. Ezek a mikro-, nano-méretű rezonátorok [68] tömeg-a-tömegben rendszerrel nyelik el a gerjesztő rezgést különböző frekvenciákon a dinamikus rezgéscsillapításhoz hasonlóan [5, 7], és így jön létre a rezgéselnyelés az adott gerjesztési frekvencián [69].

3.1 Tömeg-a-tömegben modell



30. ábra. Tömeg-a-tömegben modell

Az általunk vizsgált akusztikus metaanyagok modellezésének alapegysége a két tömegből (m_1, m_2) és az azokat összekötő s_2 rugómerevségű rugóból álló, két-szabadságfokú, tömeg-a-tömegben elrendezésű rezgő rendszer, ahol a gerjesztés a külső, m_1 tömeget éri (30. ábra). A modellre a következő mozgásegyenletek írhatók fel:

$$m_1 \ddot{u}_1 + s_2(u_1 - u_2) = F_0 \exp(i\omega t) \quad (6)$$

$$m_2 \ddot{u}_2 + s_2(u_2 - u_1) = 0 \quad (7)$$

A (6, 7) egyenletek megoldását az (8, 9) alakban keresve kapjuk a (10, 11) amplitúdókat:

$$u_1 = A_1 \exp(i\omega t) \quad (8)$$

$$u_2 = A_2 \exp(i\omega t) \quad (9)$$

$$A_1 = \frac{F_0(s_2 - m_2\omega^2)}{(s_2 - m_1\omega^2)(s_2 - m_2\omega^2) - s_2^2} \quad (10)$$

$$A_2 = \frac{F_0 s_2}{(s_2 - m_1\omega^2)(s_2 - m_2\omega^2) - s_2^2} \quad (11)$$

A rezgést elnyelő abszorber koncepciója szerint $u_1 = 0$, ha $s_2 - m_2\omega^2 = 0$, azaz $\omega = \sqrt{s_2/m_2} = \omega_2$, ahol ω_2 a csatolt rugó-tömeg saját körfrekvenciája. Ezt behelyettesítve a (6) és (7) egyenletekbe:

$$s_2 u_2 = -F(t) \quad (12)$$

$$m_2 \ddot{u}_2 + s_2 u_2 = 0 \quad (13)$$

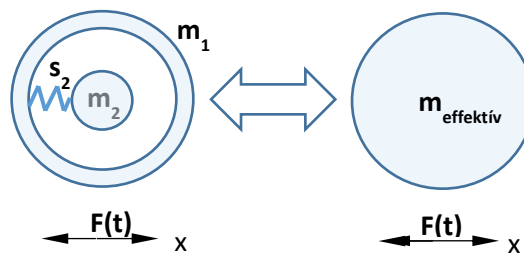
A két egyenletet összevonva kapjuk:

$$F(t) = m_2 \ddot{u}_2 \quad (14)$$

Azaz a külső gerjesztő erőt eliminálja a csatolt tömeg az $m_2 \ddot{u}_2$ tehetetlenségi erővel a s_2 rugón keresztül. Tehát az abszorber a csatolt tömeg rezonanciáját használja fel a fő rendszer megállítására, ha a gerjesztés frekvenciája megegyezik a csatolt tömeg lokális $\omega_2 = \sqrt{s_2/m_2}$ saját körfrekvenciájával.

3.2 Negatív effektív tömeg

A metaanyagok alapegységének, a két szabadságfokú tömeg-a-tömegben alrendszerének a működését egy tömegű, azaz egy szabadságfokú rendszerként értelmezve jutunk el az effektív tömeghez (31. ábra).



31. ábra. Effektív tömeg értelmezése a tömeg-a-tömegben modell alapján

Ennek az alrendszernek a hatására úgy tekintjük, mintha azt egyetlen tömeg hozná létre. A két modell lendületének egyenlőnek kell lennie:

$$m_{eff} \frac{du_1}{dt} = m_1 \frac{du_1}{dt} + m_2 \frac{du_2}{dt} \quad (15)$$

Mivel a gerjesztés adja mindkét tömeg mozgásának a körfrekvenciáját, a (15) egyenletbe a sebességeket behelyettesítve:

$$m_{eff}A_1 = m_1A_1 + m_2A_2 \quad (16)$$

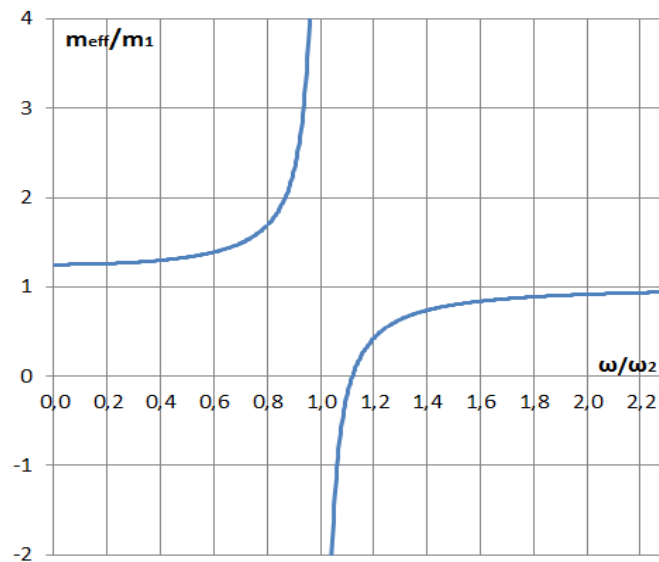
Felhasználva a (10) és (11) egyenleteket, kis átalakítással, $\omega_2 = \sqrt{s_2/m_2}$ bevezetésével:

$$m_{eff} = m_1 + m_2 \frac{s_2}{s_2 - m_2 \omega^2} \quad (17)$$

$$m_{eff} = m_1 + m_2 \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega^2} \quad (18)$$

$$m_{eff} = m_1 + m_2 \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_2})^2} \quad (19)$$

m_1 tömeggel leosztva jutunk a 32. ábrához.

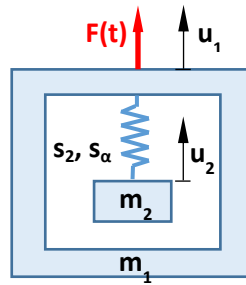


32. ábra. Dimenzió nélküli effektív tömeg (m_{eff}/m_1) a gerjesztő körfrekvencia (ω/ω_2) függvényében

Amikor a gerjesztő erő körfrekvenciája kisebb, mint a csatolt tömeg saját körfrekvenciája ($\omega < \omega_2$), akusztikus módról beszélünk, az effektív tömeg pozitív és a két tömeg azonos fázisban rezeg. Optikai módnak nevezzük azt az állapotot, amikor a gerjesztés frekvenciája a nagyobb ($\omega > \omega_2$). Ebben az esetben az effektív tömeg lehet pozitív vagy negatív, de a két tömeg ellentétes fázisban, azaz 180° -os fáziseltolódással mozog. Negatív effektív tömeg abban a szűk sávban adódik, amikor a gerjesztés frekvenciája nem sokkal nagyobb a csatolt tömeg saját frekvenciájánál. Ezt a saját frekvencia feletti frekvencia tartományt, ahol a fő test a gerjesztés ellenére is szinte mozdulatlan marad, frekvenciasáv-résnek nevezzük.

3.3 Nem-lineáris tömeg-a-tömegben alrendszer

Nem-lineáris karakterisztikájú rugó esetén a modell kis mértékben változik (33. ábra).



33. ábra. Nem-lineáris abszorber koncepciója

A gerjesztő erő felírása:

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} f \cos(n\pi\Omega t) \quad (20)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi\Omega t}{\Pi_\alpha} = ca(\alpha, 1, \Omega t) \quad (21)$$

$$T = 2\Pi_\alpha = 2\beta \left(\frac{1}{\alpha+1}, \frac{1}{2} \right) \quad (22)$$

ahol β a Béta függvény, ami az α -tól függ.

A mozgást leíró egyenletek a következők:

$$m_1 \ddot{u}_1 + s_\alpha^2 (u_1 - u_2) |u_1 - u_2|^{\alpha-1} = Fca(\alpha, 1, \Omega t) |ca(\alpha, 1, \Omega t)|^{\alpha-1} \quad (23)$$

$$m_2 \ddot{u}_2 + s_2^2 (u_2 - u_1) |u_1 - u_2|^{\alpha-1} = 0 \quad (24)$$

A megoldást keressük az alábbi formában, a levezetések nélkül csak a végeredményre koncentrálna (lásd [70]):

$$u_1 = Aca(\alpha, 1, \Omega t) \quad (25)$$

$$u_2 = Bca(\alpha, 1, \Omega t) \quad (26)$$

$$m_1 A + m_2 B = -F \frac{\alpha+1}{2\Omega^2} \quad (27)$$

$$-m_2 \Omega^2 \frac{2}{\alpha+1} B + s_\alpha^2 (B - A) |A - B|^{\alpha-1} = 0 \quad (28)$$

A nem-lineáris effektív tömeg:

$$m_{eff} = m_1 + \frac{m_2}{A/B} \quad (29)$$

$$m_{eff} = m_1 + m_2 + \frac{m_2 \left(\frac{2\Omega^2}{\alpha+1} \frac{m_2}{s_\alpha^2 B^{\alpha-1}} \right)^{1/\alpha}}{1 - \left(\frac{2\Omega^2}{\alpha+1} \frac{m_2}{s_\alpha^2 B^{\alpha-1}} \right)^{1/\alpha}} \quad (30)$$

Az effektív tömeg negatív, ha:

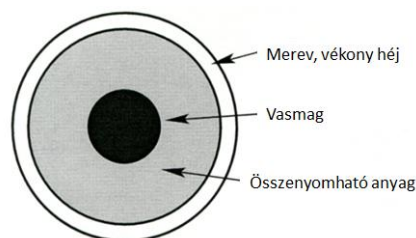
$$1 < \frac{\Omega}{\Omega_1} < \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right)^{\alpha/2} \quad (31)$$

$$\Omega_1^2 = \frac{s_\alpha^2 B^2}{2m_2} (1 + \alpha) \quad (32)$$

Nagyon fontos felhívni a figyelmet arra, hogy a nem-lineáris tömeg-a-tömegben típusú rezgő rendszernek a lineárisnál szélesebb a frekvenciasáv-rése, ahol megállítja a hullámokat. A frekvenciasáv-rés szélessége nő, ahogy a rugó nem-lineáris tulajdonsága növekszik, azaz a megállító sáv-rés szélessége a lineáris esetben a legkeskenyebb. A nem-lineáris paramétertől függően változik a rezonancia-rendszer pozíciója is.

3.4 Negatív effektív tömeg a gyakorlatban

Talán a legismertebb felhasználása a negatív effektív tömegnek az amerikai hadsereg által korábban üzemeltetett F-117A Nighthawk repülőgép, azaz a Lopakodó. Rádió hullámok eliminálása volt a cél, viszont a működési elv igen hasonló az akusztikus metaanyagokéhoz. A gép egyrészt a formatervezése, másrészt az acélgolyós festékbevonata miatt volt láthatatlan a radar számára. Ez utóbbi elektromosan szigetelt, speciális méretű vas-pentakarbonil ($\text{Fe}(\text{CO})_5$) golyókból áll, beágyazva kétkomponensű epoxy festékbe. Minden egyes kis golyó kvarc (SiO_2) bevonattal van ellátva szigetelési céllal egy szabadalmaztatott eljárás segítségével. A gerjesztő radar hullámok rezgéseket indukálnak az alternáló mágneses mezővel a golyókban, amelyek a radar hullámok energiáját saját mozgásukon keresztül hővé alakítják. A keletkezett hő átadódik a repülőgép testére, ahol disszipálódik.

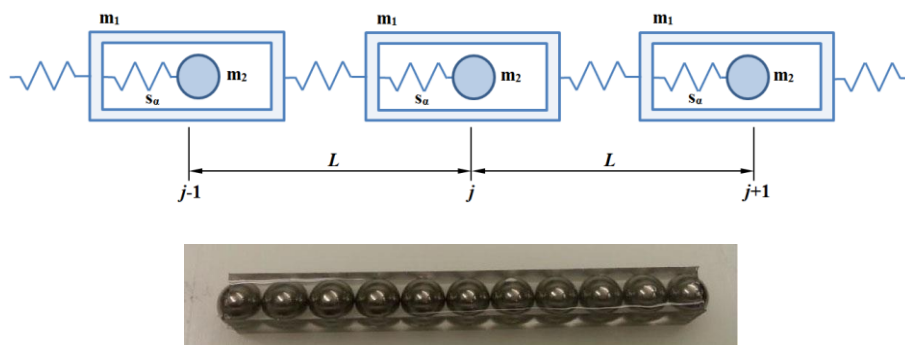


34. ábra. Negatív effektív tömegű alapegység felépítése

Hogyan lehet tehát előállítani azt a struktúrát, amely „negatív tömegű” válasszal reagál egy adott frekvenciájú gerjesztésre nem sokkal a saját frekvenciája felett? A metaanyag alegysége

lehet például egy gömb alakú vasmag, egy könnyű, merev burkoló héj és a kettő között gumi vagy más alkalmasan megválasztott, anizotrop rugalmas anyag (szilikon, bizmut) (34. ábra). Amikor $\omega < \omega_2$, a mag rész azonos fázisban mozog a gerjesztő hullámokkal, az effektív tömeg pedig pozitív. Amikor viszont $\omega > \omega_2$, a mag rész ellentétes fázisban rezeg a gerjesztő hullámokkal, valamint a külső merev héjjal. Nem sokkal a csatolt tömeg (azaz a belső mag és a rugalmas kitöltő anyag) sajátfrekvenciája fölött történő gerjesztés hatására úgy fog tűnni, mintha a testnek „negatív tömege” lenne.

Az aleggységeket sorba kötve egydimenziós rendszert kapunk (35. ábra).

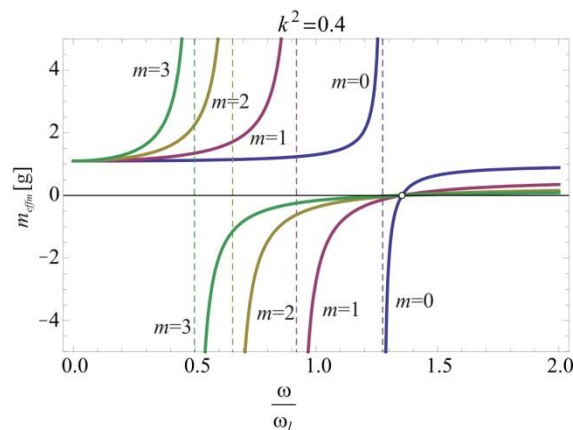


35. ábra. Akusztikus metaanyag egydimenziós alapegysége [70]

A sorba kötött egységek effektív tömege:

$$m_{eff} = m_1^{(j)} + m_2^{(j)} + \frac{m_2^{(j)} \left(\frac{2\Omega^2}{\alpha+1} \frac{m_2^{(j)}}{s_\alpha^2 B^{\alpha-1}} \right)^{1/\alpha}}{1 - \left(\frac{2\Omega^2}{\alpha+1} \frac{m_2^{(j)}}{s_\alpha^2 B^{\alpha-1}} \right)^{1/\alpha}} \quad (33)$$

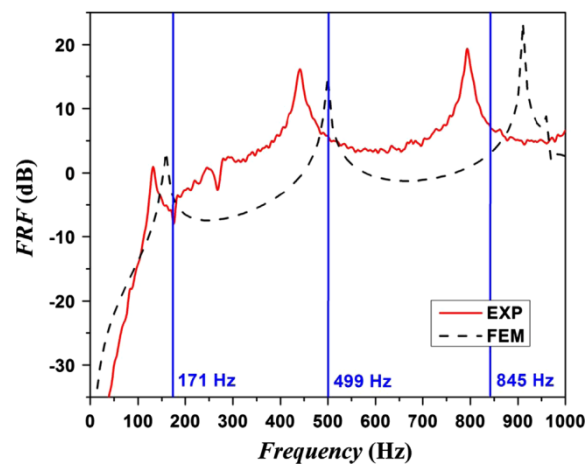
A különböző csatolt tömegek különböző frekvenciákon hoznak létre negatív effektív tömeget (36. ábra).



36. ábra. Negatív effektív tömeg frekvenciasáv-rés eltolódása nem-lineáris rendszer esetén

[70]

A metaanyagokkal folytatott kísérletek céljából összeállításra került egy egyszerű rendszer, ahol egy befogott metaanyag tartó egyik oldalát egy frekvencia-vezérelt vibrátor gerjeszti, a másik oldalát pedig egy gyorsulásmérő méri. Mind a két jelet egy jelanalizátor összesíti, és az adatokat továbbítja egy laptopra, szoftveres feldolgozás, rögzítés és a Frekvencia Válasz Függvény (FRF) előállítás céljából. A kísérleti berendezés által mért FRF úgy lett meghatározva, mint a gyorsulásmérő kimeneti feszültség jele és a vibrátor bemeneti feszültség jelének aránya a frekvencia függvényében. A 37. ábra egy erősen nem-lineáris, három féle csatolt tömeggel ellátott metanyag csillapítási értékeit mutatja a gerjesztési frekvencia függvényében [71].



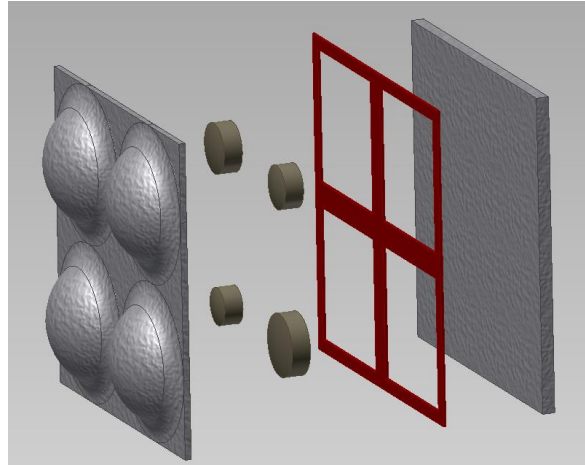
37. ábra. Kísérleti berendezés által mért Frekvencia Válasz Függvény (FRF) [71]

A folytonos vonal mutatja a kísérlet eredményeit, míg a szaggatott vonal az elméleti számításokét. Látható, hogy a „beszakadások” mindig a csatolt tömegek saját frekvenciái feletti frekvencia-tartományban jelentkeznek, a rugók erősen nem-lineáris tulajdonságainak megfelelően igen széles sávban.

3.5 A „Tapéta”-jellegű metaanyag struktúra

A metanyag szakirodalmának vizsgálata során merült fel bennem a gondolat, hogy a fő tömeghez párhuzamosan csatolt rezonáló tömegekkel kvázi két-dimenziós rezgéscsökkentő eszközt lehetne létrehozni. Az elképzelésnek a „Tapéta” nevet adtam (38. ábra). Feltételeztem a gyárthatóság szem előtt tartása miatt, hogy egy egyszerű, de használható tömeg-a-tömegben metastruktúra alegység 4-5 csatolt tömegnél többet nem tartalmazhat. Ha mindegyik kellően széles sávban tud csillapítani, amihez célszerűen választott nem-linearitású

rugókarakterisztikákra lesz szükség, akkor lefedhető lesz vele egy legalább 600-800 Hz szélességű frekvenciatartomány, ami már használható szintű vibrációcsökkentő anyagot eredményez.



38. ábra „Tapéta”-jellegű metastruktúra elemi egysége

A „Tapéta” alapegység 2x2 mátrix kiosztása miatt öt szabadságfokú rendszer jött létre, ahol a hordozó réteg és a fedő réteg biztosítja a fő tömeget (m_1), amiben négy darab, különböző tömegű csatolt tömeg kerül elhelyezésre (m_{2-5}) (38. ábra). A hordozó réteg (jobbra) és a fedő réteg (balra) egy ragasztóréteggel (vörös szín) kerül egyesítésre, a csatolt tömegek pedig a fedőrétegben célszerűen kialakított csészécskébe kerülnek. A csészék fala adja a rugalmasságot és egy csekély csillapítást a csatolt tömegekhez, amelyeket kis elmozdulások miatt lineáris karakterisztikával közelíthetünk. Ha a csillapítást növelni szeretnénk, akkor a csészéket kitölthetjük a csatolt tömegek körül valamilyen elasztikus anyaggal. Ennek az alapegységnek a mérete milliméteres nagyságrendű lehet, és a nevéből adódóan síkban kerülnek egymás mellé elhelyezésre.

A fizikai modell matematikai leírása (transzlációs mozgást feltételezve) az egy szabadságfokú modelltől a két szabadságfokún keresztül lett elvégezve, kiterjesztve az öt és n szabadságfokú modellre is. A leíráshoz forgóvektoros megoldást használtam.

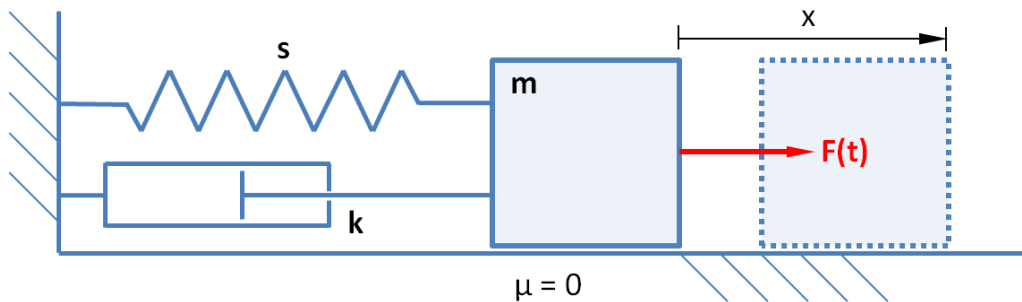
Transzlációs modell

Ez a fejezet az I. tézist eredményező, forgóvektorokkal végzett levezetéseket mutatja be.

Egy szabadságfokú, gerjesztett, csillapított, transzlációs rezgés

Az egy szabadságfokú, viszkózus csillapítású, periodikus gerjesztésű rezgési modell (39. ábra) egy tömegből, egy sebességgel lineárisan arányos ($F_{csillapító} = -k\dot{x}$), viszkózus

csillapításból és egy lineáris karakterisztikájú ($F_{rugó} = -sx$) rugóból áll [72]. A gerjesztést sinus függvénnyel írjuk le.



39. ábra Egy szabadságfokú, periodikus gerjesztésű, viszkózus csillapítású rezgő rendszer modellje

Írjuk fel a rendszer mozgásegyenleteit az impulzus-tétel alapján [5, 7, 72]

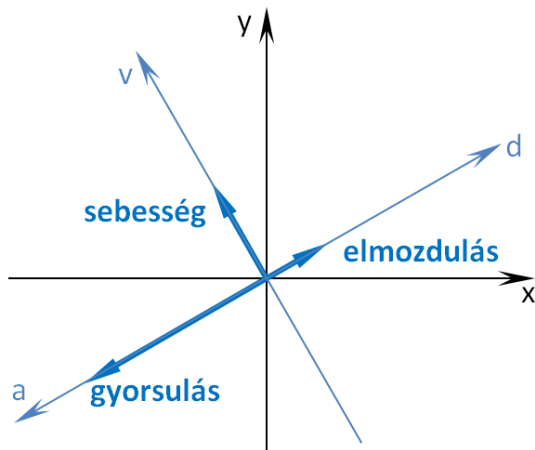
$$m\ddot{x} = F_0 \sin(\omega_g t) - k\dot{x} - sx \quad (34)$$

kis átalakítással:

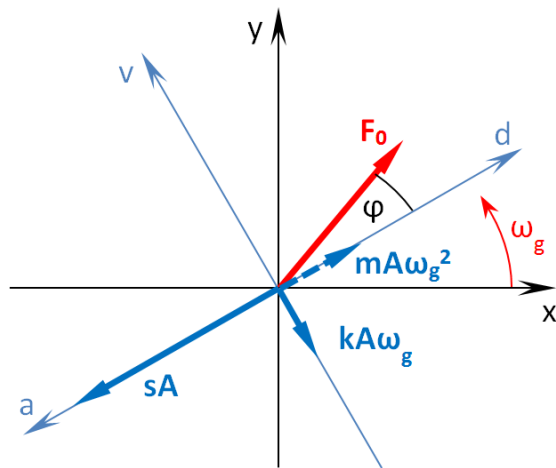
$$m\ddot{x} + k\dot{x} + sx = F_0 \sin(\omega_g t) \quad (35)$$

A mozgást leíró egyenlet egy állandó együtthatójú, lineáris inhomogén differenciálegyenlet, amelynek a megoldása a homogén egyenlet általános (x_h) és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásából (x_p) tevődik össze. A homogén egyenlet megoldása a csillapítás miatt idővel teljesen megszűnik, az inhomogén rész partikuláris része hordozza a gerjesztett rezgést, ez utóbbira fordítjuk figyelmünket [5, 7].

Mivel az egyenlet minden tagja azonos ω_g szögsebességgel forog, harmonikusan változik, az egyenletet forgó vektorokkal ábrázolom (φ a gerjesztő erő és a gerjesztett rezgés közötti fáziseltolódás, ami a csillapításnak köszönhető). Az ábrázolás során a harmonikus rezgőmozgás elmozdulás, sebesség, gyorsulás vektorait a 40. ábra szemlélteti. Ez alapján az (35) egyenletben szereplő erők forgóvektorai a 41. ábrán láthatóak, ahol az eredő erőt D'Alembert elvének megfelelően ellentétes irányban (szaggatott vonallal) ábrázolom, hogy a vektorok egyensúlyi helyzetet alkossanak [5]:



40. ábra Forgóvektor koordináták



41. ábra Egyensúlyi erőrendszer forgóvektorai

Írjuk fel a d és v irányú egyensúlyi erővektor egyenleteket az impulzus törvény alapján [5]:

$$d: 0 = F_0 \cos \varphi + mA\omega_g^2 - sA \quad (36)$$

$$v: 0 = F_0 \sin \varphi - kA\omega_g \quad (37)$$

Kis átrendezéssel:

$$d: F_0 \cos \varphi = A(s - m\omega_g^2) \quad (38)$$

$$v: F_0 \sin \varphi = kA\omega_g \quad (39)$$

A (39) egyenletet elosztva az (38) egyenlettel kapjuk meg a fáziseltolódás értékét:

$$tg \varphi = \frac{F_0 \sin \varphi}{F_0 \cos \varphi} = \frac{kA\omega_g}{A(s - m\omega_g^2)} = \frac{k\omega_g}{s - m\omega_g^2} \quad (40)$$

Kiemelve az m tömeget, bevezetve a $\beta = \frac{k}{2m}$ fajlagos csillapítási tényezőt és $\omega^2 = \frac{s}{m}$ összefüggést:

$$tg \varphi = \frac{\frac{m-k}{m}\omega_g}{m(\frac{s}{m} - \omega_g^2)} = \frac{\frac{k}{m}\omega_g}{\frac{s}{m} - \omega_g^2} = \frac{2\beta\omega_g}{\omega^2 - \omega_g^2} \quad (41)$$

Osszuk el ω^2 -tel mind a nevezőt, mind a számlálót, és alkalmazzuk a Lehr-féle $D = \frac{k}{k_{krit}} = \frac{\beta}{\omega}$ csillapítási viszonyszámot, ahol $k_{krit} = 2m\omega$ a kritikus csillapítási tényező:

$$tg \varphi = \frac{\frac{2\beta\omega_g}{\omega}}{\frac{\omega^2 - \omega_g^2}{\omega^2}} = \frac{2D\frac{\omega_g}{\omega}}{1 - \frac{\omega_g^2}{\omega^2}} \quad (42)$$

Így a gerjesztő erő és az elmozdulás között létrejövő fáziseltolódás [5]:

$$\varphi = \arctan \frac{2D \frac{\omega g}{\omega}}{1 - \left(\frac{\omega g}{\omega}\right)^2} \quad (43)$$

A (38), (39) egyenleteket négyzetre emelve és összeadva kapjuk az amplitúdó értékét:

$$F_0^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = A^2 \left[(s - m\omega_g^2)^2 + (k\omega_g)^2 \right] \quad (44)$$

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(s - m\omega_g^2)^2 + (k\omega_g)^2}} \quad (45)$$

Bővítsük itt is a nevezőt és a számlálót $1/m$ -mel, vezessük be a $\beta = k/2m$ fajlagos csillapítási tényezőt, az $\omega^2 = s/m$ összefüggést, valamint a $x_{st} = F_0/s$ statikus rugómelegnyúlást:

$$A = \frac{\frac{F_0 s}{s m}}{\sqrt{\left(\frac{s}{m} - \omega_g^2\right)^2 + \left(\frac{k}{m}\omega_g\right)^2}} = \frac{x_{st}\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_g^2)^2 + (2\beta\omega_g)^2}} \quad (46)$$

Bővítsük az egyenleteket ω^2/ω^2 -tel, valamint vezessük be a $D = k/k_{kr} = k/2m\omega = \beta/\omega$ csillapítási viszonzszámot:

$$A = \frac{x_{st}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_g^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\frac{\beta\omega_g}{\omega}\right)^2}} = \frac{x_{st}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_g^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2D\frac{\omega_g}{\omega}\right)^2}} \quad (47)$$

Ez alapján a dimenzió nélküli A/x_{st} nagyítási tényező [5]:

$$\frac{A}{x_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_g^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2D\frac{\omega_g}{\omega}\right)^2}} \quad (48)$$

Nem-lineáris karakterisztikájú egy szabadságfokú rezgés

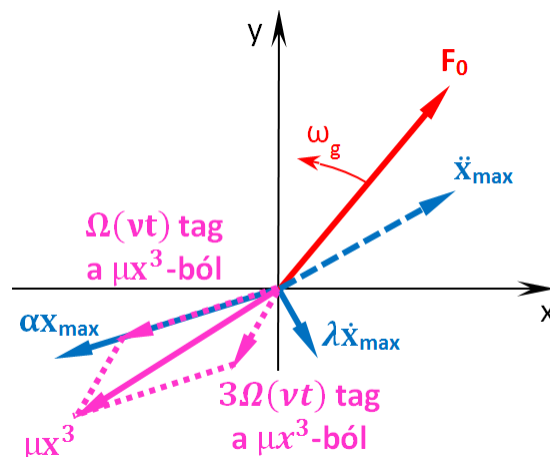
Ha a rugóerők és a csillapítási erők lineárisan változnak az elmozdulás és a sebesség változásával, akkor a harmonikus mozgás egyenletei analitikusan megoldhatóak, míg ha a változások nem-lineárisak, akkor csak közelítő eljárások léteznek. [73]

A nem-lineáris rugó-karakterisztikájú, viszkózus csillapítású, egy szabadságfokú rezgés mozgásegyenletét először G. Duffing írta fel és oldotta meg megközelítően, még 1918-ban [74]:

$$\ddot{x}(t) + ax(t) + \mu x^3(t) + \lambda \dot{x}(t) = F(t) \quad (49)$$

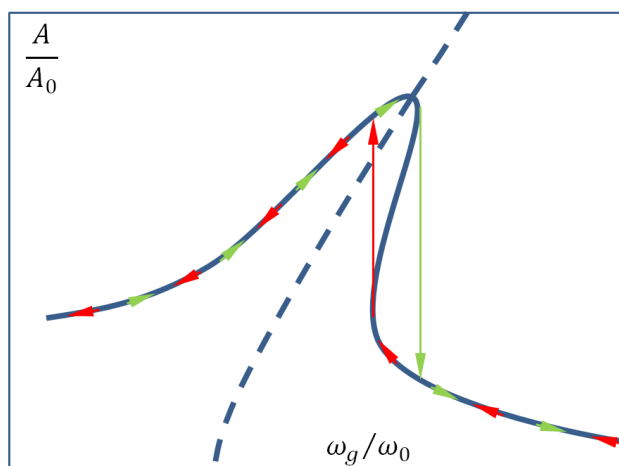
Látható, hogy a nem-lineáris rugó-karakterisztikát harmadfokú függvénnyel közelítette. Az egyenlet megoldásában a harmadfokú tag esetében a $\sin^3(t) = \frac{3 \sin(t) - \sin(3t)}{4}$ azonosság felhasználásával csökkentjük a hatványt. Ennek megfelelően a forgóvektoros ábrázolásban a Duffing egyenlet tartalmaz egy olyan tagot, amely nem a többi vektorral azonos szögsebességgel forog, hanem annak háromszorosával. Emiatt, valamint amiatt, hogy az elmozdulás, sebesség és gyorsulás vektorok között nem állandó a fáziskésés, a nem-lineáris megoldás forgóvektorral is csak közelítő lehet.

A 42. ábrán látható a Duffing egyenlet forgóvektoros ábrázolása. A lineárishoz képest egy μx^3 taggal bővült az egyenlet, amely nem a többi vektorral azonos $\Omega(\nu t)$ szögsebességgel forog. Ezt a tagot fel lehet bontani két vektorra, mindkettő az elmozdulással egyenesen arányos, az egyik $\Omega(\nu t)$, a másik $3\Omega(\nu t)$ szögsebességgel forog. Ez persze elegendő ahhoz, hogy analitikus megoldása forgóvektorral se legyen az egyenletnek, viszont közelítő megoldás több is létezik.



42. ábra: Nem-lineáris rugó-karakterisztikájú egy-szabadságfokú rezgő rendszer erőinek forgóvektoros ábrázolása [74]

A 43. ábra mutatja be a nem-lineáris, progresszív rugómerevségű rezgő rendszer rezonancia viszonyait [74]. A zöld nyíl jelzi az amplitúdó alakulását a gerjesztési frekvencia növelése mellett, míg a piros nyíl annak csökkentése esetén tapasztalható maximális kitéréseket mutatja. Látható, hogy mindkét irány tartalmaz egy ugrást, ahol az instabil rész átugrásával folytatja az útját a görbe. Az ábra legfontosabb része viszont a szaggatott vonalú „gerinc” jobbra dőlése, amely egy viszonylag széles frekvenciasávú rezonancia jelenséget mutat. Ez a lineárishoz képest tágabb sávzélességű rezgéscsökkentést tesz lehetővé.

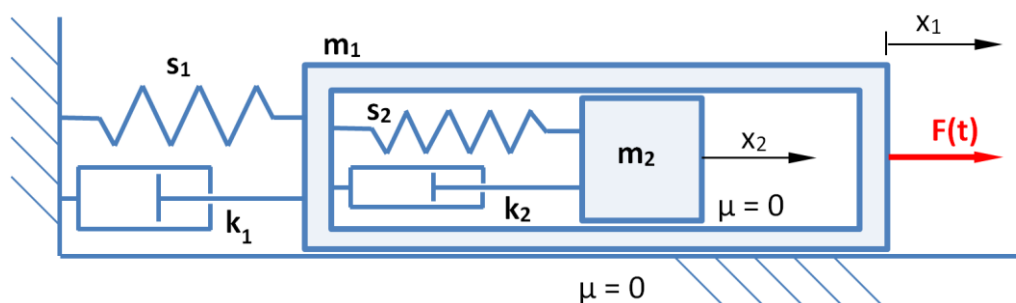


43. ábra: Nem-lineáris rugómerevségű rezgő rendszer rezonancia-viszonyai [12]

A „Tapéta”-jellegű modell leírása szempontjából a továbbiakban maradok a lineáris rugó karakterisztikánál.

Két szabadságfokú, gerjesztett, csillapított, translációs rezgés

A korábban már ismertetett dinamikus rezgéscsillapítás alapja a két szabadságfokú, viszkózus csillapítású, periodikus gerjesztésű rezgési modell. Ez két tömegből (m_1, m_2), két, sebességgel lineárisan arányos csillapításból (k_1, k_2 ahol $F_{csillapító} = -k\dot{x}$) és két, lineáris karakterisztikájú rugóból áll (s_1, s_2), ahol az $F(t)$ periodikus gerjesztés az m_1 tömeget terheli. Az alkotóelemek összeállítása, azaz a modell a 44. ábrán látható.



44. ábra Két szabadságfokú, gerjesztett, csillapított rezgés modellje

A két tömegre külön-külön felírhatóak a mozgást leíró differenciál-egyenletek:

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 \dot{x}_1 + k_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + s_1 x_1 + s_2 (x_1 - x_2) = F_0 \sin(\omega_g t) \quad (50)$$

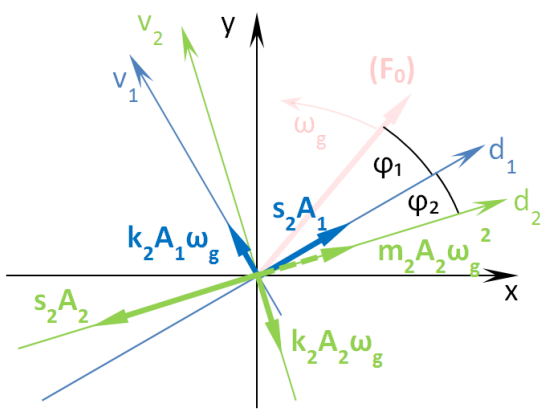
$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + s_2 (x_2 - x_1) = 0 \quad (51)$$

Bontsuk fel a zárójleket:

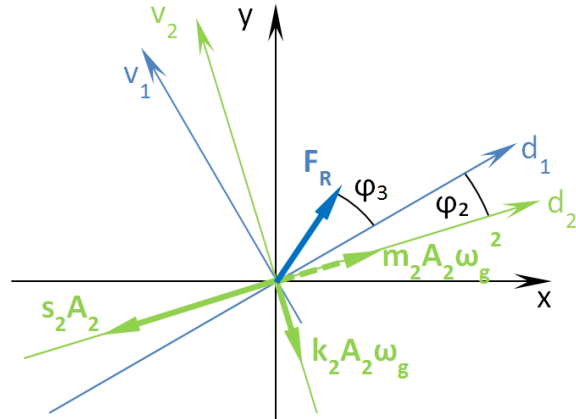
$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 \dot{x}_1 + k_2 \dot{x}_1 - k_2 \dot{x}_2 + s_1 x_1 + s_2 x_1 - s_2 x_2 = F_0 \sin(\omega_g t) \quad (52)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 \dot{x}_2 - k_2 \dot{x}_1 + s_2 x_2 - s_2 x_1 = 0 \quad (53)$$

Az (53) egyenletet nézhetjük úgy, mint öt erő egyensúlyát D'Alembert szerint, előjelváltást követően. Az előjelváltott (53)-es egyenletet szemléltessük ismét forgó vektorokkal (45. ábra). A gerjesztő-erő nem vesz részt közvetlenül az m_2 test mozgásában, csak az értelmezés miatt szerepel.



45. ábra Csatolt tömegre ható erőrendszer



46. ábra Csatolt tömeg eredő erővel

A $k_2 A_1 \omega_g$, $s_2 A_1$ erővektorokat helyettesítsük egyetlen F_R eredő erővel (46. ábra), és ezzel visszavezetjük a feladatot egy egy-szabadságfokú problémára. Ezek alapján az m_2 , k_2 , s_2 rezgő rendszernek $\varphi_2 + \varphi_3$ fáziseltolódása van az F_R eredő erőhöz képest. A további levezetéseknel használjuk a következő összefüggéseket: $s_2 = \omega_2^2 m_2$, $D_2 = k_2 / 2m_2 \omega_2 = \beta_2 / \omega_2$. Az F_R eredő erő d_1 koordinátatengellyel bezárt szöge és nagysága:

$$\varphi_3 = \arctan \frac{k_2 A_1 \omega_g}{s_2 A_1} = \arctan 2 \frac{k_2}{2m_2 \omega_2} \frac{\omega_g}{\omega_2} = \arctan 2 D_2 \frac{\omega_g}{\omega_2} \quad (54)$$

$$|F_R| = \sqrt{(k_2 A_1 \omega_g)^2 + (s_2 A_1)^2} = A_1 \sqrt{(k_2 \omega_g)^2 + s_2^2} \quad (55)$$

A (55) egyenletnél emeljük ki s_2 -öt, majd helyettesítsük be D_2 -öt:

$$|F_R| = A_1 s_2 \sqrt{4 \left(\frac{k_2}{2m_2 \omega_2} \right)^2 \left(\frac{\omega_g}{\omega_2} \right)^2 + 1} = A_1 s_2 \sqrt{4 D_2^2 \left(\frac{\omega_g}{\omega_2} \right)^2 + 1} \quad (56)$$

Ez alapján a csatolt tömeg statikus amplitúdója:

$$x_{st2} = \frac{F_R}{s_2} = A_1 \sqrt{4D_2^2 \left(\frac{\omega g}{\omega_2}\right)^2 + 1} \quad (57)$$

Látható, hogy az m_2 tömeget gerjesztő F_R eredő erőnek csak a nagysága függ az m_1 tömeg mozgásától, a d_1 koordinátatengellyel bezárt szöge nem.

A két tömeg rezgése közötti φ_2 fáziskésést a következő összefüggéssel kapjuk meg:

$$\varphi_2 = \arctg \frac{2D_2 \frac{\omega g}{\omega_2}}{1 - \left(\frac{\omega g}{\omega_2}\right)^2} - \varphi_3 = \arctg \frac{2D_2 \frac{\omega g}{\omega_2}}{1 - \left(\frac{\omega g}{\omega_2}\right)^2} - \arctg 2D_2 \frac{\omega g}{\omega_2} \quad (58)$$

Mivel ismert az $\arctg(x) - \arctg(y) = \arctg \frac{x-y}{1+xy}$ trigonometriai összefüggés, az m_2 fáziskésése az m_1 -hez képest (az egyszerűsítés menetét mellőzve):

$$\varphi_2 = \arctg \frac{\frac{2D_2 \frac{\omega g}{\omega_2}}{1 - \left(\frac{\omega g}{\omega_2}\right)^2} - 2D_2 \frac{\omega g}{\omega_2}}{1 + \frac{2D_2 \frac{\omega g}{\omega_2}}{1 - \left(\frac{\omega g}{\omega_2}\right)^2} \cdot 2D_2 \frac{\omega g}{\omega_2}} = \arctg \frac{\frac{\omega g}{\omega_2}}{2D_2 \left(\frac{\omega g}{\omega_2}\right)^2 - \frac{1}{2D_2} + 2D_2} \quad (59)$$

A (47) és (59) egyenletek felhasználásával kapjuk meg a csatolt tömeg maximális elmozdulását:

$$A_2 = \frac{x_{st2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega g}{\omega_2}\right)^2 + \left(2D_2 \frac{\omega g}{\omega_2}\right)^2}} = \frac{A_1 \sqrt{4D_2^2 \left(\frac{\omega g}{\omega_2}\right)^2 + 1}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega g}{\omega_2}\right)^2 + \left(2D_2 \frac{\omega g}{\omega_2}\right)^2}} = A_1 \sqrt{\frac{\left(2D_2 \frac{\omega g}{\omega_2}\right)^2 + 1}{\left(1 - \frac{\omega g}{\omega_2}\right)^2 + \left(2D_2 \frac{\omega g}{\omega_2}\right)^2}} \quad (60)$$

Látható, hogy ha az m_1 tömeg áll, azaz $A_1 = 0$, akkor az m_2 tömeg sem hozható mozgásba, ellentétben a csillapítás nélküli esettel, ahol megfelelően beállított s_1 , m_1 , s_2 , m_2 értékek mellett, $\omega_g = \omega_2$ gerjesztés során az m_1 tömeg állóra fékezhető. A (60) alapján meghatározható a két test rezgési amplitúdóinak viszonya, amit **amplitúdó aránynak** neveztem el és G_{21} -vel jelöltem:

$$G_{21} = \frac{A_2}{A_1} = \sqrt{\frac{\left(2D_2 \frac{\omega g}{\omega_2}\right)^2 + 1}{\left(1 - \frac{\omega g}{\omega_2}\right)^2 + \left(2D_2 \frac{\omega g}{\omega_2}\right)^2}} \quad (61)$$

Az m_2 tömegre vonatkozó A_2/x_{st2} nagyítási tényező a (48) egyenlet alapján:

$$\frac{A_2}{x_{st2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_g^2}{\omega_2^2}\right)^2 + \left(2D_2 \frac{\omega_g}{\omega_2}\right)^2}} \quad (62)$$

Az m_1 tömeg mozgására vonatkozó forgóvektoros ábrázoláshoz először az (53) egyenletet rendezzük át, majd helyettesítsük be (52)-be:

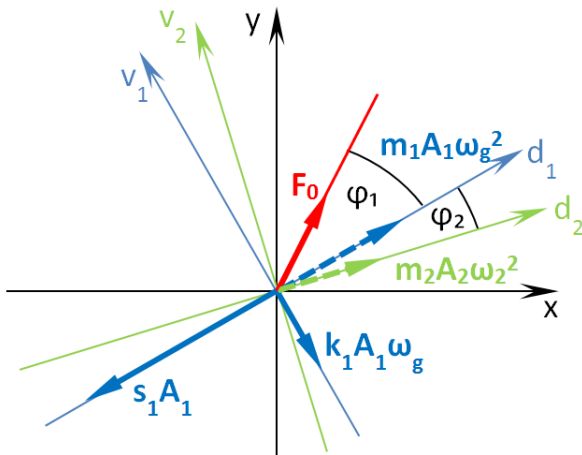
$$m_2 \ddot{x}_2 = k_2 \dot{x}_1 - k_2 x_2 + s_2 x_1 - s_2 x_2$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 \dot{x}_1 + s_1 x_1 + m_2 \ddot{x}_2 = F_0 \sin(\omega_g t) \quad (63)$$

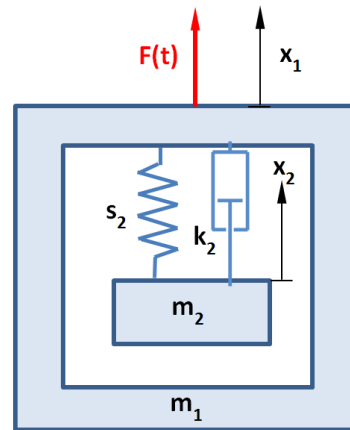
A (63) egyenletet rendezzük át D'Alembert szerint:

$$0 = F_0 \sin(\omega_g t) - m_1 \ddot{x}_1 - k_1 \dot{x}_1 - s_1 x_1 - m_2 \ddot{x}_2 \quad (64)$$

A (64) egyenletet ábrázoljuk ismét forgó vektorokkal (47. ábra). A gerjesztő erő felel az m_1 , k_1 , s_1 rendszer gerjesztésén felül az m_2 gyorsításáért is. φ_1 az m_1 tömeg F_0 gerjesztő-erőhöz mért fáziseltolódása, φ_2 pedig továbbra is az m_1 tömeg és az m_2 tömeg mozgása közötti fáziseltolódás. Mind az F_0 , mind az $m_2 \ddot{x}_{2max}$ vektort bontsuk fel d_1 , v_1 irányú komponensekre (φ_2 a (59) egyenlet alapján számolható):



47. ábra Az m_1 testre ható forgóvektorok



48. ábra Tömeg-a-tömegben alrendszer

Írjuk fel az erővektorok d_1 és v_1 irányú egyensúlyát D'Alembert szerint, majd fejezzük ki az F_0 vektorkomponenseket:

$$d_1: s_1 A_1 = F_0 \cos \varphi_1 + m_1 A_1 \omega_g^2 + m_2 A_2 \omega_g^2 \cos \varphi_2 \quad (65)$$

$$F_0 \cos \varphi_1 = s_1 A_1 - m_1 A_1 \omega_g^2 - m_2 A_2 \omega_g^2 \cos \varphi_2 \quad (66)$$

$$v_1: F_0 \sin \varphi_1 = k_1 A_1 \omega_g + m_2 A_2 \omega_g^2 \sin \varphi_2 \quad (67)$$

Helyettesítsük be (61) alapján az $A_2 = G_{21}A_1$ összefüggést, majd emeljük ki A_1 -et:

$$F_0 \cos \varphi_1 = s_1 A_1 - m_1 A_1 \omega_g^2 - m_2 G_{21} A_1 \omega_g^2 \cos \varphi_2 \quad (68)$$

$$F_0 \sin \varphi_1 = k_1 A_1 \omega_g + m_2 G_{21} A_1 \omega_g^2 \sin \varphi_2 \quad (69)$$

$$F_0 \cos \varphi_1 = A_1 (s_1 - m_1 \omega_g^2 - m_2 G_{21} \omega_g^2 \cos \varphi_2) \quad (70)$$

$$F_0 \sin \varphi_1 = A_1 (k_1 \omega_g + m_2 G_{21} \omega_g^2 \sin \varphi_2) \quad (71)$$

Fejezzük ki (70) és (71) felhasználásával a φ_1 -et, amely az F_0 gerjesztő erő és a m_1 elmozdulása közötti fáziseltolódás, valamint az m_1 maximális elmozdulását, az A_1 -et:

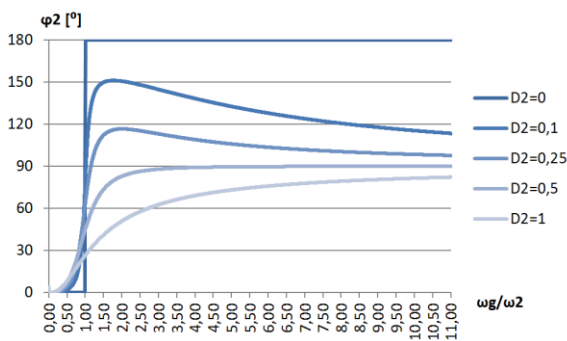
$$\tan \varphi_1 = \frac{F_0 \sin \varphi_1}{F_0 \cos \varphi_1} = \frac{k_1 \omega_g + m_2 G_{21} \omega_g^2 \sin \varphi_2}{s_1 - m_1 \omega_g^2 - m_2 G_{21} \omega_g^2 \cos \varphi_2} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} F_0^2 (\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1) &= \\ &= A_1^2 [(s_1 - m_1 \omega_g^2 - m_2 G_{21} \omega_g^2 \cos \varphi_2)^2 + (k_1 \omega_g + m_2 G_{21} \omega_g^2 \sin \varphi_2)^2] \end{aligned} \quad (73)$$

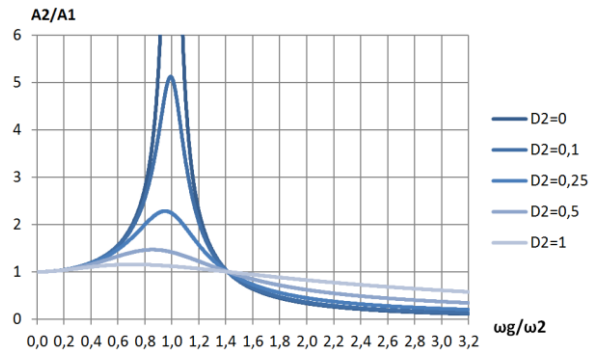
$$A_1 = \frac{F_0}{\sqrt{(s_1 - m_1 \omega_g^2 - m_2 G_{21} \omega_g^2 \cos \varphi_2)^2 + (k_1 \omega_g + m_2 G_{21} \omega_g^2 \sin \varphi_2)^2}} \quad (74)$$

Csillapított tömeg-a-tömegben alrendszer

A tömeg-a-tömegben alrendszer modellje viszkózus csillapítással a 48. ábrán látható [70]. A gerjesztő erő közvetlenül az m_1 tömegen hat, míg a két tömeg mozgása közötti kapcsolatot az s_2 rugó és a k_2 csillapítás biztosítja. A két tömeg egymáshoz viszonyított mozgása, azaz a fáziseltolódás és az amplitúdó arány leírható a két-szabadságfokú rendszerrel megállapított (59) és (61) egyenletekkel. Mindkét változó csak a D_2 csillapítási viszonyozámtól és az ω_g/ω_2 frekvencia aránytól függ. A φ_2 fáziseltolódás diagramját a 49. ábra szemlélteti.



49. ábra $\varphi_2(D_2, \frac{\omega_g}{\omega_2})$ fáziseltolódás



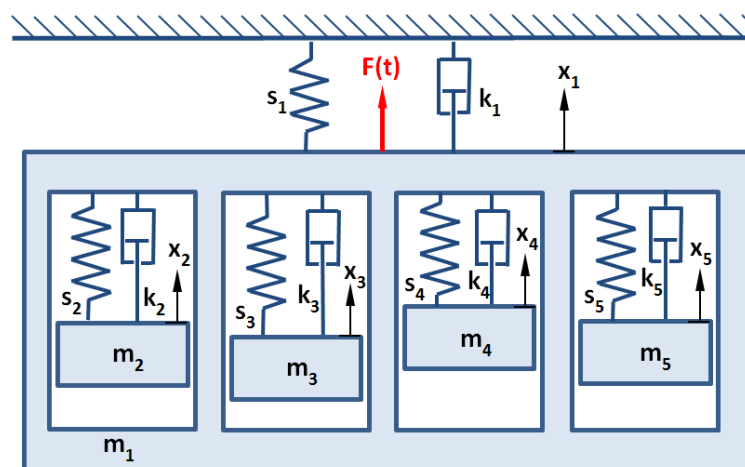
50. ábra $G_{21}(D_2, \frac{\omega_g}{\omega_2}) = \frac{A_2}{A_1}$ amplitúdó arány

Látható, hogy a legnagyobb fázis-különbség csillapítás nélkül jön létre, ekkor az ω_2 sajátfrekvencia feletti gerjesztő frekvenciák esetében a két tömeg ellentétes fázisban rezeg. A csillapítás növekedésével csökken a fáziskésés maximuma, a kritikus csillapítást meghaladó értékek esetében nem haladja meg a 90° -ot, és a maximális értékek az ω_2 sajátfrekvenciától egyre inkább jobbra tolódnak el a csillapítás növelésével. A gerjesztő frekvencia növelésével a fáziseltolódás értéke szintén 90° -hoz tart.

A $G_{21} = A_2/A_1$ amplitúdó arányt ábrázolja a 50. ábra különböző csillapítások esetén. A maximális értéket itt is a csillapítás nélküli eset jelenti, mégpedig az ω_2 saját frekvencián történő gerjesztés esetében. A csillapítás növekedésével csökken a két amplitúdó közötti különbség, és a maximális értékek balra tolódása figyelhető meg.

Öt szabadságfokú, gerjesztett, csillapított, transzlációs rezgés

A két szabadságfokú modell leírásával a „Tapéta”-jellegű metanyag alapegységére jellemző, öt szabadságfokú, párhuzamosan csatolt tömegekkel rendelkező modell (51. ábra) mozgásának matematikai leírása már viszonylag egyszerű, hiszen minden egyes csatolt tömeg mozgását csak a fő tömeg mozgása befolyásolja, és a csatolt tömegek is csak a fő tömeg mozgását befolyásolják közvetlenül. A rugók és csillapítások továbbra is lineáris karakterisztikájúak. Az alap 5-DoF transzlációs modellben az m_1 főtömeget az s_1 rugó és a k_1 csillapítás rögzíti a fix ponthoz és az F_1 erő gerjeszti periodikusan. Mind a négy csatolt tömeg (m_{2-5}) a fő tömeghez (m_1) kapcsolódik rugókkal (s_i) és csillapítással (k_i) ($i=2..5$).



51. ábra Transzlációs öt szabadságfokú (5-DoF) modell

A testekre külön-külön felírt mozgásegyenletek a következők:

$$m_1: \quad m_1\ddot{x}_1 = F_0 \sin(\omega_g t) - k_1\dot{x}_1 - s_1x_1 - k_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - s_2(x_1 - x_2) - k_3(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) - s_3(x_1 - x_3) - k_4(\dot{x}_1 - \dot{x}_4) - s_4(x_1 - x_4) - k_5(\dot{x}_1 - \dot{x}_5) - s_5(x_1 - x_5) \quad (75)$$

$$m_2: \quad m_2\ddot{x}_2 = k_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + s_2(x_1 - x_2) \quad (76)$$

$$m_3: \quad m_3\ddot{x}_3 = k_3(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) + s_3(x_1 - x_3) \quad (77)$$

$$m_4: \quad m_4\ddot{x}_4 = k_4(\dot{x}_1 - \dot{x}_4) + s_4(x_1 - x_4) \quad (78)$$

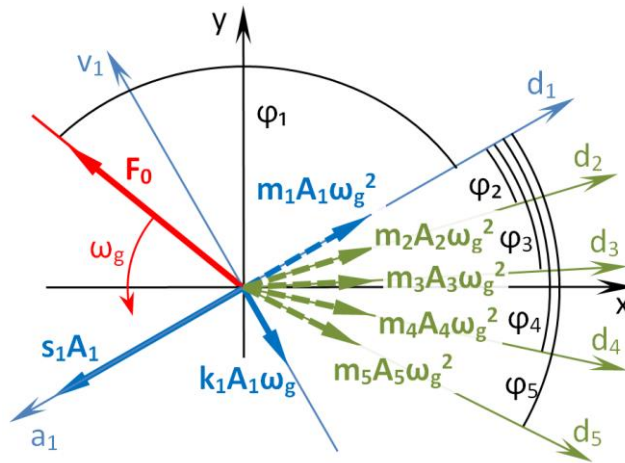
$$m_5: \quad m_5\ddot{x}_5 = k_5(\dot{x}_1 - \dot{x}_5) + s_5(x_1 - x_5) \quad (79)$$

Behelyettesítve a (76), (77), (78), (79) egyenleteket a (75)-be:

$$m_1\ddot{x}_1 = F_0 \sin(\omega_g t) - k_1\dot{x}_1 - s_1x_1 - m_2\ddot{x}_2 - m_3\ddot{x}_3 - m_4\ddot{x}_4 - m_5\ddot{x}_5 \quad (80)$$

Átrendezve D'Alembert szerint az erők egyensúlyi helyzete (52. ábra):

$$0 = F_0 \sin(\omega_g t) - m_1\ddot{x}_1 - k_1\dot{x}_1 - s_1x_1 - m_2\ddot{x}_2 - m_3\ddot{x}_3 - m_4\ddot{x}_4 - m_5\ddot{x}_5 \quad (81)$$



52. ábra Az m_1 tömegre ható erők D'Alembert szerint, 5-DoF esetén

Zárójelek feloldásával és a (76), (77), (78), (79) egyenletek újrarendezésével:

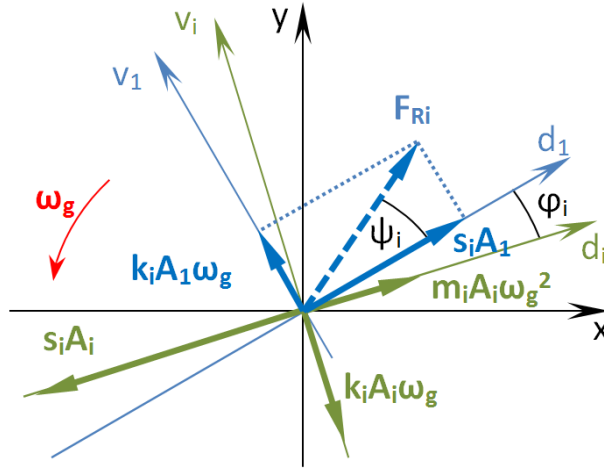
$$m_2\ddot{x}_2 + k_2\dot{x}_2 + s_2x_2 - k_2\dot{x}_1 - s_2x_1 = 0 \quad (82)$$

$$m_3\ddot{x}_3 + k_3\dot{x}_3 + s_3x_3 - k_3\dot{x}_1 - s_3x_1 = 0 \quad (83)$$

$$m_4\ddot{x}_4 + k_4\dot{x}_4 + s_4x_4 - k_4\dot{x}_1 - s_4x_1 = 0 \quad (84)$$

$$m_5\ddot{x}_5 + k_5\dot{x}_5 + s_5x_5 - k_5\dot{x}_1 - s_5x_1 = 0 \quad (85)$$

A (82)-(85) egyenletek mutatják a csatolt tömegekre (m_i , $i=2-5$) vonatkozó erőket. Mindegyik egy-egy egy szabadságfokú (1-DoF) rezgés, F_{Ri} erő által gerjesztve, ami a $k_i A_1 \omega_g$ és a $s_i A_1$ erők eredője (53. ábra)



53. ábra Az i . csatolt tömegekre ható erők a főtömeg és az i . csatolt tömeg mozgásában

Látható, hogy nincs közvetlen egymásra hatásuk a csatolt tömegeknek, mindegyik csak az m_1 főtömeg mozgását befolyásolja.

Mivel a fáziskésés a gerjesztő erő és az elmozdulás között, majd az amplitúdó 1-DoF szerint:

$$tg\varphi = \frac{2D\frac{\omega g}{\omega}}{1 - \frac{\omega^2 g}{\omega^2}} \quad (86)$$

$$A = \frac{x_{st}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2 g}{\omega^2}\right)^2 + \left(2D\frac{\omega g}{\omega}\right)^2}} \quad (87)$$

A (86) és (87) alapján a ψ_i fáziskésés az F_{Ri} eredő erő (mint gerjesztés) és a d_i elmozdulás között, valamint az erő maximuma az erők egyensúlya esetén:

$$\psi_i = \arctan 2D_i \frac{\omega g}{\omega_i} \quad (88)$$

$$|F_R| = A_1 s_i \sqrt{4D_i^2 \left(\frac{\omega g}{\omega_i}\right)^2 + 1} \quad (89)$$

A ψ_i fázis késés nem függ az m_1 tömeg mozgásától. A (88) (89) egyenletek szerint a d_i és d_1 elmozdulások között létrejövő φ_i fáziskésés, valamint az amplitúdó arányok:

$$\varphi_i = \arctan \frac{\frac{\omega_g}{\omega_i}}{\frac{1}{2D_i(\frac{\omega_g}{\omega_i})^2} - \frac{1}{2D_i} + 2D_i} \quad (90)$$

$$G_{i1} = \frac{A_i}{A_1} = \frac{\sqrt{\left(2D_i\frac{\omega_g}{\omega_i}\right)^2 + 1}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_g^2}{\omega_i^2}\right)^2 + \left(2D_i\frac{\omega_g}{\omega_i}\right)^2}} \quad (91)$$

A d_1 és v_1 irányban felírt erő egyensúly felírható D'Alembert szerint a (81) egyenlet alapján (52. ábra):

$$d_1: \quad s_1 A_1 = F_0 \cos \varphi_1 + m_1 A_1 \omega_g^2 + \sum_{i=2}^5 m_i A_i \omega_g^2 \cos \varphi_i \quad (92)$$

$$F_0 \cos \varphi_1 = s_1 A_1 - m_1 A_1 \omega_g^2 - \sum_{i=2}^5 m_i A_i \omega_g^2 \cos \varphi_i \quad (93)$$

$$v_1: \quad F_0 \sin \varphi_1 = k_1 A_1 \omega_g + \sum_{i=2}^5 m_i A_i \omega_g^2 \sin \varphi_i \quad (94)$$

Behelyettesítve $A_i = G_{i1} A_1$ a (91) alapján, majd kiemelve A_1 amplitúdót:

$$F_0 \cos \varphi_1 = s_1 A_1 - m_1 A_1 \omega_g^2 - \sum_{i=2}^5 m_i G_{i1} A_1 \omega_g^2 \cos \varphi_i \quad (95)$$

$$F_0 \sin \varphi_1 = k_1 A_1 \omega_g + \sum_{i=2}^5 m_i G_{i1} A_1 \omega_g^2 \sin \varphi_i + \sum_{i=2}^5 m_i G_{i1} A_1 \omega_g^2 \sin \varphi_i \quad (96)$$

$$F_0 \cos \varphi_1 = A_1 (s_1 - m_1 \omega_g^2 - \sum_{i=2}^5 m_i G_{i1} \omega_g^2 \cos \varphi_i) \quad (97)$$

$$F_0 \sin \varphi_1 = A_1 (k_1 \omega_g + \sum_{i=2}^5 m_i G_{i1} \omega_g^2 \sin \varphi_i) \quad (98)$$

Felhasználva a (97) és (98) egyenleteket a gerjesztő erő és az m_1 főtömeg közötti fáziskésés, valamint a főtömeg maximális A_1 elmozdulása:

$$\tan \varphi_1 = \frac{F_0 \sin \varphi_1}{F_0 \cos \varphi_1} = \frac{k_1 \omega_g + \sum_{i=2}^5 m_i G_{i1} \omega_g^2 \sin \varphi_i}{s_1 - m_1 \omega_g^2 - \sum_{i=2}^5 m_i G_{i1} \omega_g^2 \cos \varphi_i} \quad (99)$$

$$\begin{aligned} F_0^2 (\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1) &= \\ &= A_1^2 [(s_1 - m_1 \omega_g^2 - \sum_{i=2}^5 m_i G_{i1} \omega_g^2 \cos \varphi_i)^2 + (k_1 \omega_g + \sum_{i=2}^5 m_i G_{i1} \omega_g^2 \sin \varphi_i)^2] \end{aligned} \quad (100)$$

$$A_1 = F_0 / [(s_1 - m_1 \omega_g^2 - \sum_{i=2}^5 m_i G_{i1} \omega_g^2 \cos \varphi_i)^2 + (k_1 \omega_g + \sum_{i=2}^5 m_i G_{i1} \omega_g^2 \sin \varphi_i)^2]^{1/2} \quad (101)$$

5-DoF eredmények bemutatása egy számítási példán keresztül

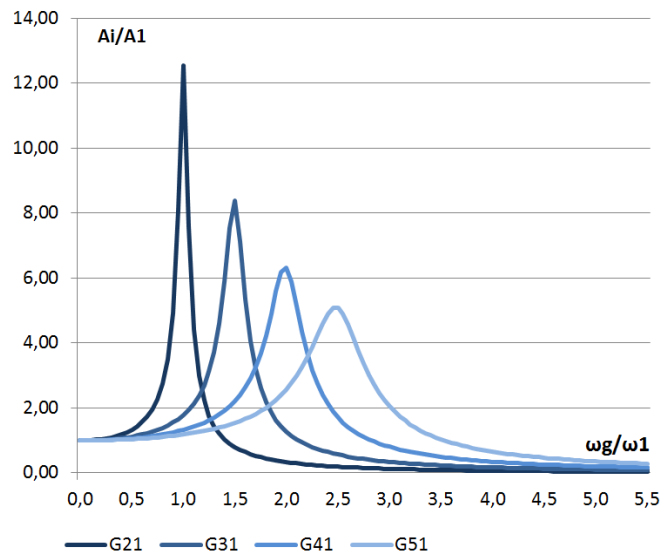
A következő példa illusztrálja a kapott egyenletek hasznosságát. Az öt szabadságfokú rendszer beállított paramétereit az 1. tábla tartalmazza:

1. tábla Öt szabadságfokú rezgő rendszer alapadatai számítási példához felvéve

Tömegek:		1.	2.	3.	4.	5.	
Felvett adatok	$F_0=$	100					N
	$s_i=$	2500	2500	2500	2500	2500	N/m
	$m_i=$	0,0625	0,0625	0,02778	0,01563	0,01	kg
	$k_i=$	5	1	1	1	1	Ns/m
Számított adatok	$\omega_i=$	200	200	300	400	500	1/s
	$D_i=$	0,2	0,04	0,06	0,08	0,1	

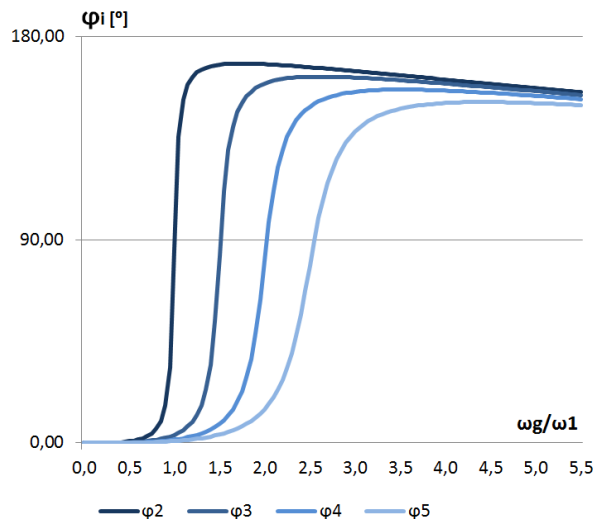
Mindegyik rugó merevség (s_i) azonos értéket kapott, a csillapítási tényezők (k_i) a csatolt testek esetében egyformák, a főtömeg esetében négyszeres értékű. A csatolt tömegek saját körfrekvenciái 100 1/s értékkel vannak egymás mellé rendezve.

Az analitikus számítások helyességét numerikus számításokkal támasztottam alá.



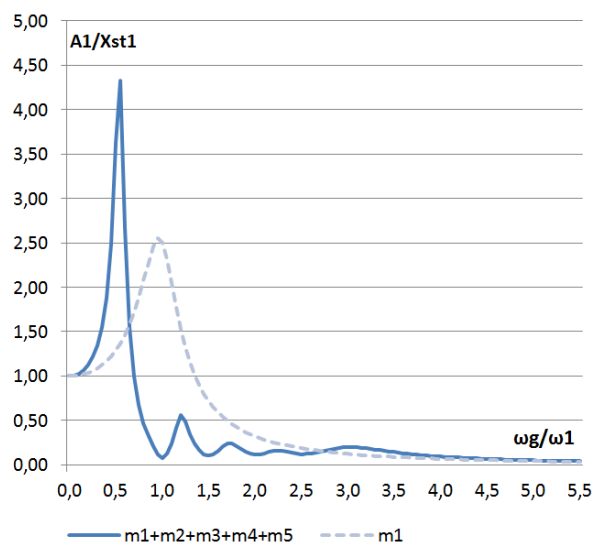
54. ábra $G_{i1} = A_i/A_1$ amplitúdó arányok az ω_g/ω_1 körfrekvencia arány függvényében

A $G_{i1} = A_i/A_1$ amplitúdó arányokat mutatja be az 54. ábra a gerjesztő frekvencia és a főtömeg saját frekvencia arányának (ω_g/ω_1) függvényében. A d_i and d_1 elmozdulások közötti φ_i fáziskésést az ω_g/ω_1 függvényében az 55. ábra tartalmazza.



55. ábra Fáziskésés a d_i és d_1 elmozdulások között ω_g/ω_1 függvényében

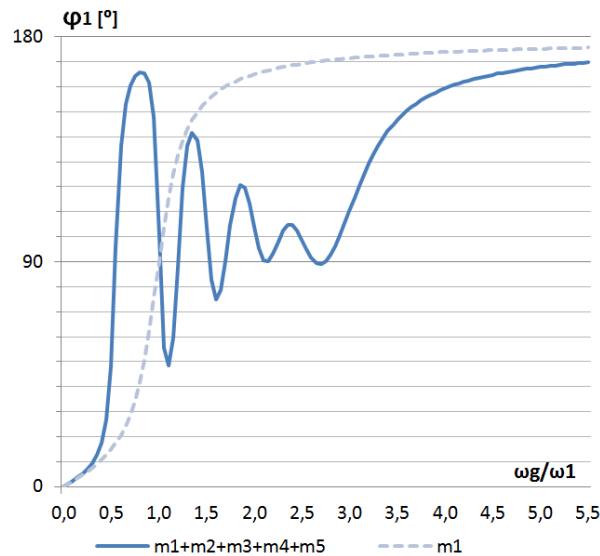
Mindkét ábra jól érzékelteti az ω_i saját frekvenciák egyenletes eloszlását. A csatolt tömegek maximális amplitúdó (A_i) és maximális fáziskésés (φ_i) értékei csökkennek, ahogy a Lehr-féle csillapítási tényezők növekednek.



56. ábra Főtömeg amplitúdói osztva a statikus nyúlásával ω_g/ω_1 függvényében

A számunkra legfontosabb információt az 56. ábra mutatja be. Az m_1 főtömeg maximális elmozdulásai láthatóak (osztva a statikus megnyúlásával) a gerjesztési frekvenciák függvényében. A folytonos vonal a négy csatolt tömeggel létrehozott mozgást képviseli, míg a szaggatott vonal az azok nélkülit. Nyilvánvaló, hogy a rezgéscsökkentés az m_1 tömeg eredeti ω_1 saját körfrekvencia környezetében és az annál magasabb frekvencia tartományokban kellően sikeres volt, de probléma jelentkezett az alacsonyabb régióban.

Viszont az öt test esetén jelentkező ω_R saját frekvenciának az elhelyezkedése pusztán hangolás kérdése, arra kell csak vigyázni, hogy a működtetési tartománytól messze essen. Az 57. ábra mutatja be a gerjesztő erő és a főtömeg elmozdulása közötti fáziskésést.

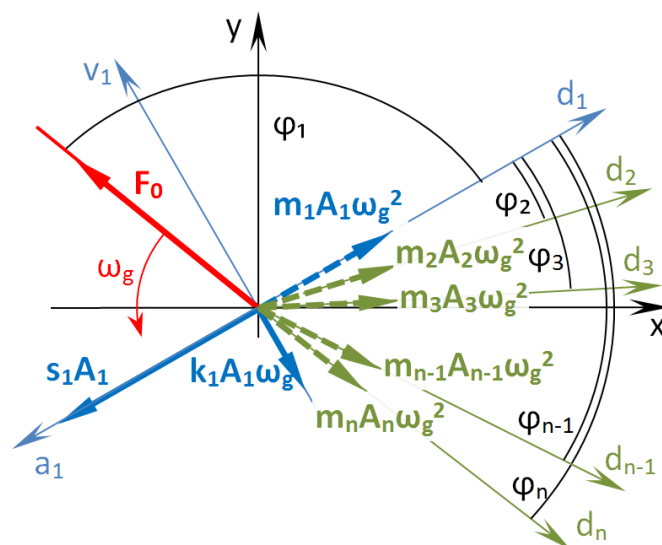


57. ábra A gerjesztő erő és a főtömeg elmozdulás közötti fázis késés ω_g/ω_1 függvényében

Az n-szabadságfokú, gerjesztett, csillapított translációs rezgés

Ez a fejezet az I. tézis megfogalmazását tartalmazza.

Az előzőek alapján leírható a véges számú n-szabadságfokú translációs (n-DoF) modell is. A forgóvektoros értelmezését az 58. ábra mutatja be.



58. ábra Az m_1 tömegegre ható erők D'Alembert szerint, n szabadságfok esetén

A főtömeg mozgására felírt egyenlet (a korábbi levezetések kiterjesztésével):

$$A_1 = \frac{F_0}{\sqrt{(s_1 - m_1 \omega_g^2 - \sum_{i=2}^n m_i G_{i1} \omega_g^2 \cos \varphi_i)^2 + (k_1 \omega_g + \sum_{i=2}^n m_i G_{i1} \omega_g^2 \sin \varphi_i)^2}} \quad (102)$$

ahol:

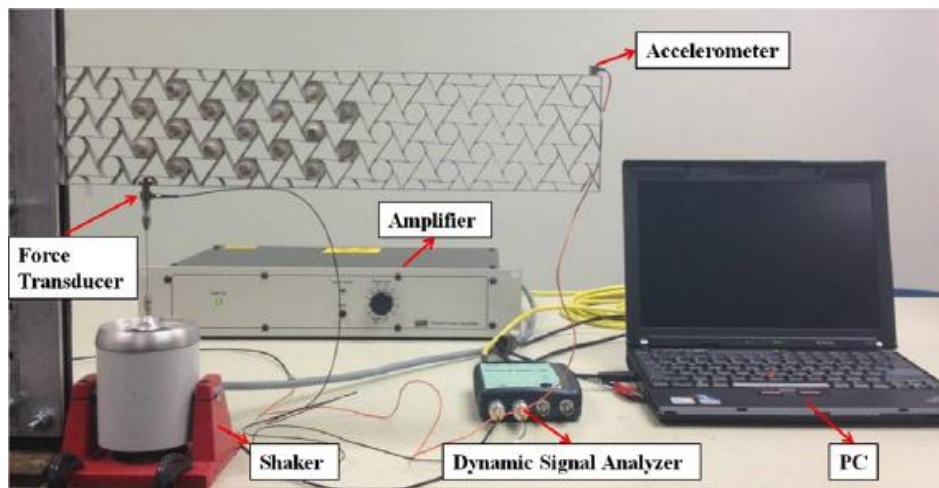
$$G_{i1} = \sqrt{\frac{(2D_i \omega_g \omega_i^{-1})^2 + 1}{(1 - \omega_g^2 \omega_i^{-2})^2 + (2D_i \omega_g \omega_i^{-1})^2}}, \quad \varphi_i = \arctg \frac{\omega_g \omega_i^{-1}}{(2D_i)^{-1} (\omega_g \omega_i^{-1})^{-2} - (2D_i)^{-1} + 2D_i},$$

$$D_i = \frac{k_i}{2m_i \omega_i}, \quad \omega_i = \sqrt{\frac{s_i}{m_i}}$$

4. MÉRÉSEK

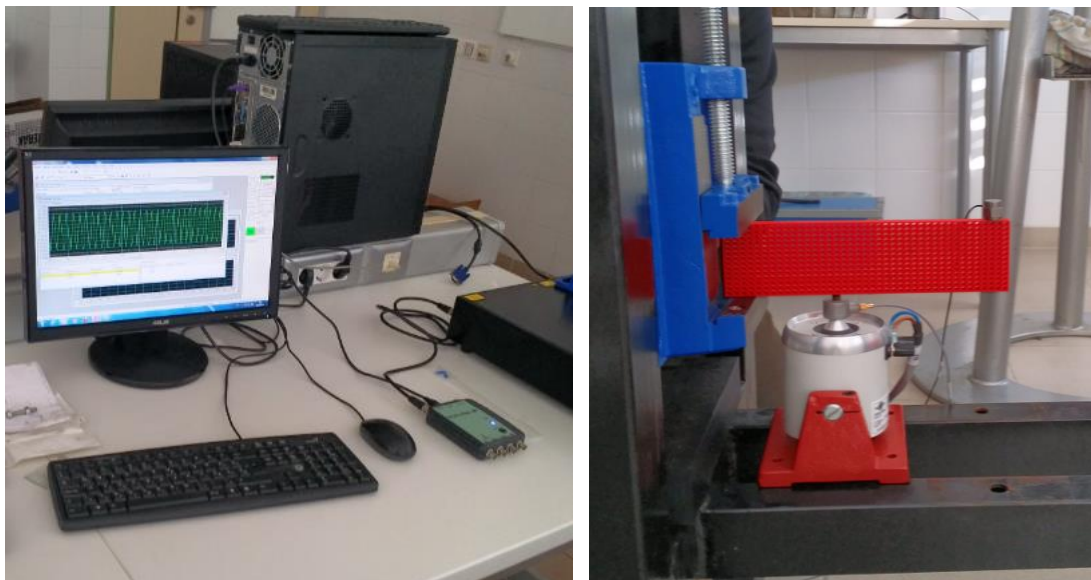
4.1 Mérő rendszer kialakítása

A rezgéscsökkentés mérésére rendelkezésemre állt egy Brüel&Kjaer PHOTON+ dinamikus jel analizátort. A mérőkör összeállítására egy kínai, folyamatban lévő kísérlet adta az ötletet, ahol szintén ez az eszköz lett felhasználva (59. ábra) [75]:



59. ábra Zhu és társai által összeállított mérőkör [75]

A PHOTON+ analizátor rendelkezik a Frekvencia Válasz Függvény mérési képességgel, amely remekül használható a rezgéscsökkentés mérésére a megadott frekvencia tartományon.



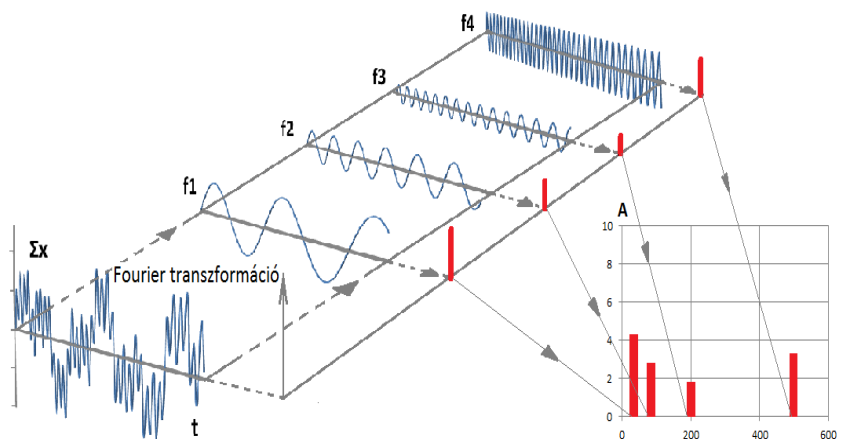
60. ábra PHOTON+ dinamikus jelanalizátor erősítővel, tartó szerkezettel, rázógéppel, gyorsulás- és erőmérőkkel, valamint egy 3D nyomtatóval készített metanyag vázzal

A beszerzések eredményeképpen a következő eszközök álltak rendelkezésemre a rezgéscsillapítás mérésére (60. ábra):

- Brüel&Kjaer PHOTON+ dinamikus jel analizátor
- Brüel&Kjaer LDS VDS 200 rázó gép, V201 tartó egységgel
- Brüel&Kjaer LDS LPA100 erősítő
- erőmérők, gyorsulásmérők
- tartó szerkezet

Mint azt már korábban említettem, az általunk vizsgált metaanyag működési elve a dinamikus rezgéscsillapításéhoz hasonló, csak tömeg-a-tömegben elrendezésben. Ennek megfelelően létezik egy külső, üreges hordozó váz, az m_1 tömeg, ami a periodikus gerjesztést kapja. Ebben a vázban vannak célszerű geometriai alakzatban elhelyezve különböző, úgynevezett csatolt tömegek (m_2 , m_3 , m_4 stb.), amelyek átveszik a váz rezgését, ha a gerjesztési frekvencia nem sokkal haladja meg a saját frekvenciáikat, ezzel nagymértékben lecsökkentve a váz rezgési amplitúdóját.

Az első elképzelés az volt, hogy a mérés során a 3D nyomtatóval előállított metaanyag vázban rögzítjük a csatolt tömegeket, és adott frekvenciatartományban változtatva a gerjesztés frekvenciáját mérjük a rezgéscsillapítást. A 60. ábra jobboldali képén látható a kék satuba befogott, piros színű (3D nyomtatással készült) metaanyag váz.



61. ábra: Fourier transzformáció

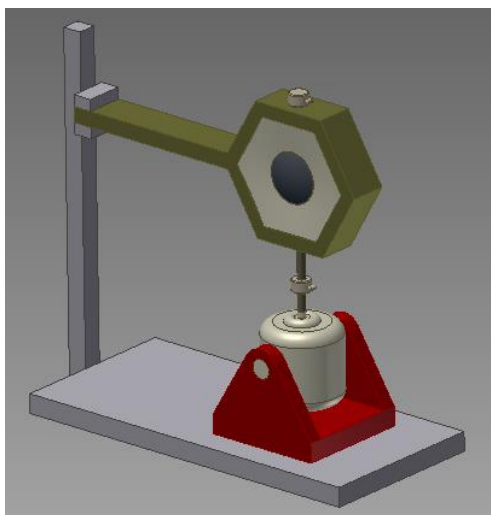
Alatta helyezkedik el az LDS V200 rázó gép, amely maximálisan 17,8 N nagyságú erővel és max. 5 mm amplitúdóval képes a mintadarabot rezegetni a jelgenerátor által kiadott frekvencián és jelformátumban 10-13000 Hz tartományban. Számomra az akusztikus rezgések 100-1000 Hz közötti tartománya jelenti a célterületet. A PHOTON+ jelgenerátor

vezérli a rázógépet az LDS LPA erősítőn keresztül, valamint fogadja és feldolgozza az erőmérő és gyorsulásmérő jeleit is. A PHOTON+ egy jelgenerátor és valós idejű, gyors Fourier transzformációval (61. ábra) (FFT) dolgozó elemző készülék, melynek segítségével Frekvencia Válasz Függvényt (Frequency Response Function, FRF) állít elő a kimeneti (output) és a bemeneti (input) jelek arányában. Kimeneti jelként felhasználható az a szinuszos jel, ami a rázógép vezérlését végzi, valamint a rázógépre közvetlenül felhelyezett erőmérő jele (8230 DeltaTron Force Transducer). Válaszjelként (bemeneti jelként) érkezik annak a gyorsulásmérőnek a jele, amit a metaanyagra helyezünk fel.

Mindezek értékeiből a jelanalizátor megadja a Frekvencia Válasz Függvényt, amelynek a beszakadásai, azaz a rezgést csillapító hatása ott fog jelentkezni, ahol a gerjesztési frekvencia éppen meghaladja a csatolt tömegek sajátfrekvenciáit. Lineáris rugó-karakterisztika esetén ezek keskeny, meredek falú beszakadások, míg nem-lineáris esetben kiszélesednek, tágabb frekvencia-tartományban csillapítják a rezgést.

4.2 Egy és két szabadságfokú alrendszer rezgés mérési tervei

A kísérletek és a várható eredmények alapos végiggondolását követően úgy döntöttem, hogy a metastruktúránk rezgés-csökkentési méréseit a legegyszerűbb két szabadságfokú rendszerrel fogom kezdeni. Ez a tömeg-a-tömegben elrendezésű rendszer adja a keresett metaanyagok alapegységét, így ezek számítása és mérése alapvető fontosságú. A tervezett 2-DoF vizsgálati modellt a 62. ábra mutatja. A vizsgálatok segítségével az elméleti számítások és a gyakorlati eredmények közötti összefüggést igyekeztem feltárni, valamint itt akartam begyakorolni a mérési eljárás technikáját is. Mivel a méréshez felhasznált eszközök (rugók, gyorsulásmérők, erőmérők) jelenléte (tömege) befolyásolja a mérések eredményét, ezért korrekciós számítások is várhatóak voltak, melyek segítségével közelíthetőek a valós eredmények az elméletihez.



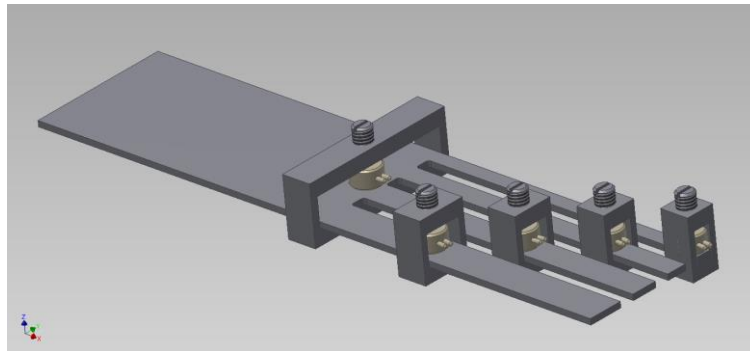
62. ábra: Két szabadságfokú, tömeg-a-tömegben elrendezésű rezgő rendszer mérési modellje

Szükség volt arra a módszerre is, amivel a merevnek tekintett testek között használt, még ismeretlen anyag rugómerevségét (s_2) és csillapítási tényezőjét (k_2), valamint a periodikusan gerjesztett m_1 tömeg megfogására használt szakasz rugómerevségét (s_1) és csillapítási tényezőjét (k_1) is meg lehet határozni. A rugómerevség tűnt az egyszerűbbnek, hiszen rugókarakterisztikát fel lehet vázolni különböző terhelésre adott elmozdulások alapján. Az erő biztosítására a rázó gép is felhasználható konstans jel ráadásával, az elmozdulás mérésére lézeres elmozdulás érzékelő lenne a legjobb, ami az alap mérőrendszer esetében is célravezetőbb lenne a tömeggel bíró gyorsulásmérőknél, hiszen ez nem befolyásolná a mérést, de az nem állt rendelkezésre. A csillapítási tényező kiszámítására az egyszeri, impulzus jellegű gerjesztés lecsengésének mérése biztosít lehetőséget.

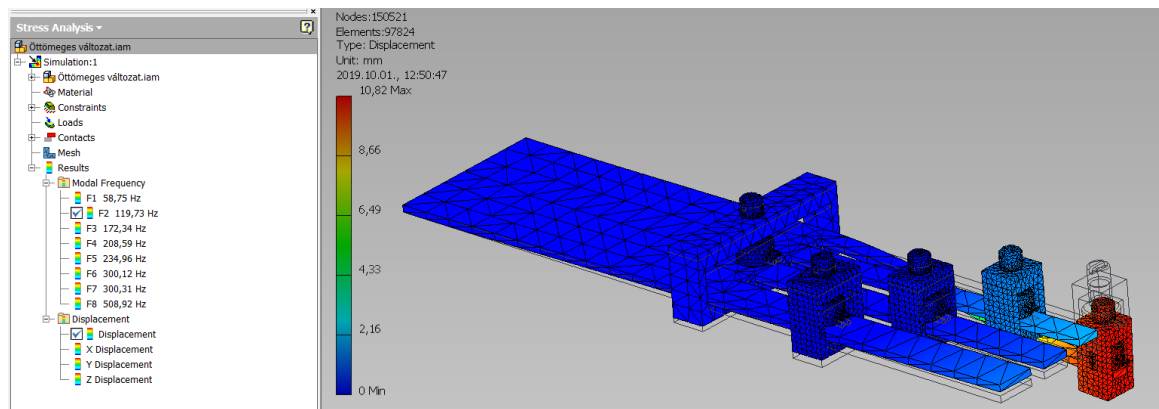
Ennek a 2-DoF elképzelésnek a gyenge pontja a két tömeg között elhelyezett rugalmas anyag volt, amelyet sehogy sem tudtam megfelelő minőségben létrehozni. Előtérbe került többféle anyag (pl. púrhabs, 3D nyomtatott anyag), de egyik sem vált be. Mivel az s_1 rugót már ebben a modellben is hajlított tartó biztosította, felmerült a kérdés, hogy miért ne legyen a csatolt tömeg rugója is hajlított tartó. Komoly eszmecsereket követően sikerült meggyőzőnöm mindkét témavezetőmet, hogy a tiszta hajlított tartós modell előállítása, állíthatósága és paramétereinek számíthatósága olyan nagy előnyt jelent számunkra, amiről kár lenne lemondanunk. Ennek megfelelően viszont ki kellett dolgoznunk a hajlított tartós modell fizikai és matematikai leírását is, majd össze kellett vetnünk a translációs modellével.

4.3 Hajlított tartós modell leírása

Tehát a mérések fizikai megvalósítása során biztosítani kellett többek között a rugóállandók és tömegek állíthatóságát, az elmozdulás méréshez használt gyorsulásmérők rögzítését, a tömegenként egy dimenziós mozgás biztosítását. Az egyik végén befogott, hajlított tartós modellnél a rúd valójában egy acél laprugó, ami kis kitérések esetén garantálja az egy dimenziós mozgást (63. ábra). A 63. ábrán a laprugó bal oldali, függőleges homlok felülete van befogva, középen látható az m_1 főtömeg, a jobboldali részen pedig az egyes csatolt tömegek az állítható laprugókkal. A világosabb hengeres testek a gyorsulásmérőket jelölik.



63. ábra 5-DoF hajlított tartós modell



64. ábra 5-DoF hajlított tartós modell saját körfrekvenciái Autodesk Inventor VEM analízisével

Az AutoDesk Inventorral készült végeselemes sajátfrekvencia elemzés (VEM) szép rezonancia frekvencia értékeket mutatott a beállított rugómerevség/tömeg arányok szerint, melyek közül egyet bemutat a 64. ábra. A laprugó baloldali, függőleges záró síkján helyeztem el a befogás kényszert. A kép bal szélén található Modal frequency oszlopban egymás alatt láthatóak az egyes rugó-tömeg csatolmányhoz tartozó rezonancia frekvenciák. A legfelső $F1=58,75\text{Hz}$ esetében a főtömeg és az összes csatolt tömeg egy fázisban rezeg. $F2-F5$

esetében működésbe lépnek egyesével a csatolt tömegek saját frekvenciái, amelyen az adott csatolt tömeg rezeg, és a főtömeg szinte áll. A 4. ábra éppen a legalacsonyabb saját frekvenciájú csatolt tömeg rezonanciáját mutatja be. F6-tól kezdődően csavarodás és egyéb mozgások jelennek meg.

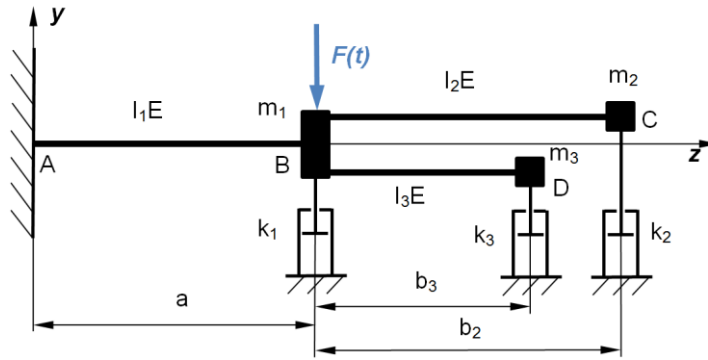
Mivel az elmélet szerint a gerjesztő frekvenciák esetében az egyes saját frekvenciák után következik a dinamikus rezgés-csillapító hatás [5, 7], a modell ígéretesnek mutatkozott, így a 65. ábrán bemutatott rezgésmérő rendszert állítottam össze. A nagy tömegű acél vázra szerelt kék színű satu biztosítja a befogást, amibe a laposacélból készített villa alakú rugót rögzítjük. Az m_1 főtömeg gerjesztését egy rázógép végzi, ez és az m_1 főtömeg között lett elhelyezve egy erőmérő, a tömegek elmozdulását pedig a rajtuk rögzített gyorsulásmérők mérik. A jeleket a Brüel&Kjaer Photon+ dinamikus jelfeldolgozó és jelgenerátor készülék elemezi, és gyors Fourier transzformációval (FFT) azonnal összetevőire bontja a rezgést.



65. ábra Mérő rendszer 3-DoF elrendezésben, gerjesztéssel

Hajlított tartós modell elméleti háttere

Természetesen a translációs modell mozgása és a hajlított tartós modell mozgása között is van eltérés, aminek leírásához és a csatolt tömegek egymásra hatásainak levezetéséhez először egy 3-DoF modell került felállításra (66. ábra), amellyel minden tömeg egymásra hatása leírható [5, 76].



66. ábra Hajlított tartós 3-DoF modell

Az m_1 fő tömeg y irányú elmozdulása a B pontban ható F_1 erő hatására a Betti tétel alapján, majd az ebből levezetett rugóállandó:

$$y_B = \frac{F_1 a^3}{3 I_1 E} \quad (103)$$

$$c_{11} = \frac{y_B}{F_1} = \frac{a^3}{3 I_1 E} \quad (104)$$

Az m_2 és m_3 csatolt tömegek B pontban ható F_1 erő hatására létrejövő y irányú elmozdulásai és a hozzá tartozó rugóállandók a Betti tétel alapján:

$$y_C = \frac{F_1 a^3}{3 I_1 E} + \frac{F_1 a^2 b}{2 I_1 E} = \frac{F_1 a^2 (2a + 3b)}{6 I_1 E} \quad (105)$$

$$c_{12} = \frac{a^2 (2a + 3b_2)}{6 I_1 E} \quad (106)$$

$$c_{13} = \frac{a^2 (2a + 3b_3)}{6 I_1 E} \quad (107)$$

Az m_2 csatolt tömeget a C pontban támadó F_2 erő hatására létrejövő y_B elmozdulás és az ebből eredő rugóállandók:

$$y_B = \frac{F_2 a^3}{3 I_1 E} + \frac{F_2 a^2 b}{2 I_1 E} = \frac{F_2 a^2 (2a + 3b)}{6 I_1 E} \quad (108)$$

$$c_{21} = \frac{a^2 (2a + 3b_2)}{6 I_1 E} \quad (109)$$

$$c_{31} = \frac{a^2 (2a + 3b_3)}{6 I_1 E} \quad (110)$$

Az m_2 csatolt tömeget a C pontban támadó F_2 erő hatására létrejövő y_C elmozdulás, a B pontba redukált erő alapján és az ebből eredő rugóállandók:

$$y_C = \frac{F_2 a^3}{3 I_1 E} + \frac{b_2 F_2 a^2}{2 I_1 E} + \left(\frac{F_2 a^2}{2 I_1 E} + \frac{b_2 F_2 a}{I_1 E} \right) b_2 + \frac{F_2 b_2^3}{3 I_2 E} = \frac{F_2 a(2a^2 + 3ab_2 + 3ab_2 + 6b_2^2)}{6 I_1 E} + \frac{F_2 b_2^3}{3 I_2 E} \quad (111)$$

$$y_C = \frac{F_2 a(a^2 + 3ab_2 + 3b_2^2)}{3 I_1 E} + \frac{F_2 b_2^3}{3 I_2 E} \quad (112)$$

$$c_{22} = \frac{a(a^2 + 3ab_2 + 3b_2^2)}{3 I_1 E} + \frac{b_2^3}{3 I_2 E} \quad (113)$$

$$c_{33} = \frac{a(a^2 + 3ab_3 + 3b_3^2)}{3 I_1 E} + \frac{b_3^3}{3 I_3 E} \quad (114)$$

A két csatolt tömeg mozgásának egymásra hatásának vizsgálatához nézzük a C pontban támadó F_2 erő hatására létrejövő y_D elmozdulást és az ebből eredő rugóállandókat:

$$y_C = \frac{F_2 a^3}{3 I_1 E} + \frac{b_2 F_2 a^2}{2 I_1 E} + \left(\frac{F_2 a^2}{2 I_1 E} + \frac{b_2 F_2 a}{I_1 E} \right) b_3 = \frac{F_2 a(2a^2 + 3ab_2 + 3ab_3 + 6b_2 b_3)}{6 I_1 E} \quad (115)$$

$$c_{23} = \frac{a(2a^2 + 3ab_2 + 3ab_3 + 6b_2 b_3)}{6 I_1 E} \quad (116)$$

$$c_{32} = \frac{a(2a^2 + 3ab_3 + 3ab_2 + 6b_2 b_3)}{6 I_1 E} \quad (117)$$

A tömegek elmozdulási egyenletei:

$$c_{11}F_1 + c_{12}F_2 + c_{13}F_3 + y_1 = 0 \quad (118)$$

$$c_{21}F_1 + c_{22}F_2 + c_{23}F_3 + y_2 = 0 \quad (119)$$

$$c_{31}F_1 + c_{32}F_2 + c_{33}F_3 + y_3 = 0 \quad (120)$$

Behelyettesítve az adott tömegre ható erőket:

$$c_{11}(m_1 \ddot{y}_1 + k_1 \dot{y}_1 - F_0 \sin \omega_g t) + c_{12}(m_2 \ddot{y}_2 + k_2 \dot{y}_2) + c_{13}(m_3 \ddot{y}_3 + k_3 \dot{y}_3) + y_1 = 0 \quad (121)$$

$$c_{21}(m_1 \ddot{y}_1 + k_1 \dot{y}_1 - F_0 \sin \omega_g t) + c_{22}(m_2 \ddot{y}_2 + k_2 \dot{y}_2) + c_{23}(m_3 \ddot{y}_3 + k_3 \dot{y}_3) + y_2 = 0 \quad (122)$$

$$c_{31}(m_1 \ddot{y}_1 + k_1 \dot{y}_1 - F_0 \sin \omega_g t) + c_{32}(m_2 \ddot{y}_2 + k_2 \dot{y}_2) + c_{33}(m_3 \ddot{y}_3 + k_3 \dot{y}_3) + y_3 = 0 \quad (123)$$

Mátrixos formában felírva, kifejezve az erőket a rugóállandó mátrix inverzével:

$$\begin{bmatrix} m_1 \ddot{y}_1 + k_1 \dot{y}_1 - F_0 \sin \omega_g t \\ m_2 \ddot{y}_2 + k_2 \dot{y}_2 \\ m_3 \ddot{y}_3 + k_3 \dot{y}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (124)$$

Rendezve az egyenletet az elmozdulás-függvény deriváltjai szerint:

$$\begin{bmatrix} m_1 \ddot{y}_1 \\ m_2 \ddot{y}_2 \\ m_3 \ddot{y}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \dot{y}_1 \\ k_2 \dot{y}_2 \\ k_3 \dot{y}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \sin \omega_g t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (125)$$

Így 3-DoF esetén a sajátfrekvencia keresésére szolgáló inhomogén differenciál-egyenlet rendszerünk:

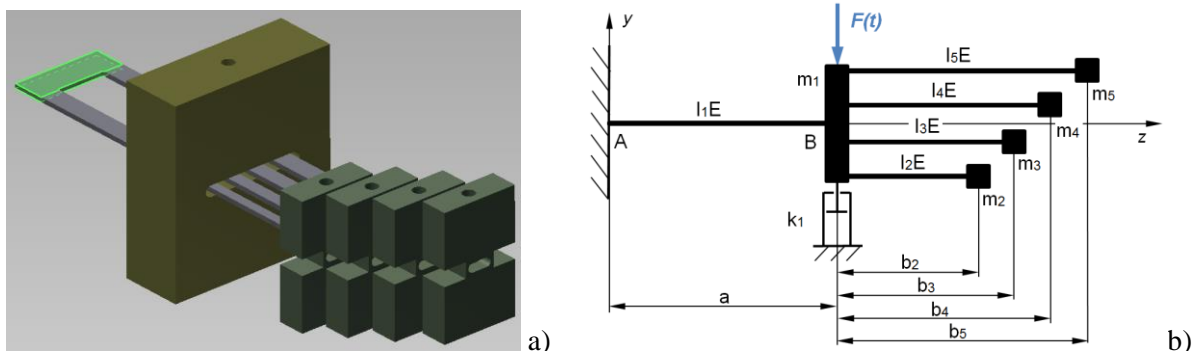
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{F} \quad (126)$$

Ehhez a \mathbf{C} szimmetrikus rugóállandó mátrix a következőképpen áll elő:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (127)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{a^3}{3 I_1 E} & \frac{a^2(2a+3b_2)}{6 I_1 E} & \frac{a^2(2a+3b_3)}{6 I_1 E} \\ \frac{a^2(2a+3b_2)}{6 I_1 E} & \frac{a(a^2+3ab_2+3b_2^2)}{3 I_1 E} + \frac{b_2^3}{3 I_2 E} & \frac{a(2a^2+3ab_2+3ab_3+6b_2b_3)}{6 I_1 E} \\ \frac{a^2(2a+3b_3)}{6 I_1 E} & \frac{a(2a^2+3ab_2+3ab_3+6b_2b_3)}{6 I_1 E} & \frac{a(a^2+3ab_3+3b_3^2)}{3 I_1 E} + \frac{b_3^3}{3 I_3 E} \end{bmatrix} \quad (128)$$

A továbbiakban a \mathbf{K} csillapítási mátrix felírása el lett hanyagolva az acél laprugók csekély csillapítási tulajdonságai miatt, és csak a fő tömeg csillapítása lett figyelembe véve a „Tapéta”-jellegű metanyag alegségére felírt 5-DoF rendszerben (67. ábra). Ez sem a laprugó anyagának elhanyagolható csillapítása miatt maradt bent a modellben, hanem a jövőbeli kísérletek gerjesztését adó rázógép csillapító tulajdonságai miatt.



67. ábra 5-DoF hajlított tartós modell a) 3D szilárd test modell, b) modell sémája

A 3-DoF rendszer alapján a következő mozgásegyenlet rendszer került felírásra öt szabadságfokra:

$$\begin{bmatrix} m_1 \ddot{y}_1 \\ m_2 \ddot{y}_2 \\ m_3 \ddot{y}_3 \\ m_4 \ddot{y}_4 \\ m_5 \ddot{y}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \dot{y}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \sin \omega_g t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (129)$$

ahol a \mathbf{C} rugóállandó mátrix:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{a^3}{3 I_1 E} & \frac{a^2(2a+3b_2)}{6 I_1 E} & \frac{a^2(2a+3b_3)}{6 I_1 E} & \frac{a^2(2a+3b_4)}{6 I_1 E} & \frac{a^2(2a+3b_5)}{6 I_1 E} \\ \frac{a^2(2a+3b_2)}{6 I_1 E} & \frac{a(a^2+3ab_2+3b_2^2)}{3 I_1 E} + \frac{b_2^3}{3 I_2 E} & \frac{a[2a^2+3a(b_2+b_3)+6b_2b_3]}{6 I_1 E} & \frac{a[2a^2+3a(b_2+b_4)+6b_2b_4]}{6 I_1 E} & \frac{a[2a^2+3a(b_2+b_5)+6b_2b_5]}{6 I_1 E} \\ \frac{a^2(2a+3b_3)}{6 I_1 E} & \frac{a[2a^2+3a(b_2+b_3)+6b_2b_3]}{6 I_1 E} & \frac{a(a^2+3ab_3+3b_3^2)}{3 I_1 E} + \frac{b_3^3}{3 I_3 E} & \frac{a[2a^2+3a(b_3+b_4)+6b_3b_4]}{6 I_1 E} & \frac{a[2a^2+3a(b_3+b_5)+6b_3b_5]}{6 I_1 E} \\ \frac{a^2(2a+3b_4)}{6 I_1 E} & \frac{a[2a^2+3a(b_2+b_4)+6b_2b_4]}{6 I_1 E} & \frac{a[2a^2+3a(b_3+b_4)+6b_3b_4]}{6 I_1 E} & \frac{a(a^2+3ab_4+3b_4^2)}{3 I_1 E} + \frac{b_4^3}{3 I_4 E} & \frac{a[2a^2+3a(b_4+b_5)+6b_4b_5]}{6 I_1 E} \\ \frac{a^2(2a+3b_5)}{6 I_1 E} & \frac{a[2a^2+3a(b_2+b_5)+6b_2b_5]}{6 I_1 E} & \frac{a[2a^2+3a(b_3+b_5)+6b_3b_5]}{6 I_1 E} & \frac{a[2a^2+3a(b_4+b_5)+6b_4b_5]}{6 I_1 E} & \frac{a(a^2+3ab_5+3b_5^2)}{3 I_1 E} + \frac{b_5^3}{3 I_5 E} \end{bmatrix} \quad (130)$$

Amennyiben $i=2,3,\dots,n$ darabszámú tömeget csatolunk a főtömeghez, akkor az n -szabadságfokú rezgő rendszerre is érvényes (126) egyenlet összetevői a következők:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix}, \quad (131)$$

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n], \quad \mathbf{F} = [F_0 \sin(\omega_g t), 0, \dots, 0]$$

A \mathbf{C} rugóállandó mátrix elemei:

$$c_{11} = \frac{a^3}{3 I_1 E} \quad (132)$$

$$c_{1i} = c_{i1} = \frac{a^2(2a+3b_i)}{6 I_1 E}, \quad (i = 2 \dots n) \quad (133)$$

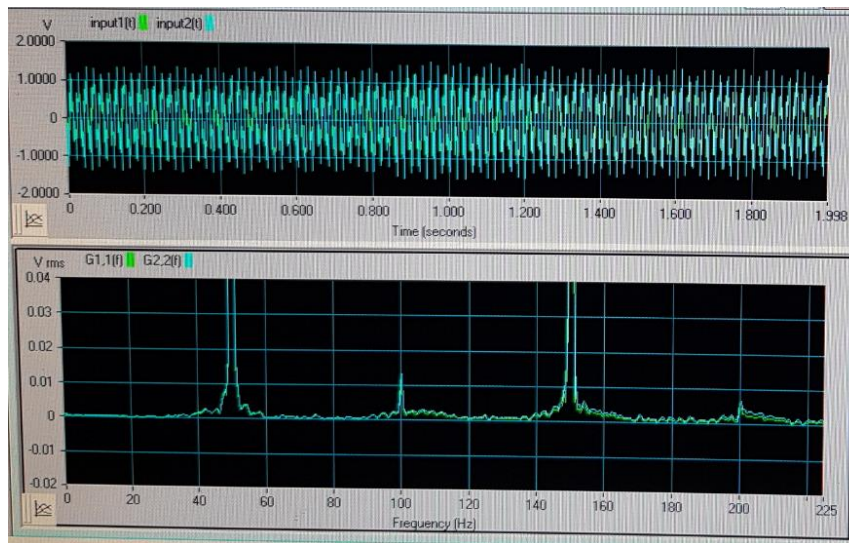
$$c_{ii} = \frac{a(a^2+3ab_i+3b_i^2)}{3 I_1 E} + \frac{b_i^3}{3 I_i E}, \quad (i = 2 \dots n) \quad (134)$$

$$c_{ij} = c_{ji} = \frac{a[2a^2+3a(b_i+b_j)+6b_i b_j]}{6 I_1 E}, \quad (i, j = 2 \dots n, i \neq j) \quad (135)$$

4.4 Hajlított tartós modellen végzett mérések

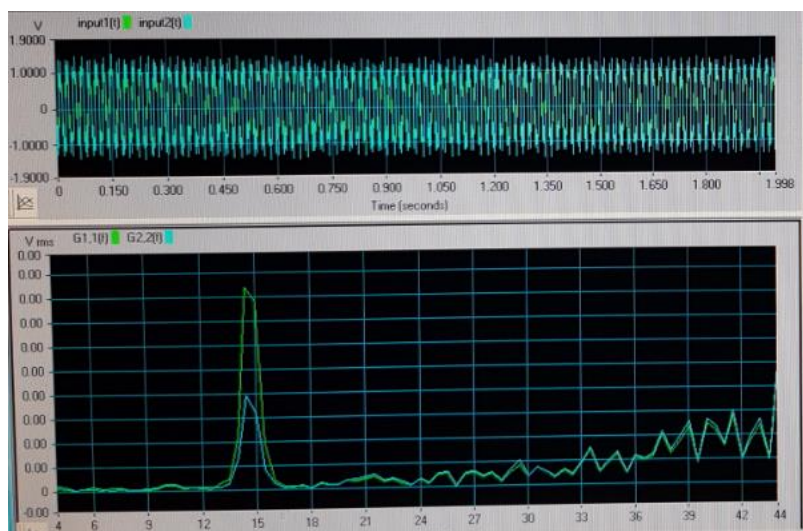
Legnagyobb sajnálatomra az első mérések során a PHOTON+ jelanalizátor készülékről kiderült, hogy érintkezési hibával mér. Az érzékelők által szolgáltatott mV-os nagyságú jelekkel párhuzamosan, valamilyen ismeretlen okból kifolyólag, a hálózati 50 Hz-es frekvencián és annak felharmonikusain nagyságrendekkel nagyobb jel érkezett, ami lehetetlenné tette a rezgés csökkentés mérésére alkalmas Frekvencia Válasz Függvény (FRF) funkció használatát (68. ábra). Emiatt úgy döntöttem, hogy csak a szabad (gerjesztés nélküli) rezgéseket fogom vizsgálni. Ha megkeresem a rendszer saját frekvenciáit, akkor tudom, hogy

a rezgéscsökkentés a negatív-effektív-tömeg elméletnek megfelelően az azokat követő frekvencia sávban fog jelentkezni.



68. ábra 2-DoF szabad rezgés FFT mérése a hálózati frekvencián és felharmonikusain kapott jelekkel. A felső ábra a jelek időbeli lefutását, az alsó a különböző frekvenciájú összetevőket ábrázolja.

A rezgő rendszer elemeit úgy állítottam össze előzetes számítások alapján, hogy a saját frekvenciák a kritikus 50 Hz és felharmonikusainak +/- 5Hz tartományain kívül essenek. A mért rezgést FFT (Fast Fourier Transzformáció) transzformációval azonnal összetevőire bontottam, és az y tengelyen megjelenített maximális elmozdulás értékek felső határát addig csökkentettem, amíg meg nem jelentek a mérendő jelek (69. ábra). Az alsó FFT ábrán látható a hálózati 50 Hz-es jel zavaró hatása, amint már 35 Hz felett is érzékelhető amplitúdóként jelenik meg.

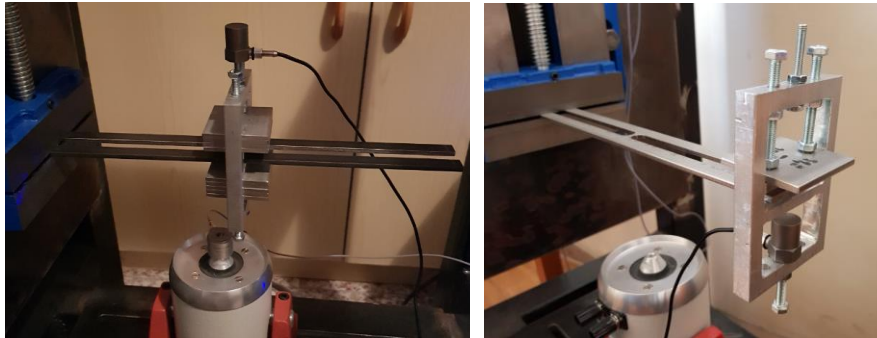


69. ábra A jelek észlelése FFT után y_{\max} értékének csökkentésével

Egy szabadságfokú szabad rezgés mérése – rugalmas befogás elmélete

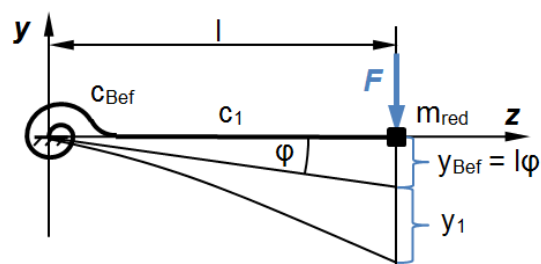
Ez a fejezet a II. tézist írja le.

Az első 1-DoF gerjesztés nélküli mérések (70. ábra) alapján korrekciós számítások lettek bevezetve, ugyanis a számított saját frekvenciák magasabbak voltak a mérteknél.



70. ábra 1-DoF szabad rezgés saját frekvenciájának mérései hajlított tartós modellen

Az eltérés magyarázatára elsőnek a rezgés csillapítása került megvizsgálásra, de annak csekély értéke nem magyarázta az elmélet és gyakorlat közti különbségeket. Mivel a rezgés mérhető volt a vázon és a rugalmas talajon is, így a befogás abszolút merevsége el lett vetve, és helyette egy rugalmas befogási elmélet került bevezetésre (71. ábra). A hajlító erő hatására a befogásnál egy a befogási nyomatékkal lineárisan arányos φ szögelfordulás alakul ki, ami egy befogási rugómerevség (s_{Bef}) eredménye. Ez és a rúd rugómerevsége (s_l) együttesen határozzák meg a redukált rugómerevséget.



71. ábra Rugalmas befogás elméleti vázlata

Az 1-DoF rendszereken elvégzett rezgésmérések alapján a mért saját frekvenciából (f_m) visszafelé számítva kaptam meg a befogási rugóállandót a következők szerint (kis kitéréseket feltételezve):

$$s_{Bef} = \frac{M}{\varphi} = \frac{Fl}{\varphi}, \quad c_{Bef} = \frac{\varphi}{M} = \frac{\varphi}{Fl} \quad (136)$$

$$s_1 = \frac{F}{y_1} = \frac{3IE}{l^3}, \quad c_1 = \frac{y_1}{F} = \frac{l^3}{3IE} \quad (137)$$

Az erő okozta lehajlás a rugóállandókkal kifejezve:

$$y = y_{Bef} + y_1 = l\varphi + \frac{Fl^3}{3IE} = F(c_{Bef}l^2 + c_1) \quad (138)$$

$$c_{red} = \frac{y}{F} = c_{Bef}l^2 + c_1 \quad (139)$$

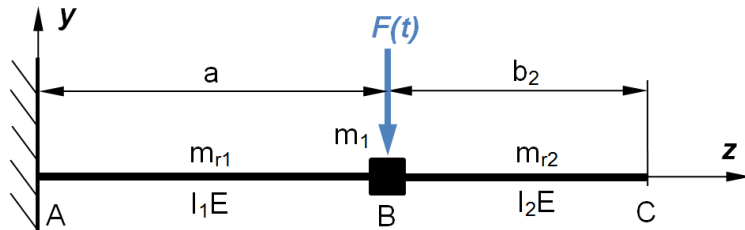
$$f_{mért} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{c_{red}m_{red}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{(c_{Bef}l^2 + \frac{l^3}{3IE})m_{red}}} \quad (140)$$

$$(2\pi f_{mért})^2 = \frac{1}{(c_{Bef}l^2 + \frac{l^3}{3IE})m_{red}} \quad (141)$$

$$c_{Bef}l^2 m_{red} = \frac{1}{(2\pi f_{mért})^2} - \frac{l^3}{3IE} m_{red} \quad (142)$$

$$c_{Bef} = \frac{1}{(2\pi f_{mért}l)^2 m_{red}} - \frac{l}{3IE} \quad (143)$$

A befogási rugómerevség kiszámításához szükség van a redukált tömeg (m_{red}) értékére, ahol a rúd (mint rugó) tömegének az m_1 tömeg pozíciójába történő redukálás volt a cél. Ez 1-DoF rendszernél első közelítésben a befogási rugómerevséget figyelmen kívül hagyva lett számítva (72. ábra) [5, 7, 76].



72. ábra Rugó tömegének redukálása az m_1 tömeg pozíciójába

A rugó két részre lett osztva, m_1 előtti (AB) és utáni (BC) szakaszokra. A keresztmetszetek lehajlása befogási rugómerevség nélkül a következőképpen írható fel az AB szakaszra:

$$y(z) = \frac{F}{6l_1E} (3az^2 - z^3), \quad y_B = \frac{Fa^3}{3l_1E} \quad (144)$$

Mivel a keresztmetszetek sebességei a kitéréssel arányosak, felírható:

$$\frac{\dot{y}(z)}{y_B} = \frac{y(z)}{y_B} = \frac{\frac{F}{6l_1E} (3az^2 - z^3)}{\frac{Fa^3}{3l_1E}} = \frac{z^2(3a-z)}{2a^3} \quad (145)$$

$$\dot{y}(z) = \frac{z^2(3a-z)}{2a^3} \dot{y}_B \quad (146)$$

Bevezetve a $\rho = m_{r1}/a$ folyóméter tömeget, a mozgási energiák azonossága alapján:

$$\frac{1}{2} m_{red1} \dot{y}_B^2 = \frac{1}{2} \int_0^a \rho (\dot{y}(z))^2 dz = \frac{1}{2} \frac{m_{r1}}{a} \dot{y}_B^2 \int_0^a \frac{z^4 (3a-z)^2}{4a^6} dz \quad (147)$$

$$m_{red1} = \frac{m_{r1}}{4a^7} \int_0^a (9a^2 - 6az + z^2) z^4 dz \quad (148)$$

$$m_{red1} = \frac{33}{140} m_{r1} \quad (149)$$

A túlnyúló rugó (BC szakasz) tömegének redukálása az m_l tömeg pozíciójába hasonlóan történik:

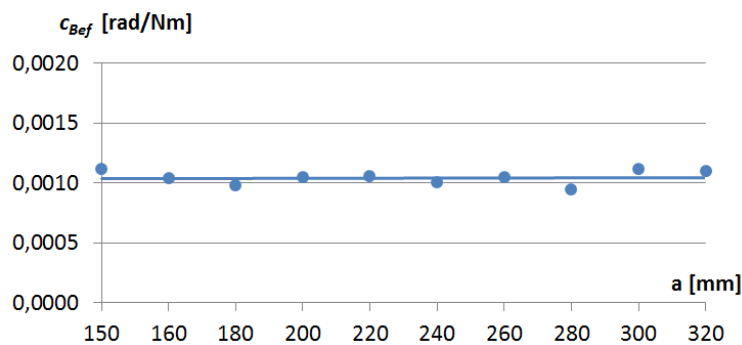
$$y(z) = \frac{Fa^2}{6l_1 E} (3z - a), \quad y_B = \frac{Fa^3}{3l_1 E} \quad (150)$$

$$\dot{y}(z) = \frac{3z-a}{2a} \dot{y}_B \quad (151)$$

$$\frac{1}{2} m_{red2} \dot{y}_B^2 = \frac{1}{2} \frac{m_{r2}}{b_2} \dot{y}_B^2 \int_a^{a+b_2} \frac{(3z-a)^2}{4a^2} dz \quad (152)$$

$$m_{red2} = m_{r2} \frac{3(a+b_2)^2 + a^2}{4a^2} \quad (153)$$

1-DoF esetén az így kalkulált befogási rugómerevség értékekkel már igen jól megközelítették a számított saját frekvencia értékek a mért értékeket: az m_l tömeg pozícióját (a) változtatva a rugó végétől a befogás irányába a befogási rugóállandó értéke az adott számítási mód mellett állandó maradt.



73. ábra Befogási rugóállandó (c_{Bef}) értékek egy szabadságfokú, rugalmasan befogott tartó esetében, a tömeg (m_l) befogástól mért pozíciójának (a) függvényében. A pontok jelzik a mért értékeket, a folytonos vonal a trend vonal.

Példaként bemutatom a 2020.06.25-i mérés eredményét (73. ábra), ahol a szerkezeti acél laprugó két párhuzamos, vízszintes elrendezésű, 6x3,11 mm téglalap szelvényből állt a 3-DoF mérés előkészítése érdekében. A befogástól mért teljes rugó hossz 325 mm volt, amin az m_l tömeg ($m_l=249,8$ g) pozícióját a rugó vége felől a befogás irányába mozgattuk 20 mm-enként.

Az utolsó 150 mm-es pozíció a 3-DoF mérés esetén az m_I tömeg tervezett pozíciója (a). Az ábrán jól látható, hogy a mért értékek egy adott érték körül mozognak, azaz a görbe konstans. A csekély mértékű eltéréseket az m_I pozíció mérési pontatlanságának számlájára írhatjuk.

A befogási rugómerevség értékét több tényező is befolyásolja, többek között a satu szerkezete, meghúzási nyomatéka, a támasztó talaj anyaga (pl. kőburkolat, parketta). Ezek teljes körű felmérésére nem törekedtem, mindössze megállapítottam, hogy a mérőváz és a befogást biztosító satu bármilyen megmozdítása esetén érdemes új befogási rugómerevség mérésekkel indítani a rezgésméréseket. Azt viszont fontos hangsúlyozni, hogy eseteinkben a befogási rugómerevség hatása az egy szabadságfokú rendszer saját frekvenciájának számított értékeire nem haladta meg a 20 %-ot.

A következő lépésben az m_I pozícióba redukált rugótömeg rugalmas befogással kerül felírásra. A 72-es ábrához képest csak annyi az eltérés, hogy az A pontban c_{Bef} rugalmas befogás található, amelynek értéke már korábban ki lett számolva rugalmatlan befogású m_{red} redukált tömeggel.

Az a hosszúságú AB szakasz esetén:

$$y(z) = c_{Bef} a F z + \frac{F}{6I_1 E} (3az^2 - z^3), \quad y_B = c_{Bef} a^2 F + \frac{F a^3}{3I_1 E} \quad (154)$$

$$\frac{\dot{y}(z)}{\dot{y}_B} = \frac{y(z)}{y_B} = \frac{c_{Bef} a F z + \frac{F}{6I_1 E} (3az^2 - z^3)}{c_{Bef} a^2 F + \frac{F a^3}{3I_1 E}} \quad (155)$$

$$\dot{y}(z) = \frac{c_{Bef} a z + \frac{3az^2 - z^3}{6I_1 E}}{c_{Bef} a^2 + \frac{a^3}{3I_1 E}} \dot{y}_B \quad (156)$$

Bevezetve a $\rho = m_{r1}/a$ folyóméter tömeget, a mozgási energiák azonossága alapján:

$$\frac{1}{2} m_{red1} \dot{y}_B^2 = \frac{1}{2} \int_0^a \rho (\dot{y}(z))^2 dz = \frac{1}{2} \frac{m_{r1}}{a} \dot{y}_B^2 \int_0^a \left(\frac{c_{Bef} a z + \frac{3az^2 - z^3}{6I_1 E}}{c_{Bef} a^2 + \frac{a^3}{3I_1 E}} \right)^2 dz \quad (157)$$

$$m_{red1} = \frac{m_{r1}}{a^5 \left(c_{Bef}^2 + \frac{2c_{Bef} a}{3I_1 E} + \frac{a^2}{(3I_1 E)^2} \right)} \int_0^a \left((c_{Bef} a z)^2 + 2c_{Bef} a z \frac{3az^2 - z^3}{6I_1 E} + \left(\frac{3az^2 - z^3}{6I_1 E} \right)^2 \right) dz \quad (158)$$

$$m_{red1} = \frac{m_{r1}}{c_{Bef}^2 + \frac{2c_{Bef} a}{3I_1 E} + \frac{a^2}{(3I_1 E)^2}} \left(\frac{c_{Bef}^2}{3} + \frac{11c_{Bef} a}{60I_1 E} + \frac{33a^2}{35(6I_1 E)^2} \right) \quad (159)$$

A b_2 hosszúságú BC szakasz redukálása az m_1 pozíciójára:

$$\varphi_B = c_{Bef} a F + \frac{F a^2}{2 I_1 E} \quad (160)$$

$$y(z) = y_B + \varphi_B (z - a) = F \left(\frac{a^3}{3 I_1 E} + c_{Bef} a z + \frac{a^2}{2 I_1 E} - \frac{a^3}{2 I_1 E} \right) \quad (161)$$

$$\dot{y}(z) = \dot{y}_B \frac{c_{Bef} a z + \frac{a^2}{2 I_1 E} - \frac{a^3}{6 I_1 E}}{c_{Bef} a^2 + \frac{a^3}{3 I_1 E}} \quad (162)$$

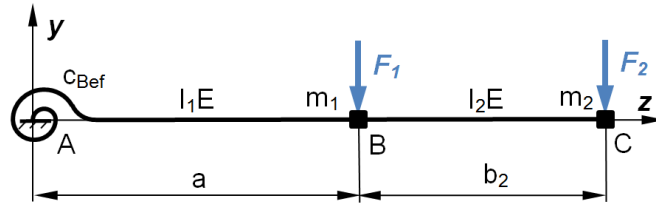
$$\frac{1}{2} m_{red2} \dot{y}_B^2 = \frac{1}{2} \frac{m_{r2}}{b_2} \dot{y}_B^2 \int_a^{a+b_2} \frac{c_{Bef} z + \frac{a}{2 I_1 E} - \frac{a^2}{6 I_1 E}}{c_{Bef} a + \frac{a^2}{3 I_1 E}} dz \quad (163)$$

$$m_{red2} = m_{r2} \frac{(c_{Bef} + \frac{a}{2 I_1 E})^2 \frac{(a+b_2)^3 - a^3}{3} - (c_{Bef} + \frac{a}{2 I_1 E}) \frac{a^2}{6 I_1 E} (2 a b_2 + b_2^2) + \frac{a^4 b_2}{(6 I_1 E)^2}}{b_2 a^2 (c_{Bef} + \frac{a}{3 I_1 E})^2} \quad (164)$$

Ezt a rugalmas befogással számolt redukált rugótömeg számítást végül túl bonyolultnak és a végeredmény szempontjából csekély befolyással bírónak ítélttem meg, így a későbbiekben csak a rugalmatlan befogással számított redukált rugótömeget használtam.

Két szabadságfokú mérések

2-DoF esetén a 74. ábra mutatja be a rugalmas befogással kiegészített rendszer modelljét.



74. ábra 2-DoF rendszer rugalmas befogással

A \mathbf{C} rugóállandó mátrix a rugalmas befogás elméletével a következők szerint lett számítva:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{Bef} a^2 + \frac{a^3}{3 I_1 E} & c_{Bef} (a^2 + a b_2) + \frac{a^2 (2 a + 3 b_2)}{6 I_1 E} \\ c_{Bef} (a^2 + a b_2) + \frac{a^2 (2 a + 3 b_2)}{6 I_1 E} & c_{Bef} (a + b_2)^2 + \frac{a (a^2 + 3 a b_2 + 3 b_2^2)}{3 I_1 E} + \frac{b_2^3}{3 I_2 E} \end{bmatrix} \quad (165)$$

Közbevetőleg ezt kiterjesztve n -szabadságfokra (n -DoF), $i=2..n$ párhuzamosan csatolt tömeggel, a rugóállandó mátrix (\mathbf{C}) elemei a következőképpen írhatók fel:

$$c_{11} = c_{Bef} a^2 + \frac{a^3}{3 I_1 E} \quad (166)$$

$$c_{1i} = c_{i1} = c_{Bef}(a^2 + ab_i) + \frac{a^2(2a+3b_i)}{6 I_1 E}, \quad (i = 2 \dots n) \quad (167)$$

$$c_{ii} = c_{Bef}(a + b_i)^2 + \frac{a(a^2+3ab_i+3b_i^2)}{3 I_1 E} + \frac{b_i^3}{3 I_1 E}, \quad (i = 2 \dots n) \quad (168)$$

$$c_{ij} = c_{ji} = c_{Bef}[a^2 + a(b_i + b_j) + b_i b_j] + \frac{a[2a^2+3a(b_i+b_j)+6b_i b_j]}{6 I_1 E}, \quad (i, j = 2 \dots n, i \neq j) \quad (169)$$

A két szabadságfokú rendszer első mérései mérésenként csak egy saját frekvenciát mutattak ki. Vizsgálódásaim során kiderült, hogy a gerjesztésnek volt ebben szerepe, ugyanis a rúd végén elvégzett „egyujjas pendítés” (kitérítés, majd elengedés) miatt mind a két tömeg és a teljes rendszer azonos fázisban rezgett. Emiatt be kellett vezetni a „kétujjas pendítést”, amikor a főtömeg és csatolt tömeg ellentétes irányú elmozdítást kapva nem azonos frekvencián rezeg, és ez azonnal két különálló saját frekvenciát eredményezett. Ugyanerre az eredményre vezetett egyébként a rugó közbülső részén végzett ütésszerű gerjesztés is. Tanulságos volt megtapasztalni azt is, hogy bár mindkét tömegre szereltem gyorsulásmérőt, felesleges volt, hiszen mindkét gyorsulásmérő jelezte mind a két saját frekvenciát.

Két és több szabadságfokú rendszerek esetében a számított és a mért saját frekvencia értékek között fennálló különbségek miatt korábban már számos elmélet született. Ezek közül a legismertebbek a Dunkerley, Rayleigh, Ritz vagy Stodala féle megközelítések [Hegedűs, Ludvig]. Dunkerley szerint [9-11] egy 2-DoF rendszer legkisebb saját frekvenciájának (f_{1D}) becslése (ahol $f_{(1)}$ és $f_{(2)}$ azokat a saját frekvenciákat jelenti, amelyek úgy keletkeznek, hogy a hajlított tartón csak egy-egy tömeg kerül meghagyásra az eredeti helyén) a következő [77-79]:

$$f_{1D}^2 \geq \frac{1}{\frac{1}{f_{(1)}^2} + \frac{1}{f_{(2)}^2}} \quad (170)$$

Egy adott példa mentén a 2. tábla mutatja 2-DoF rendszerben (11. ábra) a mért és számított értékeket:

A mért rendszer adatai a következők voltak:

Tömegek: $m_1=476,1\text{g}$; $m_2=136,6\text{g}$;

Rugó adatai: $a=120\text{mm}$; $b_2=131\text{mm}$; túlnyúlás a C ponton: 6 mm; szélessége: $x_r=20\text{mm}$; vastagsága: $y_r=3,3\text{mm}$; $\rho=7850\text{kg/m}^3$; $E=210\text{GPa}$. $I_1 E=I_2 E$.

Befogási rugóállandó 1-DoF-ből számítva: $c_{Bef}=9,616 \cdot 10^{-4} \text{ rad/Nm}$.

Mért sajátfrekvenciák: $f_1=14,73\text{Hz}$; $f_2=66,28\text{Hz}$. A mérési eredményeket kiértékelő és abból számításokat végző Excell táblát az 1. Függelék mutatja be.

2. tábla Számított és mért saját frekvenciák hajlított tartós 2-DoF rendszerben

Számítás módja	Rugóállandó rugalmas befogással (igen/nem)	Rugótömeg redukálás rugalmas befogással (igen/nem)	m_{1RED} [kg]	m_{2RED} [kg]	Dunkerley-féle közelítés (alsó határ) f_{1D} [Hz]	Mért értékek	
						14,73 Hz	66,28 Hz
						Számított értékek	
						f_1 [Hz]	f_2 [Hz]
1.	nem	nincs rugótömeg	0,4761	0,1436	17,58	18,03	79,21
2.	igen	nincs rugótömeg	0,4761	0,1436	16,14	16,53	74,54
3.	nem	nem	0,7315	0,1774	15,32	15,76	65,76
4.	nem	igen	0,7150	0,1788	15,34	15,77	66,23
5.	igen	nem	0,7315	0,1774	14,03	14,39	62,09
6.	igen	igen	0,7150	0,1788	14,05	14,41	62,51

Az 1. tábla számítási módjai a következők:

1. Rugalmas befogás nélküli rugóállandóval, rugótömeg nélkül.
2. Rugalmas befogásos rugóállandóval, rugótömeg nélkül.
3. Rugalmas befogás nélküli rugóállandóval, rugalmas befogás nélküli red. rugó tömeggel.
4. Rugalmas befogás nélküli rugóállandóval és rugalmas befogással redukált rugó tömeggel.
5. Rugalmas befogásos rugóállandóval és rugalmas befogás nélküli redukált rugó tömeggel.
6. Rugalmas befogásos rugóállandóval és rugalmas befogással redukált rugó tömeggel.

Vegyük a mért értékeket a számítások helyességének igazolására: a rugalmas befogás és rugó tömeg nélkül végzett számítások (1-4-ig) esetében a Dunkerley-féle saját frekvencia alsó közelítési értékei mind a mért f_1 érték feletti értéket mutatnak, tehát nem felelnek meg. Egyedül a rugalmas befogással számolt rugóállandók (5-6.) állták meg helyüket, amikor a rugó tömege is figyelembe volt véve. Ekkor viszont annak a ténynek, hogy a redukált rugótömeg rugalmas befogással vagy a nélkül került kiszámításra, nem sok jelentősége akadt, ezért a későbbiekben a redukált rugótömeget az egyszerűbb módon (5. mód) számítottam.

Két szabadságfokú méréseket végeztem a redukált tömegek igazolására úgy, hogy a csatolt tömeg előbb a villás rugó mindkét ágát használta, majd csak az egyiket. Kiderült, hogy ez utóbbi esetben a tömeget nem tartalmazó rugóág már önálló mozgást végez, mintegy 3. tömegként lép fel, bár saját frekvenciát nem képez.

Három szabadságfokú szabad rezgés mérése hajlított tartón

A főtömegre párhuzamosan csatolt két tömeg (3-DoF) szabad rezgésének mérései (4. függelék) során nem sikerült két saját frekvenciánál többet kimérni. Az alacsonyabbik frekvenciájú volt a nagyobb amplitúdójú jel, a magasabb frekvenciájú a kisebbik. Az elméleti számítások szerint a kettő között kellett volna kapnunk még egy további jelet, de ezt nem sikerült megtalálni. Csak a kutatás későbbi, szimulációs vizsgálati szakaszában derült ki, hogy már minimális csillapítás mellett is eltűnnek a közbülső saját frekvenciák, ezért hiányzott a középső.

A további mérésekről a későbbiekben a szimulációra helyeztem a hangsúlyt.

5. SZIMULÁCIÓK

A mérések számának csökkentése céljából szimulációs szoftvereket vettem igénybe. A Mérnöki Karon oktatót és így rendelkezésre álló Autodesk Inventor rendelkezik bizonyos végeelem számításokra képes modullal (feszültség-, alakváltozási, sajátfrekvencia számítások), de sem Frekvencia Válasz Függvény (FRF), sem nem-lineáris anyagjellemzők nem állíthatók elő vele.

Az ANSYS szoftverrel történtek biztató próbálkozások, és bár ez a szimulációs szoftver képes bizonyos területeken nem-lineáris anyagmodellel dolgozni, sajnos a számunkra fontos FRF modulban nem. Amikor ismerkedtem ezzel a szoftverrel, kiderült, hogy a bekerülési és éves rendszerkövetési költsége magas, és helyes kezelése igen komoly szintű gyakorlottságot igényel, amelynek az elsajátítása rendkívül időigényesnek tűnt, ezért a továbbiakban nem használtam.

Igen sokat támaszkodtam viszont a mozgás leírásánál a numerikus integrálásra, aminek a lehetőségét az Excell nyújtotta számomra. Nagy segítség volt az analitikus levezetések helyességének igazolására, de sokat használtam a mozgások megismerésére is, különböző paraméterek változtatása mellett.

5.1 Öt szabadságfokú rezgő rendszer szimulációs vizsgálatai

A szimulációs vizsgálatok során azt kerestem, hogy

- milyen összefüggés van a translációs modell és a hajlított tartós modell paramétereinek között,
- mennyire befolyásolja a mozgást a csillapítás mértéke.

Transzlációs és hajlított tartós modell rezgési jellemzőinek összehasonlítása

Ez a fejezet a III. tézist mutatja be.

Az 5-DoF hajlított tartós és translációs modellek rezgési tulajdonságainak összehasonlítását egy példán keresztül mutatom be, ahol az analitikai adatokat összevettem az elkészített 3D szilárdtest modell VEM analízisével kapott rezonancia frekvencia adatokkal. Az összehasonlításra szánt rezgő rendszert a következők szerint készítettem el:

1. Első lépésben megalkottam az AutoCAD Inventor segítségével az előzetes számításoknak fizikailag is megfelelő 3D szilárdtest modellt.

$$a=0,12 \text{ m}, b_2=0,11 \text{ m}, b_3=0,13 \text{ m}, b_4=0,15 \text{ m}, b_5=0,17 \text{ m}$$

2. A 3D modellből meghatároztam az m_i ($i=1..5$) koncentrált tömegeket $\rho=7850 \text{ kg/m}^3$ sűrűséggel. A rugók tömegét a többi tömeghez képest elhanyagolható szinten [5], a koncentrált tömegekhez viszonyítva 10%-os érték alatt tartottam a 3D modell megalkotásánál. Erre azért volt szükség, mert a hajlított tartós modellel szemben a translációs modellnél nincs lehetőség a rugók tömegének beszámítására.

$$m_1=4.000 \text{ kg}, m_2=m_3=m_4=m_5=0.500 \text{ kg}$$

3. A 3D modell geometriai adataiból kiszámítottam a hajlított tartós modell hajlítási ellenállási értékeit, $E=210 \text{ GPa}$ rugalmassági modulusszal.

$$I_1E=12,285 \text{ Nm}^2, I_2E=2,835 \text{ Nm}^2, I_3E=3,780 \text{ Nm}^2, I_4E=4,725 \text{ Nm}^2, I_5E=5,670 \text{ Nm}^2$$

4. A (132)-(135) képleteknek megfelelően kiszámoltam a hajlított tartós modell rugóállandó mátrixának elemeit, majd azok alapján a translációs modell rugómerevségeit a következők szerint:

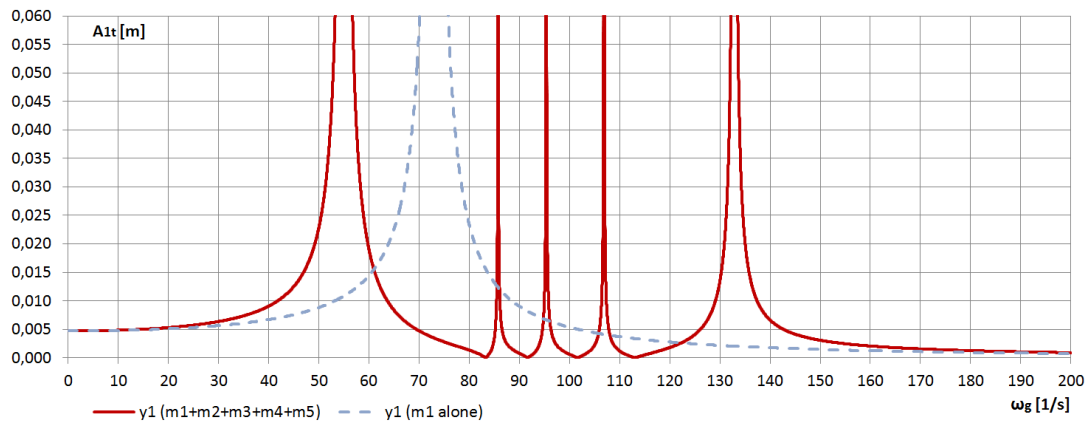
$$s_1 = 1/c_{11} \quad (171)$$

$$s_i = \frac{3I_iE}{b_i^3}, \quad (i = 2 \dots 5) \quad (172)$$

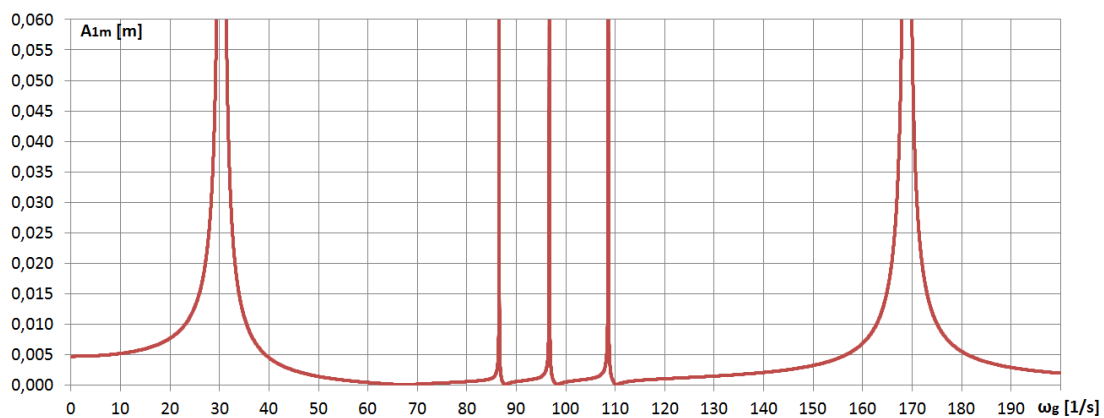
5. A befogási rugómerevséget és a csillapításokat szintén elhanyagoltam a két modell azonos szintű beállítása céljából. (Befogási rugómerevség a translációs modellben nincs, csillapítás a hajlított tartós modellben került korábban elhanyagolásra. A translációs modellnél $k_i=0,0001 \text{ Ns/m}$ értékek lettek beállítva a zéróval való osztás elkerülésére.)
6. A translációs (t indexű) modell A_{1t} amplitúdója a gerjesztési körfrekvencia függvényében a korábban tárgyalt módon a (102) egyenlettel került meghatározásra. Az eredményeket a 75. ábra mutatja be. Piros folytonos vonallal látható a csatolt tömegekkel ellátott főtömeg amplitúdója, szaggatott kék vonal jelöli a csatolt tömegek nélküli amplitúdót.
7. A Cramer szabály és a (171)-(172) egyenletek felhasználásával kiszámítottam a rugóállandó mátrix értékeit, majd a hajlított tartós (m indexű) modell főtömegének A_{1m} amplitúdóját az adott ω_g gerjesztési körfrekvencián a következők szerint:

$$A_{1m} = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22}^{-1}-m_2\omega_g^2 & c_{23}^{-1} & c_{24}^{-1} & c_{25}^{-1} \\ 0 & c_{32}^{-1} & c_{33}^{-1}-m_3\omega_g^2 & c_{34}^{-1} & c_{35}^{-1} \\ 0 & c_{42}^{-1} & c_{43}^{-1} & c_{44}^{-1}-m_4\omega_g^2 & c_{45}^{-1} \\ 0 & c_{52}^{-1} & c_{53}^{-1} & c_{54}^{-1} & c_{55}^{-1}-m_5\omega_g^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{11}^{-1}-m_1\omega_g^2 & c_{12}^{-1} & c_{13}^{-1} & c_{14}^{-1} & c_{15}^{-1} \\ c_{21}^{-1} & c_{22}^{-1}-m_2\omega_g^2 & c_{23}^{-1} & c_{24}^{-1} & c_{25}^{-1} \\ c_{31}^{-1} & c_{32}^{-1} & c_{33}^{-1}-m_3\omega_g^2 & c_{34}^{-1} & c_{35}^{-1} \\ c_{41}^{-1} & c_{42}^{-1} & c_{43}^{-1} & c_{44}^{-1}-m_4\omega_g^2 & c_{45}^{-1} \\ c_{51}^{-1} & c_{52}^{-1} & c_{53}^{-1} & c_{54}^{-1} & c_{55}^{-1}-m_5\omega_g^2 \end{vmatrix}} \quad (173)$$

A 76. ábrán látható a hajlított tartós modell maximális kitérése a gerjesztési körfrekvencia függvényében.



75. ábra 5-DoF (folytonos vonal) és 1-DoF (csatolt tömegek nélküli) (szaggatott vonal) translációs modell amplitúdói a gerjesztési frekvencia függvényében



76. ábra 5-DoF hajlított tartós modell amplitúdói a gerjesztési körfrekvencia függvényében

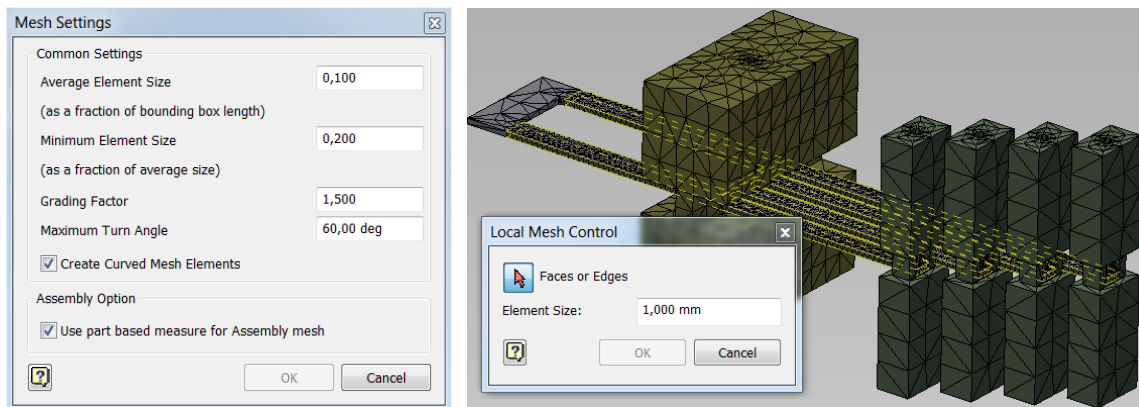
8. A kapott analitikus eredményeket numerikus számításokkal igazoltam (4. sz. függelék). A numerikus számításokat Excell táblák segítségével végeztem el a következők szerint:

- A számításokat $\Delta t=0,0001$ s-os időközökkel végeztem 0-10 s időtartamban.
- A kezdeti tranziens jelenségek eliminálására $k_1=80\text{Ns/m}$ értéket kellett beállítanom, hogy a 3. másodperc végére lecsengjenek. Ez a görbék bizonyos fokú torzításához vezetett, de az igazolást nem veszélyeztette.
- A maximális értékeket a 4-10 s időtartamból szűrtem ki.

A 75. és 76. ábrákat összehasonlítva látható, hogy mindkét modell (transzlációs és hajlított tartós) esetében 5 darab rezonancia és 4 db főtömeg megállítási ($A_1=0$) gerjesztési körfrekvencia fordul elő, de ezek a két görbén nem azonos pozíciókban helyezkednek el. A három középső rezonancia frekvencia mindkét görbén szinte azonos pozíciójú és a lefutási

jellegük is hasonló. A két modell első és utolsó rezonanciái mind helyzet, mind lefutás tekintetében eltérőek. A megállítási frekvenciák a hajlított tartós modellnél alacsonyabbak, mint a translációs esetében.

A 78. ábrán látható az 5-DoF hajlított tartós szerkezet 3D szilárdtest modelljén az Inventor VEM analízisével végzett rezonancia vizsgálat eredménye. Befogás kényszerrel alkalmaztam a laprugó alsó és felső felületének célszerűen leválasztott részén (67.a ábra). Terhelés nem került felvételre. A háló beállításai a 77. ábrán láthatók. Lokális háló finomítást a laprugó alsó és felső felületén hajtottam végre 1,000 mm értékben (kivéve a befogási felületeket).



77. ábra VEM szimuláció háló beállításai

A VEM analízis rezonancia körfrekvencia eredményei és az analízis szerinti mozgás formájának leírása a következő:

$\omega_1 = 29,38 \text{ 1/s}$ – Mind az öt test azonos fázisban rezeg. Ez az m_1 főtömeg legalacsonyabb rezonancia körfrekvenciája. (78.a ábra)

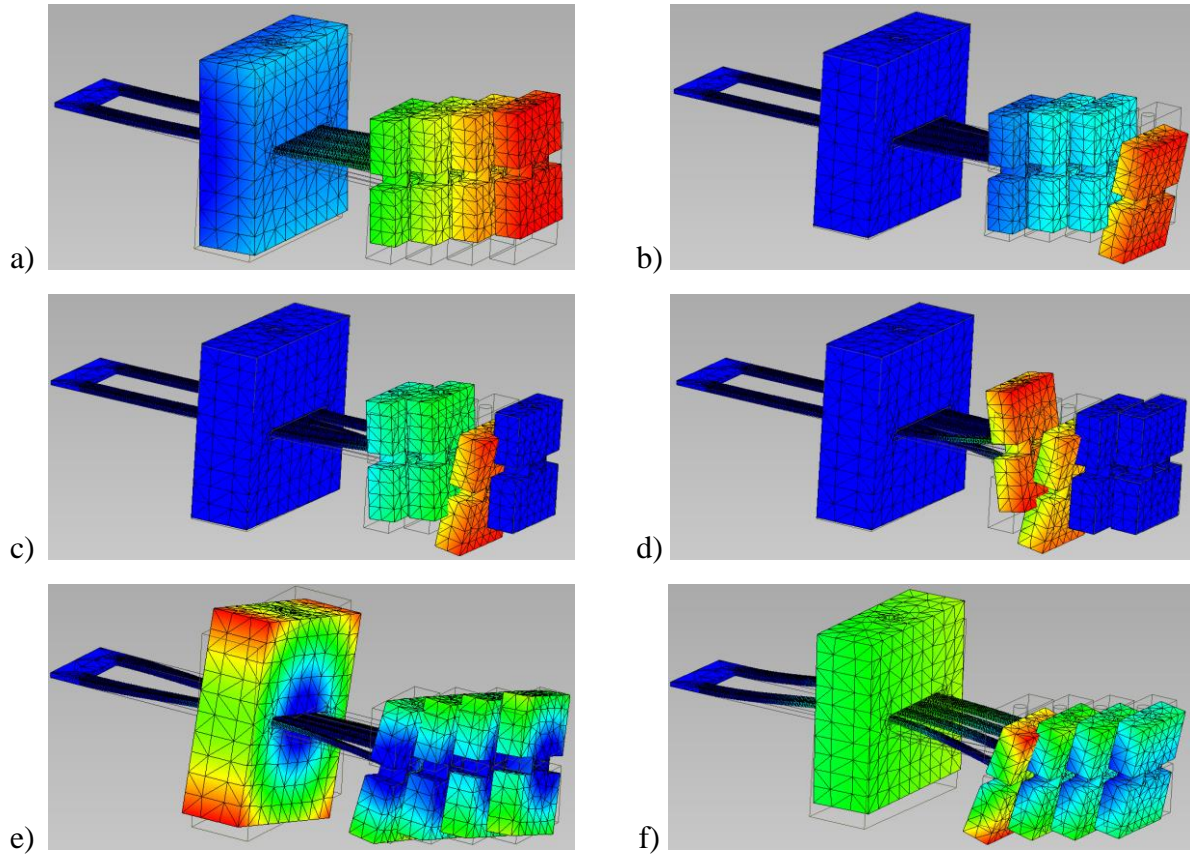
$\omega_2 = 83,38 \text{ 1/s}$ – Az m_1 főtömeg áll, a leghosszabb laprugóra szerelt m_5 tömeg rezonál. Ez a legalacsonyabb főtömeg megállító körfrekvencia. (78.b ábra)

$\omega_3 = 92,05 \text{ 1/s}$ – Az m_1 főtömeg áll, a második leghosszabb laprugóra szerelt m_4 tömeg rezonál. Ez a második legalacsonyabb főtömeg megállító körfrekvencia. (78.c ábra)

$\omega_4 = 102,16 \text{ 1/s}$ – Az m_1 főtömeg áll, az m_3 és m_4 tömegek egyszerre rezonálnak, de ellentétes fázisban. Ez a harmadik legalacsonyabb főtömeg megállító körfrekvencia. (78.d ábra) Érdekes, hogy a várakozással ellentétben a VEM analízis során nem kaptunk két különálló rezonancia frekvenciát, ahol m_3 és m_4 önállóan rezonálna.

$\omega_5 = 135,40 \text{ 1/s}$ – A rendszer torziós mozgást végez. Ez a vizsgálatunk szempontjából irreleváns. (78.e ábra)

$\omega_6 = 159,72$ 1/s – A főtömeg és a négy csatolt tömeg ellentétes fázisban rezeg. Ez a legmagasabb rezonancia körfrekvencia a két modell szempontjából. (78.f ábra)



78. ábra Az Inventor VEM analízisa során kapott első hat saját frekvencia (Modal Frequency): a) ω_1 , b) ω_2 , c) ω_3 , d) ω_4 , e) ω_5 , f) ω_6 .

Az Inventor VEM analíziséval kapott $\omega_2, \omega_3, \omega_4$ körfrekvenciák jól illeszkednek a translációs modellnél a főtömeget megállító első három gerjesztési frekvenciára, míg az első és hatodik körfrekvencia (ω_1, ω_6) a hajlított tartós modellt támogatja. A két modell gerjesztett rezgési eredményeit és a VEM analízis szabad rezgési eredményeit a 3. táblában foglaltam össze. Az egy sorban lévő, vastagon szedett körfrekvencia értékek támogatják egymást.

Az összehasonlítás alapján elmondható, hogy a hajlított tartós modellel vizsgálható a translációs modell viselkedése gerjesztett rezgések esetén, az eltérések ellenére is. A hajlított tartós szerkezet mérési szempontú előnyei, melyek egyszerűségében rejlenek, feledtetik a számítási eltéréseket. Így a “Tapéta”-jellegű metastruktúra vizsgálatára alkalmas.

	Transzlációs modell ω [rad/s]	Hajlított tartós modell ω [rad/s]	Inventor Végeselem Módszer (VEM) (Hajlított tartós modellre) ω [rad/s]		
Főtömeg megáll $A_1 = 0$ m	83,21	67,26	$\omega_2 =$	83,38	m_5 mozog
	91,65	87,73	$\omega_3 =$	92,05	m_4 mozog
	101,60	98,24	$\omega_4 =$	102,16	m_2 és m_3 együtt mozog, ellentétes fázisban
	113,05	110,28	nincs hasonló érték		
			$\omega_5 =$	135,40	Torziós mozgás
A_1 rezonál	55,06	30,42	$\omega_1 =$	29,34	m_1 és a csatolt tömegek azonos fázisban mozognak
	85,76	86,53	nincs hasonló érték		
	95,39	96,68			
	106,88	108,58			
	132,87	168,94	$\omega_6 \rightarrow$	159,72	m_1 és a csatolt tömegek ellentétes fázisban mozognak

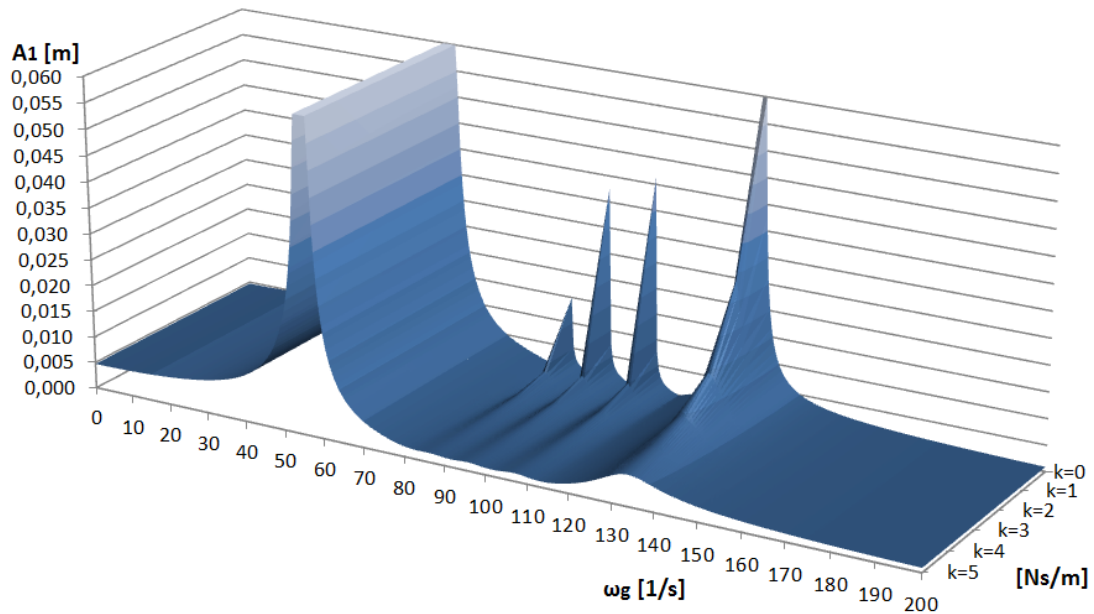
3. tábla A rezgés különböző jellemző frekvenciái Transzlációs és Hajlított tartós modellen, gerjesztett módban, valamint VEM analízissel szabad rezgés esetén.

5.2 Tömegek közötti csillapítás hatása a transzlációs modell gerjesztett rezgéseire

Ez a fejezet a IV. tézist mutatja be.

A dinamikus rezgéscsillapítással foglalkozó fejezetben már bemutattam, hogy a főtömeg és a csatolt tömeg közé helyezett csillapítás az elhangolás mértékét csökkenti. A három szabadságfokú szabad rezgés mérésekor pedig azt tapasztaltam, hogy csak két saját frekvencia volt kimérhető értékű. Mindezek alapján arra kerestem a választ, hogyan viselkedik az öt szabadságfokú, "Tapéta"-jellegű metastruktúra a főtömeg és csatolt tömeg közötti csillapítási tényező (k_i $i=2..5$) értékének emelésére.

A 79. ábra mutatja be translációs modell esetében a főtömeg maximális elmozdulásait különböző gerjesztési körfrekvenciákon a csillapítási tényezők függvényében. A példában felhasznált alapadatokat az előző példából hoztam tovább. Minden csillapítást (k_i $i=1..5$) egységesen változtattam 0-5 Ns/m értékek között. A kritikus csillapítások minden egyes csatolt tömeg esetében jóval magasabbak voltak, például a legalacsonyabb kritikus csillapítás az m_5 -nél jelentkezett: $k_{5krit}=2m\omega_5=83,21$ Ns/m volt.



79. ábra Főtömeg amplitúdó a gerjesztési frekvencia és a csillapítási tényező függvényében translációs modellnél.

A 79. ábrában tehát láthatóvá vált, hogy a translációs modellnél már csekély csillapítás esetén is eltűnnek a közbülső rezonancia frekvenciák, $k_i=5$ Ns/m esetén már alig észlelhetőek.

Ez alapján várhatóan a hajlított tartós modell is hasonlóan működik.

ÚJ TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEK – TÉZISEK

Az új tudományos eredményeim az alábbi tézisekben foglaltam össze:

- I. Kiterjesztettem a forgó vektorokkal leírt rezgések körét az n szabadságfokú, gerjesztett, csillapított, translációs, lineáris karakterisztikájú rezgő rendszerre, ahol a gerjesztett főtömeghez $n-1$ darab párhuzamosan csatolt gerjesztetlen tömeg kapcsolódik. Az n -számú, másodrendű differenciál-egyenletből álló egyenletrendszert analitikusan megoldottam a főtömeg amplitúdóját kifejezve, a csatolt tömegeknek a főtömeg elmozdulásához képest létrejövő fáziskéséseivel és egy újonnan bevezetett amplitúdó aránnyal (G_{il}), a csillapítások és a gerjesztési frekvencia függvényében (3.5 fejezet).
[P1. – P9. publikációk]
- II. Új eljárást dolgoztam ki a rugalmas befogás rugómerevségének meghatározására hajlított tartós modell esetében, ami az egy szabadságfokú rendszer mérési eredményeire támaszkodik (4.4 fejezet).
[P1., P3., P8. publikáció]
- III. Eljárást dolgoztam ki a translációs és a hajlított tartós modellek mozgásjellemzőinek összehasonlítására, a rezonancia frekvenciák és a főtömeget megállító frekvenciák összevetésével. Az összehasonlítás alapján megállapítottam, hogy a hajlított tartós modellel vizsgálható a translációs modell viselkedése gerjesztett rezgések esetén, az eltérések figyelembe vétele mellett. (5.1 fejezet).
[P1. publikáció]
- IV. Kimutattam, hogy több párhuzamosan csatolt tömeg esetében a csatolások kismértékű csillapítása is jelentősen csökkenti a közbülső rezonancia frekvencián jelentkező főtömeg amplitúdókat, így csak a két szélső (legkisebb és legnagyobb) rezonancia frekvenciájú hely marad kimérhető értékű (5.2 fejezet).
[P1. publikáció]

PUBLIKÁCIÓK LISTÁJA

MTMT adatbázis alapján, a PhD tanulmányok megkezdése (2017.09.01) óta megírt és megjelent művek:

A tézispontokhoz kapcsolódó tudományos közlemények

- P1. Szuchy, P.; Cveticanin, L.; Bíró, I: Multi Cantilever-Mass Mechanism for Vibration Suppression, ACTA POLYTECHNICA HUNGARICA , Vol. 19, No. 7, pp. 197-212. 16 p. (2022) DOI: 10.12700/APH.19.7.2022.7.11.
- P2. Szuchy, Péter: Research of Acoustic Metamaterials at the University of Szeged, Faculty of Engineering, In: Marinca, Vasile; Herisanu, Nicolae (szerk.) Acoustics and Vibration of Mechanical Structures—AVMS 2019 Timisoara, Románia: Springer International Publishing (2020) pp. 485-498. Paper: Chapter 49, 14 p. DOI ISBN: 9783030541354; DOI: 10.1007/978-3-030-54136-1_49
- P3. Szuchy, Péter; Bíró, István: Damped 2-DOF subsystems of acoustic metamaterials, IOP CONFERENCE SERIES: MATERIALS SCIENCE AND ENGINEERING 393 Paper: 012038 , 8 p. (2018) DOI: 10.1088/1757-899X/393/1/012038
- P4. Cveticanin, L.; Suchy, P.; Biro, I.; Zukovic, M.: Rotating vector solving method applied for nonlinear oscillator, EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL-SPECIAL TOPICS & p. & (2021) DOI: 10.1140/epjs/s11734-021-00233-7
- P5. Szuchy, Péter: Akusztikus metaanyag kutatás a Szegedi Tudományegyetem Mérnöki Karán, BÁNKI KÖZLEMÉNYEK Vol 2 No 2 pp. 5-9. , 5 p. (2019)
- P6. Szuchy, Péter: 5-DEGREE-OF-FREEDOM SUBSYSTEMS IN ACOUSTIC METAMATERIALS, In: Boris, AGARSKI; Milana, ILIĆ MIĆUNOVIĆ; Željko, SANTOŠI (szerk.) ETIKUM 2018 Novi Sad, Szerbia: University of Novi Sad (2018) pp. 53-56. , 4 p.
- P7. Cveticanin, Livia; Szuchy, Péter: Akusztikus metaanyagok és felhasználásuk a gépészmérnöki gyakorlatban, In: n a (szerk.) III. GÉPÉSZETI SZAKMAKULTÚRA KONFERENCIA : A gépészeti fejlesztés az ötlettől a hasznosulásig, Budapest, Magyarország: Gépipari Tudományos Egyesület (GTE) (2018) p. 2a3 autopszia
- P8. István, Bíró; Livija, Cveticanin; Péter, Szuchy: Numerical method to determine the elastic curve of simply supported beams of variable cross-section, STRUCTURAL ENGINEERING AND MECHANICS 68 : 6 pp. 713-720. , 8 p. (2018) DOI: 10.12989/sem.2018.68.6.713
- P9. Szuchy, P.: Overview of Two Degree-of-Freedom Subsystems in Acoustic Materials, In: Prof., Dr. Janko Hodolič (szerk.) Scientific Conference with International Participation (ETIKUM 2017) Novi Sad, Szerbia : University of Novi Sad, Faculty of Technical Sciences, Department of Production Engineering (2017) pp. 1-4. , 4 p.

Értekezéshez nem kapcsolódó további cikkek a PhD tanulmányok alatt:

- P10. Szuchy, P.; Molnár, T.; Bíró, I.; Csikós, S.; Gogolák, L.; Sárosi, J.: Bending Fatigue Tests of Carbon Fiber Reinforced Epoxy Resin Composite Plates, ACTA POLYTECHNICA HUNGARICA 18 : 2 pp. 199-213. , 15 p. (2021) DOI: 10.12700/APH.18.2.2021.2.11

- P11. Bíró, István; Szuchy, Péter; Livia, Cvetityanin: Változó keresztmetszetű tartók alakváltozása peremérték problémájának speciális transzformációja kezdeti érték problémává, In: Baksa, Attila; Bertóti, Edgár; Kiss, László; Szirbik, Sándor (szerk.) XIII. Magyar Mechanikai Konferencia : Az előadások összefoglalói Miskolc-Egyetemváros, Magyarország : Miskolci Egyetem Műszaki Mechanikai Intézet (2019) 132 p. p. 22
- P12. Csikós, S.; Gogolák, L.; Molnár, T.; Szuchy, P.; Bíró, I.; Sárosi, J.: Modelling the Fuel Consumption in Hybrid and Electronic Airplanes Using Matlab Aerospace Toolbox JOURNAL OF MECHATRONICS AUTOMATION AND IDENTIFICATION TECHNOLOGY 4 : 4 pp. 12-17. , 6 p. (2019)
- P13. Gogolák, László; Csikós, Sándor; Molnár, Tamás; Szuchy, Péter; Bíró, István; Sárosi, József: Possibilities of optimizing fuel consumption in hybrid and electronic airplanes, ANALECTA TECHNICA SZEGEDINENSIA 13 : 2 pp. 65-76. , 12 p. (2019) DOI: 10.14232/analecta.2019.2.65-76
- P14. Molnár, T.; Szuchy, P.; Csikós, S.; Gogolák, L.; Bíró, I.; Sárosi, J.: Investigation of Mechanical Characteristics of Plastic Composites, ACTA TECHNICA CORVINIENSIS – BULLETIN OF ENGINEERING 12 : 3 pp. 21-24. , 4 p. (2019)
- P15. Molnár, T.; Szuchy, P.; Csikós, S.; Gogolák, L.; Bíró, I.; Sárosi, J.: Material Tests and Analysis of Aircraft Materials, ANNALS OF FACULTY OF ENGINEERING HUNEDOARA - INTERNATIONAL JOURNAL OF ENGINEERING 17 : 1 pp. 95-100. , 6 p. (2019)
- P16. Csikós, Sándor; Molnár, Tamás ; Szuchy, Péter; Gogolák, László ; Bíró, István; Sárosi, József: Vibrational tests and analysis on materials used in aircraft, ANALECTA TECHNICA SZEGEDINENSIA 12 : 2 pp. 32-36. , 5 p. (2018) DOI: 10.14232/analecta.2018.2.32-36

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] EU-OSHA – European Agency for Safety and Health at Work, Report - Workplace exposure to vibration in Europe: an expert review, 008.
https://osha.europa.eu/en/publications/reports/8108322_vibration_exposure/view
- [2] Európai Bizottság, Nem kötelező útmutató a munkavállalók fizikai tényezők (vibráció) hatásából keletkező kockázatoknak való expozíciójára vonatkozó egészségügyi és biztonsági minimumkövetelményekről szóló 2002/44/EK irányelv végrehajtásának helyes gyakorlatához, Office for Official Publications of the European Communities, Luxembourg, 2008. Letölthető: <https://publications.europa.eu/hu/publication-detail/-/publication/3f9392ff-8975-4139-9ea2-5b168a334664>
- [3] Kolonics, G: Zaj okozta halláskárosodás kérdései a honvédségben, Hadmérnök, IV. évfolyam 3. szám, 2009. szeptember.
- [4] Bihari, Z; Tóbis, Zs; Sarka, F: Akusztikai és rezgéstani minősítés, Miskolci Egyetemi jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2010
- [5] Hegedűs, A: Fejezetek a kinetikából REZGÉSTAN, Szent István Egyetemi Kiadó, Gödöllő, 2015 ISBN:978-963-269-468-9
- [6] Vivien Denis: Vibration damping in beams using the acoustic black hole e_ect. Vibrations [physics.class-ph]. Universit_e du Maine, 2014. English.Ludvig
- [7] Ludvig, Gy: Gépek dinamikája, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983 ISBN: 963 10 4802 0
- [8] Chang, C. C., QU, W. L.: Unified dynamic absorber design formulas for wind-induced vibration cotrol of tall buildings, Struct. Design Tall Build. 7, 147-166 (1988)
- [9] Duncan, G.S et al: An investigation of the dynamic absorber effect in high-speed machining, International Journal of Machine Tools & Manufacture 45 (2005) 497-507
- [10] Campos, R. O., Nicoletti, R.: Vibration reduction in vertical washing machine using a rotating dynamic absorber, Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, (2015) 37:339-348, DOI 10.1007/s40430-014-0151-1]
- [11] Komatsuzaki, T. et al: Broadband vibration control of a structure by using a magnetorheological elastomer-based tuned dynamic absorber, Mechatronics 40 (2016) 128-136
- [12] Hoang, N. et al: A dynamic absorber with a soft magnetorheological elastomer for powertrain vibration suppression, Smart Materials and Structures 18 (2009) 074009 (10pp) doi:10.1088/0964-1726/18/7/074009
- [13] Jia J. (2017) Dynamic Absorber. In: Modern Earthquake Engineering. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-31854-2_24
- [14] Tian Wang et al: A Novel Dynamic Absorber with Variable Frequency and Damping, Shock and Vibration, Volume 2021, Article ID 8833089, 10 pages, <https://doi.org/10.1155/2021/8833089>

- [15] Gil Ho Yoon et al.: Development and optimization of a resonance-based mechanical dynamic absorber structure for multiple frequencies, *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 2021, Vol. 40 (2) 880-897, DOI: 10.1177/1461348419855533
- [16] Chi-Shen Chang, Tzong-Shi Liu: Design of Adaptive Dynamic Absorber to Reduce Optical Disk Drive Vibration at Multiple Rotating Speeds, *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol. 45, No. 2B, 2006, pp. 1120–1123
- [17] Krzysztof Kecik: Assessment of energy harvesting and vibration mitigation of a pendulum dynamic absorber, *Mechanical Systems and Signal Processing* 106 (2018) 198–209 <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.12.028>
- [18] Sushil S Patil: Grass trimmer hand-arm vibration reduction using multi-axial vibration absorber, *Noise & Vibration Worldwide* 2019, Vol. 50(8) 245–253 DOI: 10.1177/0957456519869926
- [19] Pai P.F.: Metamaterial-based broadband elastic wave undamped vibration absorber. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 21(5) (2010) 517-528
- [20] Cveticanin L., Mester Gy.: Theory of acoustic metamaterials: an overview. *Acta Polytechnica Hungarica*. 13(7) (2016) 43-62
- [21] Huang, H.H., Sun, C.T., Huang, G.I.: On the negative effective mass density in acoustic metamaterials, *International Journal of Engineering Science*, 47, 2009, 610-617
- [22] Askari et al.: Additive manufacturing of metamaterials: A review, *Additive Manufacturing* 36 (2020) 101562 <https://doi.org/10.1016/j.addma.2020.101562>
- [23] Veselago V.G.: The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ . *Sov. Phys. Usp* 10 (1968) 509-514
- [24] Huang H.H., Sun C.T., Huang G.I.: On the negative effective mass density in acoustic metamaterials. *International Journal of Engineering Science* 47 (2009) 610-617
- [25] S. Yang, J.H. Page, Z. Liu, M.L. Cowan, C.T. Chan, P. Sheng, Focusing of sound in a 3D phononic crystal, *Phys. Rev. Lett.* 93 (2004), 024301, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.024301>
- [26] X. Zhang, Z. Liu: Negative refraction of acoustic waves in two-dimensional phononic crystals, *Appl. Phys. Lett.* 85 (2004) 341–343, <https://doi.org/10.1063/1.1772854>
- [27] A. Sukhovich, L. Jing, J.H. Page: Negative refraction and focusing of ultrasound in two-dimensional phononic crystals, *Phys. Rev. B - Condens. Matter Mater. Phys.* 77 (2008), 014301, <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.77.014301>
- [28] J.H. Page: Focusing of ultrasonic waves by negative refraction in phononic crystals, *AIP Adv.* 6 (2016), 121606, <https://doi.org/10.1063/1.4972204>
- [29] J. Zhu, J. Christensen, J. Jung, L. Martin-Moreno, X. Yin, L. Fok, X. Zhang, F. J. Garcia-Vidal: A holey-structured metamaterial for acoustic deep-subwavelength imaging, *Nat. Phys.* 7 (2011) 52–55, <https://doi.org/10.1038/nphys1804>

- [30] H. Su, X. Zhou, X. Xu, G. Hu: Experimental study on acoustic subwavelength imaging of holey-structured metamaterials by resonant tunneling, *J. Acoust. Soc. Am.* 135 (2014) 1686–1691, <https://doi.org/10.1121/1.4868395>
- [31] Z. Liang, J. Li: Extreme acoustic metamaterial by coiling up space, *Phys. Rev. Lett.* 108 (2012) 1–4, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.114301>.
- [32] Z. Liang, T. Feng, S. Lok, F. Liu, K.B. Ng, C.H. Chan, J. Wang, S. Han, S. Lee, J. Li: Space-coiling metamaterials with double negativity and conical dispersion, *Sci. Rep.* 3 (2013) 1614, <https://doi.org/10.1038/srep01614>
- [33] Y. Xie, A. Konneker, B.I. Popa, S.A. Cummer: Tapered labyrinthine acoustic metamaterials for broadband impedance matching, *Appl. Phys. Lett.* 103 (2013), 201906, <https://doi.org/10.1063/1.4831770>
- [33] M. Miniaci, A. Marzani, N. Testoni, L. De Marchi: Complete band gaps in a polyvinyl chloride (PVC) phononic plate with cross-like holes: numerical design and experimental verification, *Ultrasonics* 56 (2015) 251–259, <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2014.07.016>
- [34] O. Yuksel, C. Yilmaz: Shape optimization of phononic band gap structures incorporating inertial amplification mechanisms, *J. Sound Vib.* 355 (2015) 232–245, <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.06.016>
- [35] F. Lucklum, M. Vellekoop: Design and Fabrication Challenges for Millimeter-Scale Three-Dimensional Phononic Crystals, *Crystals* 7 (2017) 348, <https://doi.org/10.3390/cryst7110348>
- [36] K.H. Matlack, A. Bauhofer, S. Krödel, A. Palermo, C. Daraio: Composite 3D-printed metastructures for low-frequency and broadband vibration absorption, *Proc. Natl. Acad. Sci.* 113 (2016) 8386–8390, <https://doi.org/10.1073/pnas.1600171113>
- [37] Pennec et al.: Two-dimensional phononic crystals: Examples and applications, *Surface Science Reports* 65 (2010) 229–291 doi:10.1016/j.surfrep.2010.08.002
- [38] L. D’Alessandro, E. Belloni, R. Ardito, A. Corigliano, F. Braghin: Modeling and experimental verification of an ultra-wide bandgap in 3D phononic crystal, *Appl. Phys. Lett.* 109 (2016), 221907, <https://doi.org/10.1063/1.4971290>
- [39] X.H. Zhang, Z.G. Qu, X.C. He, D.L. Lu: Experimental study on the sound absorption characteristics of continuously graded phononic crystals, *AIP Adv.* 6 (2016), 105205, <https://doi.org/10.1063/1.4965923>
- [40] F. Lucklum, M.J. Vellekoop: Rapid prototyping of 3D phononic crystals using high-resolution stereolithography fabrication, *Procedia Eng.* 120 (2015) 1095–1098, <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.08.783>
- [41] K. Cai, B. Román-Manso, J.E. Smay, J. Zhou, M.I. Osendi, M. Belmonte, P. Miranzo: Geometrically complex silicon carbide structures fabricated by robocasting, *J. Am. Ceram. Soc.* 95 (2012) 2660–2666, <https://doi.org/10.1111/j.1551-2916.2012.05276.x>.
- [42] A. Kruisová, H. Seiner, P. Sedláček, M. Landa, B. Román-Manso, P. Miranzo, M. Belmonte: Acoustic metamaterial behavior of three-dimensional periodic architectures

- assembled by robocasting, *Appl. Phys. Lett.* 105 (2014), 211904, <https://doi.org/10.1063/1.4902810>
- [43] A. Elayouch, M. Addouche, A. Khelif: Extensive tailorability of sound absorption using acoustic metamaterials, *J. Appl. Phys.* 124 (2018), 155103, <https://doi.org/10.1063/1.5035129>
- [44] S. Laureti, D.A. Hutchins, L.A.J. Davis, S.J. Leigh, M. Ricci: High-resolution acoustic imaging at low frequencies using 3D-printed metamaterials, *AIP Adv.* 6 (2016), 121701, <https://doi.org/10.1063/1.4968606>
- [45] Aichao Yang et al.: Enhanced Acoustic Energy Harvesting Using Coupled Resonance Structure of Sonic Crystal and Helmholtz Resonator, *Applied Physics Express* 6 (2013) 127101 3) 127101 <http://dx.doi.org/10.7567/APEX.6.127101>
- [46] Z. Liang, T. Feng, S. Lok, F. Liu, K.B. Ng, C.H. Chan, J. Wang, S. Han, S. Lee, J. Li: Space-coiling metamaterials with double negativity and conical dispersion, *Sci. Rep.* 3 (2013) 1614, <https://doi.org/10.1038/srep01614>
- [47] R. Ghaffarivardavagh, J. Nikolajczyk, R. Glynn Holt, S. Anderson, X. Zhang: Horn-like space-coiling metamaterials toward simultaneous phase and amplitude modulation, *Nat. Commun.* 9 (2018) 1349, <https://doi.org/10.1038/s41467-018-03839-z>
- [48] M. Moleron, M. Serra-Garcia, C. Daraio: Acoustic Fresnel lenses with extraordinary transmission, *Appl. Phys. Lett.* 105 (2014), 114109, <https://doi.org/10.1063/1.4896276>
- [49] G. Memoli, M. Caleap, M. Asakawa, D.R. Sahoo, B.W. Drinkwater, S. Subramanian: Metamaterial bricks and quantization of meta-surfaces, *Nat. Commun.* 8 (2017), 14608, <https://doi.org/10.1038/ncomms14608>
- [50] X.F. Fu, G.Y. Li, M.H. Lu, G. Lu, X. Huang: A 3D space coiling metamaterial with isotropic negative acoustic properties, *Appl. Phys. Lett.* 111 (2017), 251904, <https://doi.org/10.1063/1.5005553>
- [51] Y. Xie, Y. Fu, Z. Jia, J. Li, C. Shen, Y. Xu, H. Chen, S.A. Cummer: Acoustic imaging with metamaterial luneburg lenses, *Sci. Rep.* 8 (2018), 16188, <https://doi.org/10.1038/s41598-018-34581-7>
- [52] S.K. Maurya, A. Pandey, S. Shukla, S. Saxena: Predicting double negativity using transmitted phase in space coiling metamaterials, *R. Soc. Open Sci.* 5 (2018), 33683, <https://doi.org/10.1098/rsos.171042>
- [53] Y. Xie, B.I. Popa, L. Zigoneanu, S.A. Cummer: Measurement of a broadband negative index with space-coiling acoustic metamaterials, *Phys. Rev. Lett.* 110 (2013), 175501, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.175501>
- [54] A.A. Zadpoor, *Mechanical meta-materials*, *Mater. Horizons.* 3 (2016) 371–381, <https://doi.org/10.1039/c6mh00065g>
- [55] H.H. Hilton, D.H. Lee, A.R.A. El Fouly, Generalized viscoelastic designer functionally graded auxetic materials engineered/tailored for specific task performances, *Mech. Time-Dependent Mater.* 12 (2008) 151–178, <https://doi.org/10.1007/s11043-008-9054-9>

- [56] J.H. Lee, J.P. Singer, E.L. Thomas: Micro-/nanostructured mechanical metamaterials, *Adv. Mater.* 24 (2012) 4782–4810, <https://doi.org/10.1002/adma.201201644>
- [57] Xianglong Yu et al.: Mechanical metamaterials associated with stiffness, rigidity and compressibility: A brief review, *Progress in Materials Science* 94 (2018) 114–173 <https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2017.12.003>
- [58] K. Bertoldi, V. Vitelli, J. Christensen, M. Van Hecke, Flexible mechanical metamaterials, *Nat. Rev. Mater.* (2017), <https://doi.org/10.1038/natrevmats.2017.66>
- [59] E. Andreassen, B.S. Lazarov, O. Sigmund, Design of manufacturable 3D extremal elastic microstructure, *Mech. Mater.* 69 (2014) 1–10, <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2013.09.018>
- [60] T. Bückmann, R. Schittny, M. Thiel, M. Kadic, G.W. Milton, M. Wegener, On three-dimensional dilational elastic metamaterials, *New J. Phys.* 16 (2014), 033032, <https://doi.org/10.1088/1367-2630/16/3/033032>
- [61] R. Schittny, T. Bückmann, M. Kadic, M. Wegener, Elastic measurements on macroscopic three-dimensional pentamode metamaterials, *Appl. Phys. Lett.* 103 (2013), 231905, <https://doi.org/10.1063/1.4838663>
- [62] R. Critchley, I. Corni, J.A. Wharton, F.C. Walsh, R.J.K. Wood, K.R. Stokes, The preparation of auxetic foams by three-dimensional printing and their characteristics, *Adv. Eng. Mater.* 15 (2013) 980–985, <https://doi.org/10.1002/adem.201300030>
- [63] T. Bückmann, M. Thiel, M. Kadic, R. Schittny, M. Wegener, An elasto-mechanical unfeelability cloak made of pentamode metamaterials, *Nat. Commun.* 5 (2014) 4130, <https://doi.org/10.1038/ncomms5130>
- [64] T. Frenzel, M. Kadic, M. Wegener, Three-dimensional mechanical metamaterials with a twist, *Science* 358 (80-) (2017) 1072–1074, <https://doi.org/10.1126/science.aao4640>
- [65] R. Hedayati, A.M. Leeflang, A.A. Zadpoor, Additively manufactured metallic pentamode meta-materials, *Appl. Phys. Lett.* 110 (2017), 091905, <https://doi.org/10.1063/1.4977561>
- [66] WenwangWu et al.: Mechanical design and multifunctional applications of chiral mechanical metamaterials: A review, *Materials and Design* 180 (2019) 107950 <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2019.107950>
- [67] Peng, H., Pai, P.F.: Acoustic metamaterial plates for elastic wave absorption and structural suppression, *International Journal of Mechanical Sciences*, 89, 2014, 350-361.
- [68] Cveticanin, L., Zukovic, M., Mester, Gy., Biro, I., Sarosi, J.: Oscillators with symmetric and asymmetric quadratic nonlinearity, *Acta Mechanica*, 227(6), 2016, 1727-1742.
- [69] Cveticanin, L., Mester, Gy: Theory of acoustic metamaterials and metamaterial beams: An overview, *Acta Polytechnica Hungarica*, 13(7), 2016, 43-62.
- [70] Cveticanin L., Zukovic M.: Negative effective mass in acoustic metamaterial with nonlinear mass-in-mass subsystems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 51 (2017) 89-104. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.03.017>

- [71] Zhu R., Liu X.N., Hu G.K., Sun C.T., Huang G.L.: A chiral elastic metamaterial beam for broadband vibration suppression. *Journal of Sound and Vibration* 333 (2014) 2759-2773.
- [72] Bíró, I.: *Mechanikai lengések*, Szegedi Tudományegyetem Mérnöki Kar, Szeged, 2014. 122 p. ISBN:978-963-306-288-3
- [73] Nayfeh, A. H., Mook, D. T.: *Nonlinear oscillations*, JOHN WILEY & SONS, New York, 1979. ISBN 0-471-03555-6
- [74] Vakakis, A.F., Blanchard, A.: Exact steady states of the periodically forced and damped Duffing oscillator, *Journal of Sound and Vibration*, 413 (2018) 57-65.
- [75] Zhu R., Liu X.N., Hu G.K., Sun C.T., Huang G.L.: A chiral elastic metamaterial beam for broadband vibration suppression. *Journal of Sound and Vibration* 333 (2014) 2759-2773.
- [76] Bíró, I.: *Examples for Practice in Mechanical Motion for Mechanical Engineers*. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2015. 65 p. (ISBN:978-3-8433-5926-9)
- [77] K.H. Low: A modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses, *International Journal of Mechanical Sciences*, 42 (2000) 1287-1305.
- [78] Jianhua Zheng, Ji Wang: Generalization of Dunkerley's equation for the undamped linear positive semidefinite system, *Procedia Engineering*, 31 (2012) 403 – 408.
- [79] Syafirah A. Samat, A.A. Mat Isa, and M. Azhan Anuar: Performance Evaluation of Dynamic Absorbers Based on Randy Fox and Dunkerley Methods, *Journal of Mechanical Engineering*, Vol SI 4(4),(2017) 263-279.

JELÖLÉSEK

Latin betűk:

a	[m/s ²]	Gyorsulás
a_n		Fourier sorba fejtett „ca” függvény n-dik konstansa
A	[m]	Amplitúdó
B	[m]	Amplitúdó
c	[m/N]	Rugóállandó
c	[m/s]	Hang terjedési sebessége levegőben
C	[m/N]	Rugóállandó mátrix
$ca()$		Függvény
d	[m]	Elmozdulás
D		Lehr-féle csillapítási viszonyszám
E	[Pa]	Rugalmassági modulusz
f	[Hz]	Frekvencia
f	[N]	Erő (nem lineáris esetben)
F	[N]	Erő
F	[N]	Gerjesztőerő vektor
G	[Pa]	Csúsztató rugalmassági modulusz
G_{il}		Amplitúdó arány (az 1. tömeg amplitúdójához viszonyítva)
h	[m]	Szigetelő anyag rétegvastagsága
I	[m ⁴]	Másodrendű nyomaték (a mi esetünkben tengelyre véve)
k	[Ns/m]	Csillapítási tényező
k_{krit}	[Ns/m]	Kritikus csillapítási tényező
K	[Ns/m]	Csillapítási mátrix
K	[Pa]	Kompressziós modulusz (bulk modulusz)
m	[kg]	Tömeg
M	[kg]	Tömeg mátrix
n		Törésmutató
s	[N/m]	Rugómerevség
S	[N/m]	Rugómerevségi mátrix
S		Tömegközéppont
T	[s]	Periódusidő
T_c		Transzmissziós együttható

TL	[dB]	Transzmissziós vesztség
u	[m]	Koordináta (általános)
v	[m/s]	Sebesség
x_{st}	[m]	Rugó megnyúlása statikus terhelés esetén
x, y, z	[m]	Koordináták
\mathbf{y}	[m]	Elmozdulás vektor

Görög betűk:

α		A nem-linearitás foka
β	[1/s]	Fajlagos csillapítási tényező
$\beta()$		Euler Béta függvénye
ε	[As/Vm]	Elektromos permittivitás (dielektromos állandó)
μ		Súrlódási tényező
μ	[Vs/Am]	Mágneses permeabilitás
ν		Poisson tényező
Π_α		A „ca” függvény periódusa
ρ	[kg/m ³]	Sűrűség
ρ_α	[kg/m ³]	Levegő sűrűsége
φ	[rad, °]	Fáziseltolódás
ψ	[rad, °]	Fáziseltolódás
ω	[1/s]	Körfrekvencia (lineáris karakterisztika esetén)
Ω	[1/s]	Körfrekvencia (nem-lineáris karakterisztika esetén)

RÖVIDÍTÉSJEGYZÉK

AMM	Acoustic Metamaterials	Akusztikus metaanyagok
ATVA	Adaptive Tunable Vibration Absorber	Adaptívan hangolható rezgéscsillapító
COST	European Cooperation in Science and Technology	Európai kooperáció a tudományban és technológiában
DA	Dynamic Absorber	Dinamikus rezgéscsillapító
DENORMS	Design of Noise Reducing Materials and Structures	Zajcsökkentő anyagok és szerkezetek tervezése
n-DoF	n-Degree-of-Freedom	n-szabadságfokú
EMHR	ElectroMechanical Helmholtz Resonator	Elektromechanikus Helmholtz rezonátor
FDM	Fused Deposition Modelling	Ráolvastásos módszer (3D nyomtatás)
FEA	Finite Element Analysis	Végeselem analízis
FEM	Finite Element Method	Végeselem módszer (VEM)
FFT	Fast Fourier Transformation	Gyors Fourier transzformáció
FRF	Frequency Response Function	Frekvencia válasz függvény
MRE	Magnetorheological Elastomer	Elektromágneses aktivitású elasztomer
MSL	Micro Stereolithography	Mikro sztereolitográfia (3D nyomtatás)
PC	Photonic Crystals	Fotonikus kristályok
PMA	Plasmonic Metamaterial Absorbers	Plazmonikus abszorber
PnC	Phononic Crystals (Sonic crystals)	Fononikus kristályok
RS	Resonant Structures	Rezonáló struktúrák
SC	Space Coiling	Labirintusok
SCR	Sonic Crystal Resonator	Fononikus rezonátor
SLM	Selective Laser Melting	Szelektív lézeres ömlesztés
SLS	Selective Laser Sintering	Szelektív lézeres szinterelés
SMA	Shape Memory Alloy	Alak-memóriájú ötvözet
TL	Transmission Loss	Transzmissziós veszteség

TÁBLÁZATJEGYZÉK

1. tábla Öt szabadságfokú rezgő rendszer alapadatai számítási példához felvéve
2. tábla Számított és mért saját frekvenciák hajlított tartós 2-DoF rendszerben
3. tábla A rezgés különböző jellemző frekvenciái Transzlációs és Hajlított tartós modellen, gerjesztett módban, valamint VEM analízissel szabad rezgés esetén.

ÁBRAJEGYZÉK

1. ábra Rezgés terjedése az emissziótól az immisszióig.
2. ábra Statikus (fent) és dinamikus (lent) kiegyensúlyozatlanság
3. ábra Órlógép automatikus kiegyensúlyozó rendszere [2]
4. ábra Különböző csillapítású rezonancia görbék a P és Q invariáns pontokkal
5. ábra Forgó dinamikus rezgéscsökkentő szerkezet ez vertikális mosógép kosarának tetejére rögzítve [10]
6. ábra Széles sávban állítható rugómerevségű dinamikus rezgéscsillapító sematikus ábrája [11]
7. ábra Adaptív hangolású rezgéscsökkentő koncepció: 1: belső henger, 2: forgó tengely, 3: fül, 4: elektromágneses tekercs, 5: külső henger, 6: MRE anyag [12]
8. ábra A London Millennium Footbridge vertikális (jobbra fent) és horizontális (jobbra lent) irányú dinamikus rezgéscsökkentő egységei [13]
9. ábra SMA oszcillátor rendszer modell [14]
10. ábra Befogott tartón, különböző pozícióban alkalmazott dinamikus rezgéscsökkentő elem: (a) mérőrendszer, (b) csatolt tömeg pozíciói a befogott tartón, (c) (d) különböző pozíciók mellett mért főtömeg amplitúdók (piros: csatolt tömeggel, kék: csatolt tömeg nélkül) [15]
11. ábra Az optikai lemez meghajtóban alkalmazott adaptív dinamikus rezgéscsökkentő sematikus ábrája és installációja [16]
12. ábra Inga és elektromágnes kombinációja [17]
13. ábra Fűvágó trimmerhez készített két-tengelyű dinamikus rezgéscsökkentő egység [18]
14. ábra Matlak és társai FMD modellje [36]
15. ábra A fém rezonátorok különböző elrendezési módjai az epoxy műgyanta mátrixban [37]
16. ábra D'Alessandro és társai nylon anyagból SLS készített metastruktúrája [38]
17. ábra A hang terjedésének irányában változó metastruktúra [39]
18. ábra a) Lucklum és Vellekoop által MSL technológiával nyomtatott fononikus kristály, b) a struktúra leírásához használt egység cella [40]
19. ábra Kruisová és társai által készített metastruktúra szerkezeti geometria variációi [42]

20. ábra Koncentrikus hengerekből készült rezonáló struktúrák [43]
21. ábra Laurenti és társai Fabry-Perot metaanyaga levegőben használva. $h=14,8$ mm és $\Lambda=2.96$ mm [44]
22. ábra Fononikus kristály és Helmholtz rezonátor társítása akusztikus hullámok energiáinak lecsapolására
23. ábra a) Fresnel lencse elvének használata labirintus metastruktúrában, b) maga az elkészült metaanyag.
24. ábra Gömb formájú metastruktúrák: a) Fu és társai [50], b) Xie és társai szerkezetei [51]
25. ábra Szelektív lézer szintézissel (SLS) készült auxetikus metaanyagok: balra: Poliamid struktúra $\nu=-0,5$ [59], jobbra: makroszkopikus polimer struktúra $\nu=-0,08$ [60]
26. ábra Blüchmann és társai által készített pentamon köpeny elasztikusan elrejteti a belsejébe rejtett merev hengert [63].
27. ábra Mechanikus metaanyag csavarodásra [64]
28. ábra Ti-6Al-4V anyagú pentamon rács szelektív lézer ömlesztéssel (SLM) készítve, biológiai felhasználásra [65]
29. ábra 2D alap-struktúrák csoportosítása kiralitás szempontjából [66]
30. ábra Tömeg-a-tömegben modell
31. ábra Effektív tömeg értelmezése a tömeg-a-tömegben modell alapján
32. ábra Dimenzió nélküli effektív tömeg (m_{eff}/m_1) a gerjesztő körfrekvencia (ω/ω_2) függvényében
33. ábra Nem-lineáris abszorber koncepciója
34. ábra Negatív effektív tömegű alapegység felépítése
35. ábra. Akusztikus metaanyag egydimenziós alapegysége [70]
36. ábra Negatív effektív tömeg frekvenciasáv-rés eltolódása nem-lineáris rendszer esetén
37. ábra Kísérleti berendezés által mért Frekvencia Válasz Függvény (FRF) [71]
38. ábra „Tapéta”-jellegű metastruktúra elemi egysége
39. ábra Egy szabadságfokú, periodikus gerjesztésű, viszkózus csillapítású rezgés modellje
40. ábra Forgóvektor koordináták
41. ábra Egyensúlyi erőrendszer forgóvektorai

42. ábra Nem-lineáris rugókarakterisztikájú egy-szabadságfokú rezgő rendszer erőinek forgóvektoros ábrázolása [74]
43. ábra Nem-lineáris rugómerevségű rezgő rendszer rezonancia-viszonyai [12]
44. ábra Két szabadságfokú, gerjesztett, csillapított rezgés modellje
45. ábra Csatolt tömegre ható erőrendszer
46. ábra Csatolt tömeg eredő erővel
47. ábra Az m_1 testre ható forgóvektorok
48. ábra Tömeg-a-tömegben alrendszer csillapítással
49. ábra $\varphi_2(D_2, \frac{\omega_g}{\omega_2})$ fáziseltolódás
50. ábra $G_{21}(D_2, \frac{\omega_g}{\omega_2}) = \frac{A_2}{A_1}$ amplitúdó arány
51. ábra Transzlációs öt szabadságfokú (5-DoF) modell
52. ábra Az m_1 tömegre ható erők D'Alembert szerint, 5-DoF esetén
53. ábra Az n. csatolt tömegre ható erők a főtömeg és az n. csatolt tömeg mozgásában
54. ábra $G_{n1} = A_n/A_1$ amplitúdó arányok az ω_g/ω_1 körfrekvencia arány függvényében
55. ábra Fáziskésés a d_n és d_1 elmozdulások között ω_g/ω_1 függvényében
56. ábra Főtömeg amplitúdói osztva a statikus nyúlásával ω_g/ω_1 függvényében
57. ábra A gerjesztő erő és a főtömeg elmozdulás közötti fáziskésés ω_g/ω_1 függvényében
58. ábra Az m_1 tömegre ható erők D'Alembert szerint, n szabadságfok esetén
59. ábra Zhu és társai által összeállított mérőkör [75]
60. ábra PHOTON+ dinamikus jelanalizátor erősítővel, tartó szerkezettel, rázógéppel, gyorsulás- és erőmérőkkel, valamint egy 3D nyomtatóval készített metaanyag vázzal
61. ábra Fourier transzformáció
62. ábra Két szabadságfokú, tömeg-a-tömegben elrendezésű rezgő rendszer mérési modellje
63. ábra 5-DoF hajlított tartós modell
64. ábra 5-DoF hajlított tartós modell saját körfrekvenciái Autodesk Inventor VEM analízisével
65. ábra Mérő rendszer 3-DoF elrendezésben, gerjesztéssel
66. ábra Hajlított tartós 3-DoF modell
67. ábra 5-DoF hajlított tartós modell a) 3D szilárd test modell, b) modell sémája

68. ábra 2-DoF szabad rezgés FFT mérése a hálózati frekvencián és felharmonikusain kapott jelekkel. A felső ábra a jelek időbeli lefutását, az alsó a különböző frekvenciájú összetevőket ábrázolja.
69. ábra A jelek észlelése FFT után y_{\max} értékének csökkentésével
70. ábra 1-DoF szabad rezgés saját frekvenciájának mérései hajlított tartós modellen
71. ábra Rugalmas befogás elméleti vázlata
72. ábra Rugó tömegének redukálása az m_1 tömeg pozíciójába
73. ábra Befogási rugóállandó (c_{Bef}) értékek egy szabadságfokú, rugalmasan befogott tartó esetében, a tömeg (m_1) befogástól mért pozíciójának (a) függvényében. A pontok jelzik a mért értékeket, a folytonos vonal a trend vonal.
74. ábra 2-DoF rendszer rugalmas befogással
75. ábra 5-DoF (piros vonal) és 1-DoF modell (csatolt tömegek nélkül) (kék szaggatott vonal) translációs modell amplitúdói a gerjesztési frekvencia függvényében
76. ábra 5-DoF hajlított tartós modell amplitúdói a gerjesztési körfrekvencia függvényében
77. ábra VEM szimuláció háló beállításai
78. ábra Az Inventor VEM analízisa során kapott első hat saját frekvencia (Modal Frequency): a) ω_1 , b) ω_2 , c) ω_3 , d) ω_4 , e) ω_5 , f) ω_6 .
79. ábra Főtömeg amplitúdó a gerjesztési frekvencia és a csillapítási tényező függvényében translációs modellnél.

FÜGGELÉK

1. számú függelék: 1-DoF mérés: 2020-03-12. csütörtök, 12:35-től

Laprugó: 3x30x245mm (középen 10mm széles kimarással)

Mért rugó tömeg: 108,8g

Inventor számított rugó tömeg 117g (átállítva kisebb sűrűségeire a mért tömeg miatt)

M1 tömeg:

Mért M1 tömeg: 146,2g

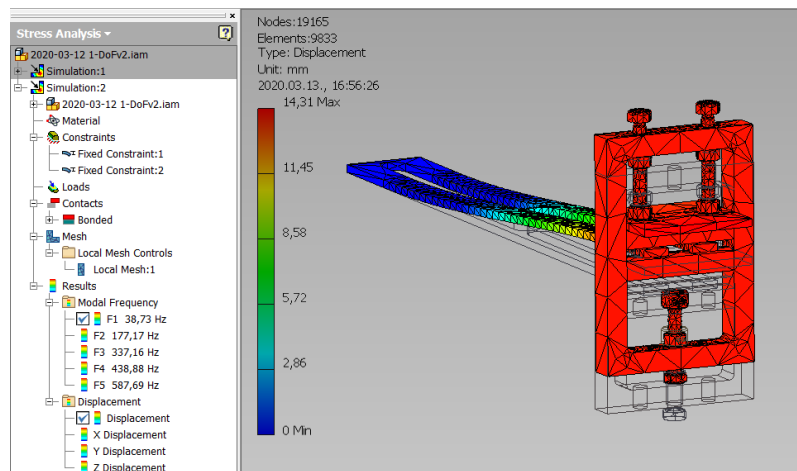
Inventor számított M1 tömeg 147g (2 db csavarral kevesebb az ábrán a valósághoz képest)

A tömeg súlypontja 210 mm-re elhelyezve a rugó befogásától, még 5 mm rugó túlnyúlik.

Mért saját frekvencia: 16,3 Hz

Számított saját frekvencia (rugótömeg 33/140 beszámítva): 21,37 HZ

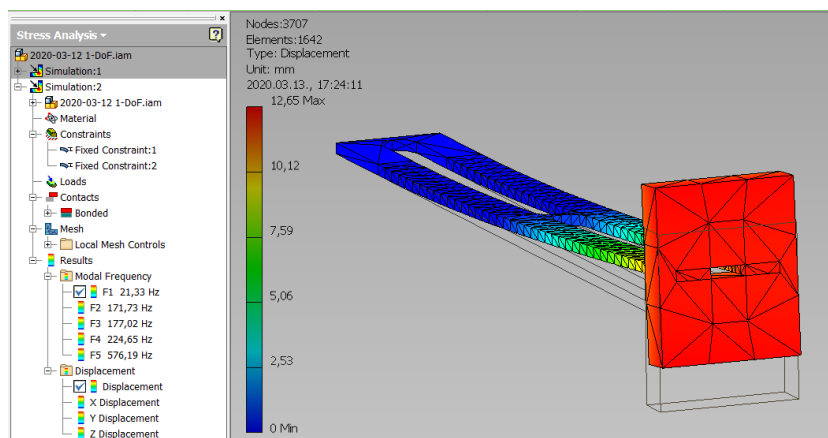
Inventor VEM saját frekvencia (1. ábra: valós M1 alak): 38,73 Hz



Tömör tömeggel (2. ábra):

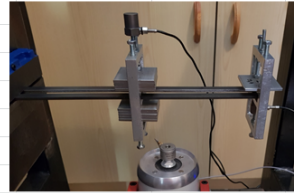
Inventor VEM saját frekvencia:

21,33 Hz



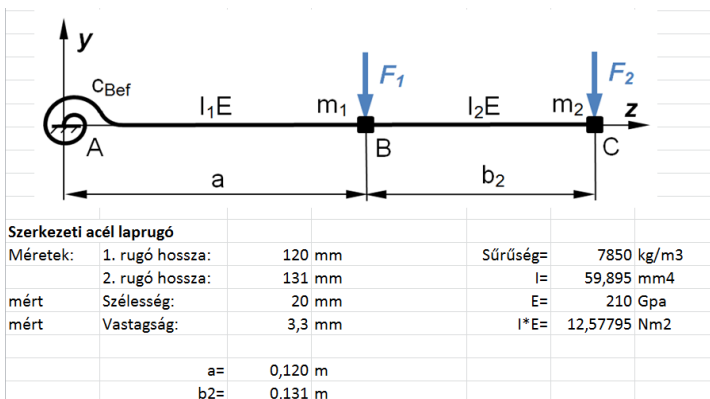
2. számú függelék: Mért saját frekvenciából számított rugalmas befogási rugóállandó és az ebből nyert további adatok a 2020.04.26-i mérés alapján.

Két szabadságfokú szabad rezgés - saját frekvencia mérések	
Dátum: 2020.04.26	Gerjesztés: Egyujjas pendítéssel a 2. rugós szakaszon M2 előtti részen
m1 tömeg=	0,4761 kg
9.	0,1106 kg M1 keret szorító csavarokkal
10.	0,3542 kg 9 db lapsúly
11.	0,0113 kg Nagyobbik gyorsulásmérő
m2 tömeg=	0,1436 kg
7.	0,0087 kg Kicsi gyorsulásmérő
14.	0,0955 kg M2 keret szorító csavarokkal (a régi érték a 13. volt, szorítóelem nélkül)
15.	0,0393 kg 1 db lapsúly



1. rugó: Befogástól az m1 súlypontjáig						1. gyorsulásmérő adatai					
Hossz= 120 mm						Hossz= 120 mm					
Mért frekv.	Jel (amplitúdó Fourier transzformációból, 5 különálló mérés)					Mért frekv.	Jel (amplitúdó Fourier transzformációból, 5 különálló mérés)				
[Hz]	1.	2.	3.	4.	5.	[Hz]	1.	2.	3.	4.	5.
12,5	0,000015	0,000086	0,000031	0,000096	0,000027	64,0	0,002589	0,000928	0,001405	0,000927	0,013278
13,0	0,000141	0,000136	0,000068	0,000048	0,000120	64,5	0,003987	0,001225	0,002034	0,000742	0,016809
13,5	0,000202	0,000108	0,000212	0,000167	0,000119	65,0	0,005921	0,002549	0,003174	0,002693	0,022518
14,0	0,001099	0,000884	0,001119	0,001254	0,001288	65,5	0,013429	0,006575	0,009984	0,007786	0,038099
14,5	0,004186	0,002998	0,003834	0,004370	0,004531	66,0	0,036489	0,020828	0,033037	0,024424	0,064160
15,0	0,003910	0,002559	0,003254	0,004020	0,004639	66,5	0,045755	0,022033	0,038294	0,027355	0,066898
15,5	0,000923	0,000650	0,000861	0,000847	0,001244	67,0	0,023162	0,006960	0,015373	0,010404	0,042095
16,0	0,000188	0,000153	0,000118	0,000146	0,000159	67,5	0,006348	0,000785	0,003261	0,002734	0,022836
16,5	0,000055	0,000023	0,000096	0,000167	0,000059	68,0	0,002762	0,000424	0,002109	0,000697	0,014668
17,0	0,000027	0,000128	0,000112	0,000113	0,000086	68,5	0,002558	0,000257	0,000904	0,000771	0,010681
Súly. S.f.	14,72	14,71	14,73	14,73	14,76	69,0	0,001526	0,000568	0,000387	0,000288	0,008380
Súlyozott saját fr. átl:	14,73 Hz					Súly. S.f.	66,33	66,20	66,30	66,29	66,30
						Súlyozott saját fr. átlag:	66,29 Hz				

2. rugó: az m1 súlypontjától az M2 súlypontjáig						2. gyorsulásmérő adatai					
Hossz= 131 mm						Hossz= 131 mm					
Mért frekv.	Jel (amplitúdó Fourier transzformációból, 5 különálló mérés)					Mért frekv.	Jel (amplitúdó Fourier transzformációból, 5 különálló mérés)				
[Hz]	1.	2.	3.	4.	5.	[Hz]	1.	2.	3.	4.	5.
12,5	0,000046	0,000105	0,000038	0,000064	0,000074	64,0	0,000413	0,000244	0,000352	0,000229	0,002536
13,0	0,000053	0,000079	0,000102	0,000089	0,000039	64,5	0,000834	0,000208	0,000463	0,000083	0,003072
13,5	0,000129	0,000088	0,000030	0,000113	0,000181	65,0	0,001072	0,000437	0,000621	0,000574	0,003929
14,0	0,000665	0,000438	0,000463	0,000591	0,000349	65,5	0,002265	0,001070	0,001559	0,001342	0,006447
14,5	0,001948	0,001350	0,001538	0,001989	0,001816	66,0	0,006330	0,003734	0,005546	0,004116	0,010550
15,0	0,001648	0,001144	0,001443	0,001952	0,001932	66,5	0,008115	0,003783	0,006268	0,004562	0,010895
15,5	0,000414	0,000186	0,000244	0,000544	0,000527	67,0	0,004005	0,000999	0,002384	0,001669	0,006898
16,0	0,000115	0,000084	0,000175	0,000122	0,000049	67,5	0,001067	0,000191	0,000541	0,000487	0,003781
16,5	0,000036	0,000070	0,000042	0,000086	0,000053	68,0	0,000394	0,000142	0,000514	0,000105	0,002462
17,0	0,000059	0,000099	0,000096	0,000140	0,000101	68,5	0,000469	0,000084	0,000356	0,000216	0,001794
Súly. S.f.	14,69	14,67	14,75	14,77	14,77	69,0	0,000168	0,000178	0,000173	0,000156	0,001379
Súlyozott saját fr. átl:	14,73 Hz					Súly. S.f.	66,31	66,22	66,32	66,30	66,27
						Súlyozott saját fr. átlag:	66,28 Hz				



Befogási rugóállandót beszámítva:		Mért érték:	$c_{bef} = 0,0009616 \text{ rad/Nm -rel}$	$C_{bef} = \frac{1}{(2\pi f_{mért} l)^2 m_{red}} - \frac{l}{3IE}$
$c_{11} = c_{bef} a^2 + \frac{a^3}{3 I_1 E}$			c11= 0,0000596 m/N	
$c_{22} = c_{bef} (a + b_2)^2 + \frac{a(a^2 + 3ab_2 + 3b_2^2)}{3 I_1 E} + \frac{b_2^3}{3 I_2 E}$			c22= 0,0004797 m/N	0,000479654
$c_{12} = c_{21} = c_{bef} (a^2 + ab_2) + \frac{a^2(2a + 3b_2)}{6 I_1 E}$			c21= 0,0001497 m/N	(F1 okozta lejhajlás m2-nél)-ből: (F2 okozta lejhajlás m1-nél)-ből:

Számítás - rugótömeg redukálása rugalmas befogás nélkül:								
E mátrix		C mátrix [m/N]		M mátrix [kg]				
1	0	0,0000596	0,0001497	0,7315	0			
0	1	0,0001497	0,0004797	0	0,1774			
				$\omega 2 [1/s^2]$	Számítással			
$a = m1 * m2 * (c11 * c22 - c12 * c21)$		8,02526E-10		8185,7479	14,399563			
$b = -(m1 * c11 + m2 * c22)$		-0,00012873		152223,76	62,095675			
$c = 1$		1						
Szerkezeti acél laprugó								
Befogástól a végéig:		257 mm	Sűrűség=	7850 kg/m3	Összekötés			
Változó M1 pozíció (a) + túlnyúlás (b2)			l=	59,895 mm4	m1-nél			
mért Szélesség:		20 mm	E=	210 Gpa	(mm2)			
mért Vastagság:		3,3 mm	I * E=	12,57795 Nm2	41,46			
					Összekötés tömege (kg)			
					0,0011			
Redukált rugótömeg számítás rugalmas befogás nélkül:								
(rég "b" jelöléssel):		$m_{RED} = \frac{33}{140} m_{r1} + m1 + m_{r2} \frac{3b^2 + a^2}{4a^2}$						
Redukált rugó tömeg m1-re		Rugó tömege m1-ig		Rugó tömege m1-en túl		Összekötés	Rugó m1 súlypontra red. t.	
Rugó m1-ig	m2-ig	mr11	Red szorzó	mr12	Red szorzó	m1-nél	Red szorzó	
a (mm)	b (mm)	(kg)	(33/140)	(kg)	(lásd fenn)	(kg)	(1-(a-120)/b)	(kg)
120	251	0,0622	0,2357	0,0679	3,5313	0,0011	1,0000	0,2554
Redukált rugó tömeg m2-re		Rugó tömege m2-ig		Rugó tömege m2-en túl				Rugó m2 súlypontra red. t.
Rugó m2-ig	Rugó teljes hossz	mr21	Red szorzó	mr22	Red szorzó			
b (mm)	(mm)	(kg)	(33/140)	(kg)	(lásd fenn)			(kg)
251	257	0,1300	0,2357	0,0031	1,0363			0,0339
$m1red =$		0,7315 kg		az összes rugó tömege m1 súlypontjába redukálva, nincs rugalmas befogás				
$m2red =$		0,1774 kg		az összes rugó tömege m2 súlypontjába redukálva, nincs rugalmas befogás				
Dunkerley-féle megközelítő megoldás rugalmas befogás nélkül számolt redukált rugótömeggel								
Ha a tömegek egyesével egyedül vannak a rúdon, akkor a saját körfrekvenciáik négyzetei a c11 és m1red-del, valamint c22 és m2red-del:								
$\omega(1)^2 =$	22922,31 1/s2			580,6290125				
$\omega(2)^2 =$	11749,89 1/s2			297,6280797				
Ez alapján a legkisebb körfrekvencia becslése:				$f_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2}}}$				
$\omega 1 =$	88,14 1/s			14,03				
$f 1 =$	14,03 Hz							

Új számítás - rugótömeg redukálása rugalmas befogással					
E mátrix		C mátrix [m/N]		M mátrix [kg]	
1	0	0,0000596	0,0001497	0,7150	0
0	1	0,0001497	0,0004797	0	0,1788
				$\omega 2 [1/s^2]$	Számítással
$a = m1 * m2 * (c11 * c22 - c12 * c21)$		7,9036E-10		8203,0946	14,414812
$b = -(m1 * c11 + m2 * c22)$		-0,00012839		154240,07	62,505573
$c = 1$		1			
				$f_1 =$	saját f1= 14,41481233
				$f_2 =$	saját f2= 62,50557339

Rugalmas befogással számolt redukált rugótömeg

Adatok a lentebbi képletekhez a gyors elérés miatt:

$$c_{bef} = 0,00096159 \text{ rad/Nm -rel} \quad IE = 12,57795 \text{ Nm}^2$$

$$m_{red1} = \frac{m_{r1}}{c_{Bef}^2 + \frac{2c_{Bef}a}{3I_1E} + \frac{a^2}{(3I_1E)^2}} \left(\frac{c_{Bef}^2}{3} + \frac{11c_{Bef}a}{60I_1E} + \frac{33a^2}{35(6I_1E)^2} \right)$$

$$m_{red2} = m_{r2} \frac{(c_{Bef} + \frac{a}{2I_1E})^2 \frac{(a+b_2)^3 - a^3}{3} - (c_{Bef} + \frac{a}{2I_1E}) \frac{a^2}{6I_1E} (2ab_2 + b_2^2) + \frac{a^4 b_2}{(6I_1E)^2}}{b_2 a^2 (c_{Bef} + \frac{a}{3I_1E})^2}$$

Redukált rugó tömeg sz. m1-re		Rugó tömege m1-ig		Rugó tömege m1-en túl		Összekötés		Rugó m1 súlypontra red. t.
Rugó m1-ig	Rugó túlnyúlása	mr11	Red szorzó	mr12	Red szorzó	m1-nél	Red szorzó	(kg)
a (m)	b2 (m)	(kg)	számolt	(kg)	számolt	(kg)		
0,12	0,131	0,0622	0,2550	0,0679	3,2716	0,0011	1,0000	0,2390
		kézzel:	0,2550		3,2710			
Redukált rugó tömeg sz. m2-re		Rugó tömege m2-ig		Rugó tömege m2-n túl				Rugó m2 súlypontra red. t.
Rugó m2-ig	Rugó túlnyúlása	mr21	Red szorzó	mr22	Red szorzó			(kg)
a+b2 (m)	(m)	(kg)	számolt	(kg)	számolt			
0,251	0,006	0,1300	0,2459	0,0031	1,0347			0,0352
		m1red=	0,7150 kg	az összes rugó tömege m1 súlypontjába redukálva, rugalmas befogással				
		m2red=	0,1788 kg	az összes rugó tömege m2 súlypontjába redukálva, rugalmas befogással				

Dunkerley-féle megközelítő megoldás rugalmas befogással számolt redukált rugótömeggel

Ha a tömegek egyesével egyedül vannak a rúdon, akkor a saját körfrekvenciáik négyzetei a c11 és m1red-del, valamint c22 és m2red-del:

$$\omega(1)^2 = 23448,99 \text{ 1/s}^2$$

$$593,969943$$

$$\omega(2)^2 = 11662,78 \text{ 1/s}^2$$

$$295,4216391$$

Ez alapján a legkisebb körfrekvencia becslése:

$$f_1 = \sqrt{\frac{1}{f_{(1)}^2} + \frac{1}{f_{(2)}^2}}$$

$$\omega_1 = 88,25 \text{ 1/s}$$

$$14,05$$

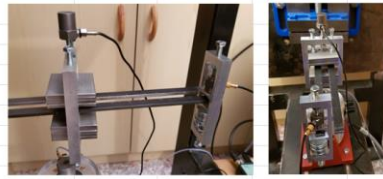
$$f_1 = 14,05 \text{ Hz}$$

Új számítás - iterálás

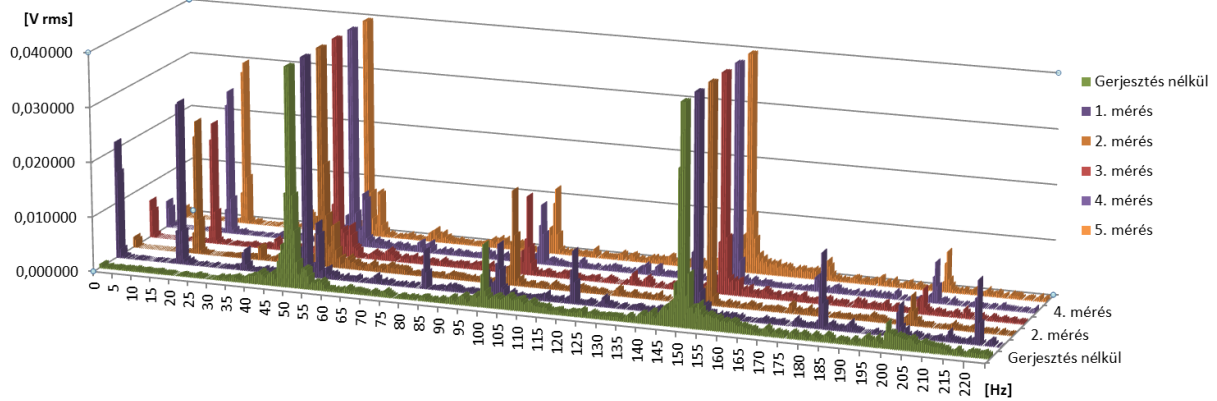
E mátrix		C mátrix [m/N]		M mátrix [kg]			
1	0	0,0000596	0,0001497	0,6100	0		
0	1	0,0001497	0,0004797	0	0,1750		
				ω_2 [1/s ²]		Számítással	Mért
a=m1*m2*(c11*c22-c12*c21)		6,60078E-10		8729,1393	14,869824	saját f1=	14,73
b=-(m1*c11+m2*c22)		-0,00012032		173553,6	66,303575	saját f2=	66,28
c=1		1					

3. 2-DoF rezgés mérése, m2 tömeg csak az egyik villán (2020.05.12.)

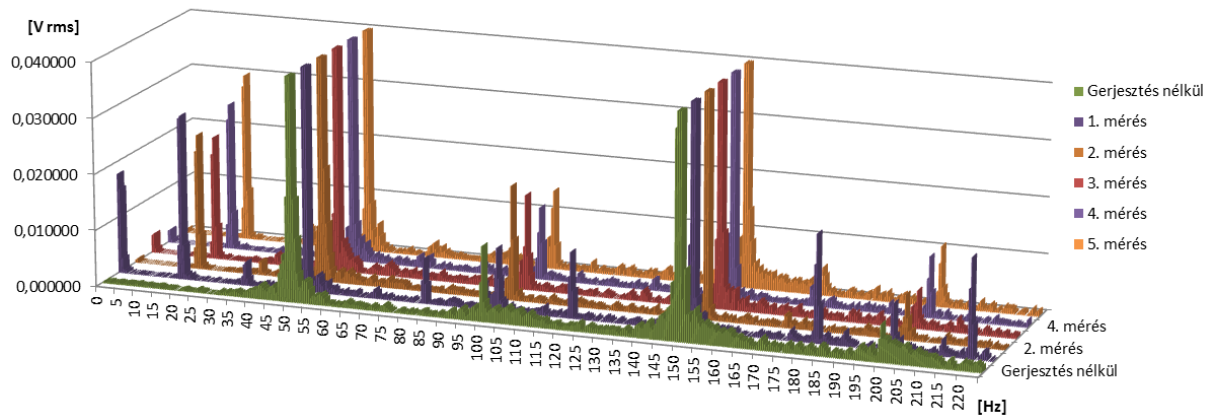
2 szabadságfokú szabad rezgés, m2 tömeg csak az egyik villán.						
2020.05.12. Kedd						
Szerkezeti acél rugó			Egyujjas pendítés az m2 tömeg előtt.			
m1=	0,4761	kg				
m2=	0,0894	kg				
l1=	120	mm				
l2=	130	mm	Túlnyúlás=	5	mm	
Legalább 0,001 V értékű jel előfordulása az öt mérés során:						
5-ször:	0,0-0,5	16,0-17,5	33,5-34,0	48,5	51,5-54,5	127
4-szer:	46,0	47,5-48,0	68,0	70,0	98,5	110,0
Ezekkel mindenképpen foglalkozni kell.						
	126,5	147,0	148,0	152,0	170	198,5
					210,0	



m1 gyorsulásmérő



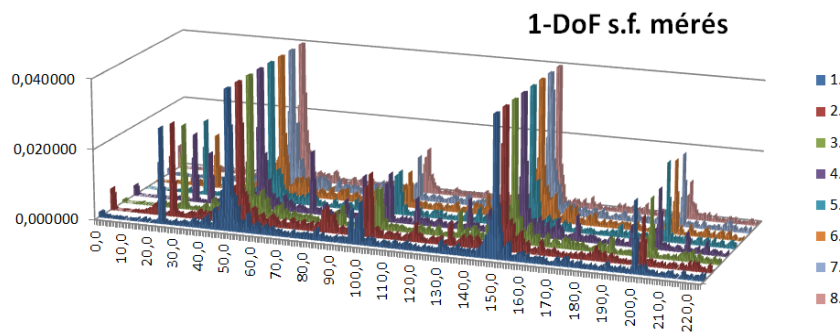
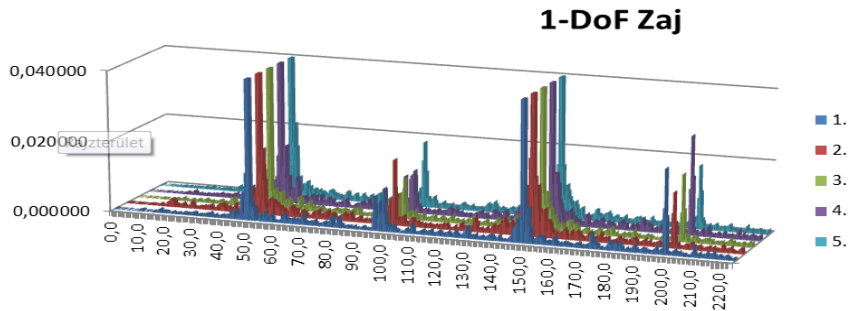
m2 gyorsulásmérő



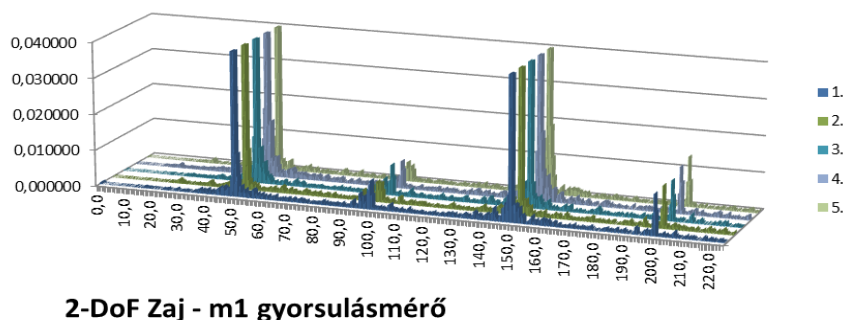
4. Összefoglaló a 2020.05.15-i szabad rezgés saját frekvencia méréseiről

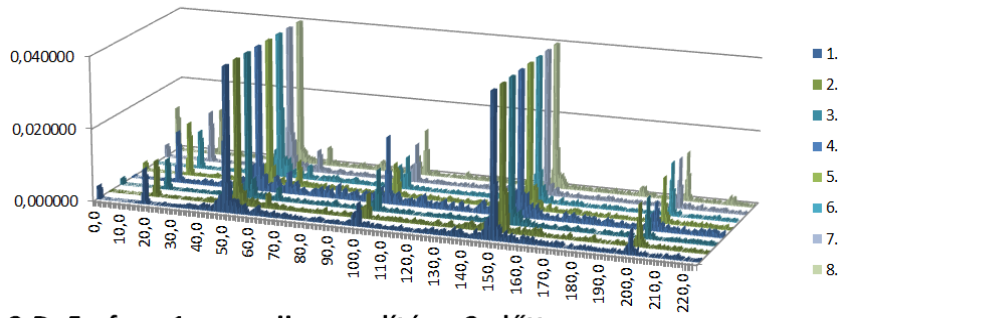
Általános adatok: $m_1=0,4761$ kg, $m_2=0,0894$ kg, $m_3=0,0707$ kg (ha vannak)

- **1-DoF**: Gerjesztés: m_1 előtti rugó lefelé pendítve
 $l_1=120$ mm, túlnyúlás=136 mm (mindkét rugó villa)

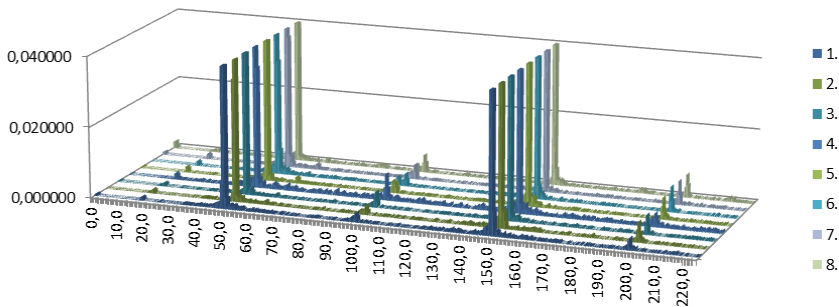


- **2-DoF**: Gerjesztés: m_2 előtti 2. rugón lefelé pendítve egy ujjal (csak az egyik villán)
 $l_1=120$ mm, $l_2=105$ mm, l_2 túlnyúlása=31 mm, $l_3=136$ mm (mind túlnyúlás, mivel m_3 tömeg nincs rajta)



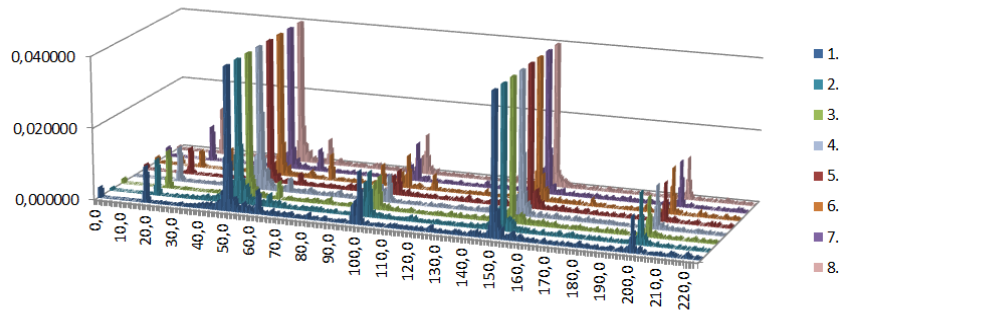


2-DoF s.f. - m1 - egy ujjas pendítés m2 előtt

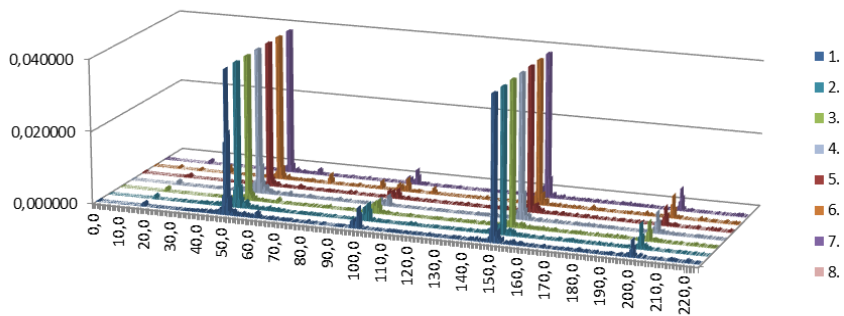


2-DoF s.f. - m2 - egy ujjas pendítés m2 előtt

- **2-DoF:** Gerjesztés: m2 előtti mindkét villaágon le és fel, két ujjal. $l_1=120$ mm, $l_2=105$ mm, l_2 túlnyúlása=31 mm, $l_3=136$ mm (mind túlnyúlás, mivel m3 tömeg nincs rajta)

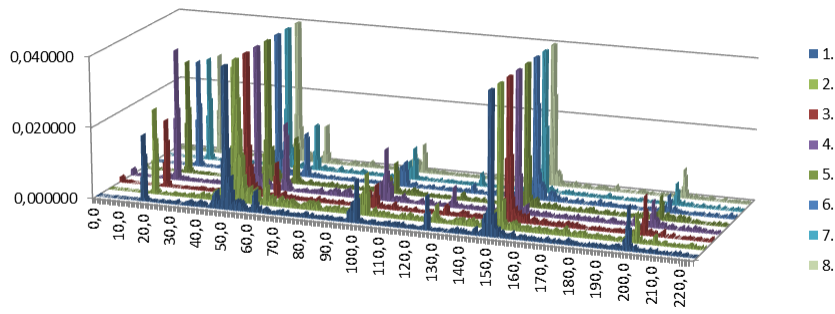


2-DoF s.f. - m1 - két ujjas pendítés m2 előtt

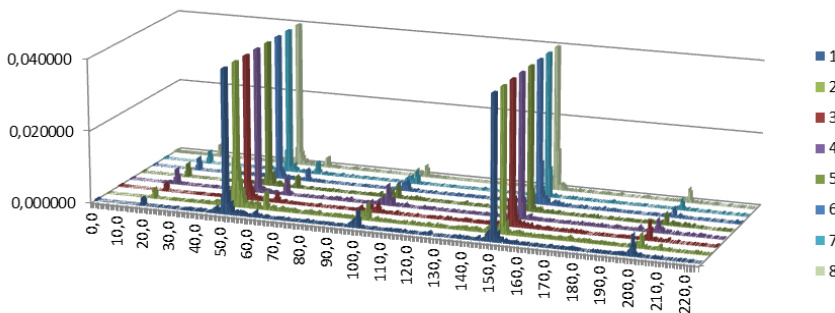


2-DoF s.f. - m2 - két ujjas pendítés m2 előtt

- **2-DoF:** Gerjesztés: mindkét villaág végén le és fel, két ujjal pendítve
 $l_1=120$ mm, $l_2=105$ mm, l_2 túlnyúlása=31 mm, $l_3=136$ mm (mind túlnyúlás, mivel m_3 tömeg nincs rajta)

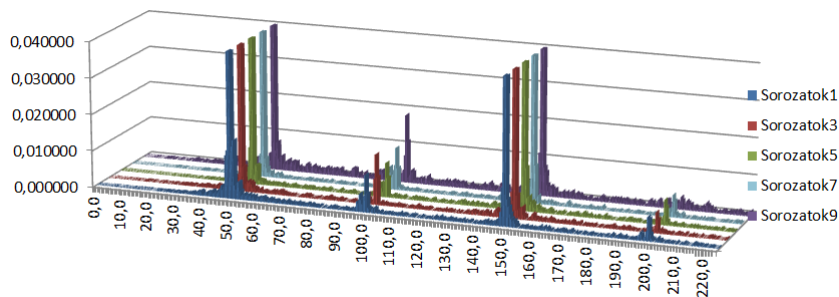


2-DoF s.f. - m1 - gerj.: két ujjal rugóvégen + m1 lehúzva

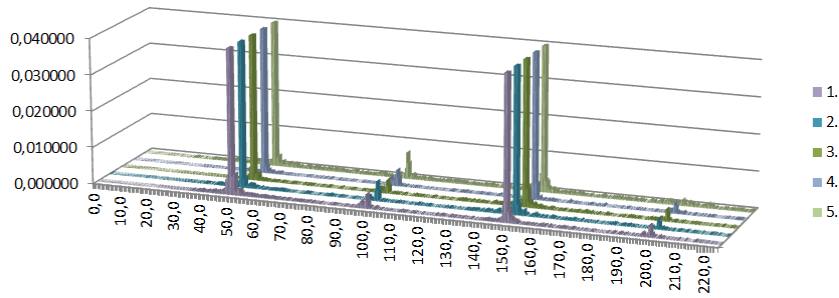


2-DoF s.f. - m2 - gerj.: két ujjal rugóvégen + m1 lehúzva

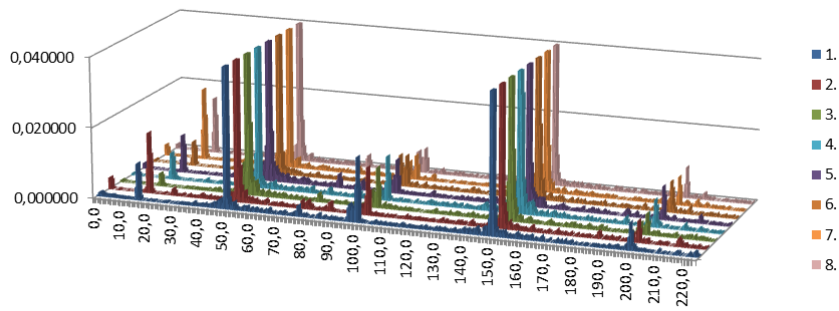
- **3-DoF:** Gerjesztés: mindkét villaág végén le és fel, két ujjal pendítve, m_1 lehúzása mellett.
 $l_1=120$ mm, $l_2=105$ mm, l_2 túlnyúlása=31 mm, $l_3=121$ mm, l_3 túlnyúlása=15 mm



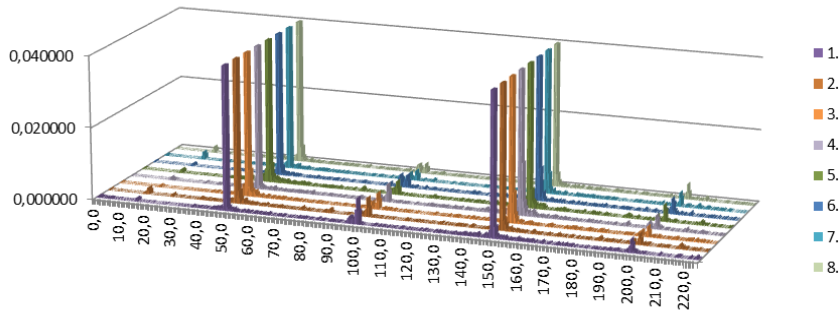
3-DoF Zaj - m1 gyorsulásmérő



3-DoF Zaj - m2 gyorsulásmérő



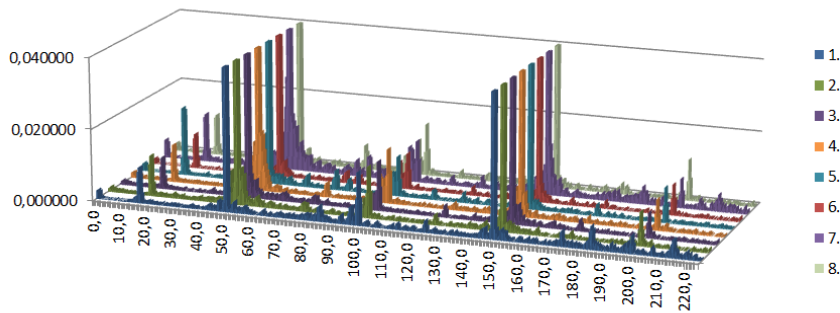
3-DoF s.f. - m1 - gerj.: két ujjal rugóvégen + m1 lehúzva



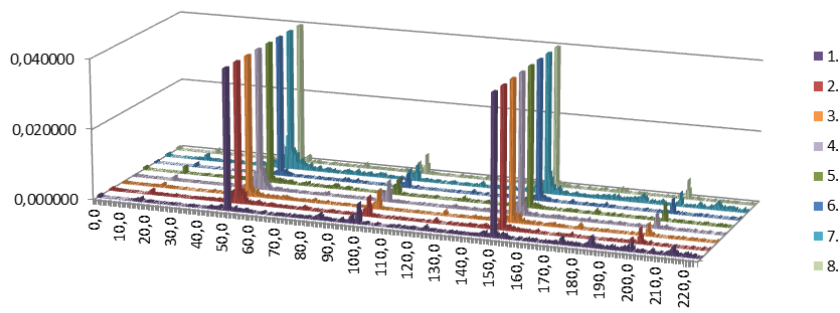
3-DoF s.f. - m2 - gerj.: két ujjal rugóvégen + m1 lehúzva

- **új 3-DoF:** Gerjesztés: mindkét villaág végén le és fel, két ujjal pendítve, m1 lehúzása mellett.

l1=120 mm, l2=105 mm, l2 túlnyúlása=31 mm, l3=86 mm, l3 túlnyúlása=50 mm

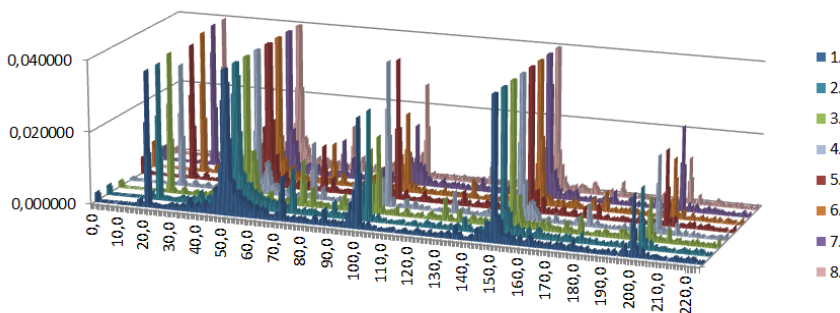


új 3-DoF s.f. - m1 - g.: két ujjal rugóvégen + m1 lehúzva



új 3-DoF s.f. - m2 - g.: két ujjal rugóvégen + m1 lehúzva

- **2-DoF: m1 + m3.** Gerj.: mindkét villaág végén le és fel, két ujjal pendítve, m1-et is lefelé húzva.
 $l_1=120$ mm, $l_3=86$ mm, l_3 túlnyúlása=50 mm, $l_2=136$ mm (mind túlnyúlás, mivel m2 tömeg nincs rajta).



m3-as 2-DoF s.f. - m1 - egy ujjas pendít. m3 rugó végén

5. Függelék: 5-DoF translációs és hajlított tartós modellek analitikus, numerikus és Inventor VEM szimulációi (Excell tábla)

5-DoF hajlított tartó, rugalmas befogással - NUMERIKUS megoldás – k1 csillapítással

Rugóerevségi mátrix elemeinek számítása:

a=	0,12	m	l1=	6E-11	m4
b2=	0,16	m	l2=	6E-11	m4
b3=	0,15	m	l3=	6E-11	m4
b4=	0,14	m	l4=	6E-11	m4
b5=	0,13	m	l5=	6E-11	m4

cb=	0,001	rad/Nm	E=	2,1E+11	Pa
-----	-------	--------	----	---------	----

C=	6,011E-05	1,707E-04	1,638E-04	1,569E-04	1,500E-04
[m/N]	1,707E-04	6,591E-04	5,270E-04	5,033E-04	4,795E-04
	1,638E-04	5,270E-04	5,936E-04	4,816E-04	4,589E-04
	1,569E-04	5,033E-04	4,816E-04	5,326E-04	4,383E-04
	1,500E-04	4,795E-04	4,589E-04	4,383E-04	4,759E-04

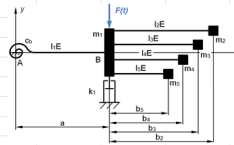
C(-1)=	113 857	-6 304	-7 872	-9 956	-12 775
[m/N]	-6 304	7 712	-1 725	-1 980	-2 297
	-7 872	-1 725	9 237	-2 253	-2 613
	-9 956	-1 980	-2 253	11 189	-3 000
	-12 775	-2 297	-2 613	-3 000	13 726

$$c_{11} = c_b a^2 + \frac{a^3}{3 I_1 E}$$

$$c_{1i} = c_{i1} = c_b (a^2 + a b_i) + \frac{a^2 (2a + 3b_i)}{6 I_1 E}, \quad (i = 2 \dots 5)$$

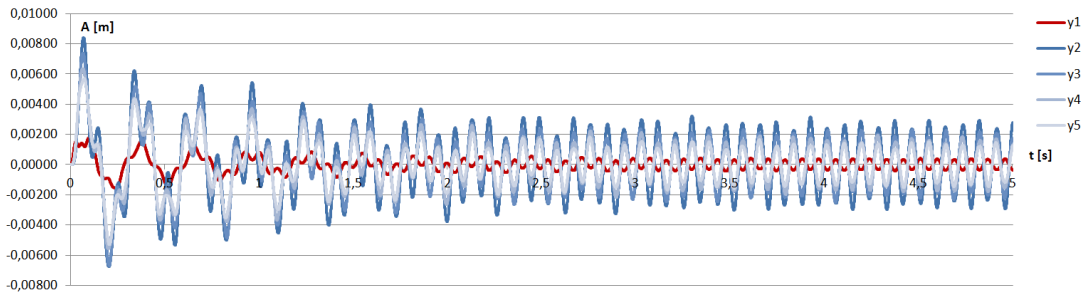
$$c_{ii} = c_b (a + b_i)^2 + \frac{a(a^2 + 3ab_i + 3b_i^2)}{3 I_1 E} + \frac{b_i^3}{3 I_1 E}, \quad (i = 2 \dots 5)$$

$$c_{ij} = c_{ji} = c_b [a^2 + a(b_i + b_j) + b_i b_j] + \frac{a[2a^2 + 3a(b_i + b_j) + 6b_i b_j]}{6 I_1 E}, \quad (i, j = 2 \dots 5, i \neq j)$$

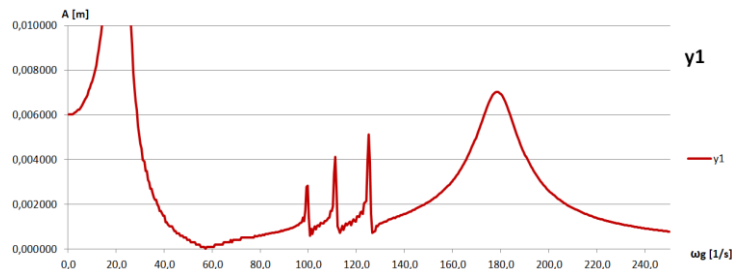


ωg=	70	1/s	k1=	80	Ns/m	m1=	4	kg
Fo=	100	N	k2=	0	Ns/m	m2=	1	kg
			k3=	0	Ns/m	m3=	1	kg
			k4=	0	Ns/m	m4=	1	kg
			k5=	0	Ns/m	m5=	1	kg

			Max:	0,00040		0,00295		0,00229		0,00193		0,00149				
t [ms]	t [s]	y1''	y1'	y1	y2''	y2'	y2	y3''	y3'	y3	y4''	y4'	y4	y5''	y5'	y5
0	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,1	0,0001	0,17500	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,2	0,0002	0,34959	0,00002	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00002	0,00000	0,00000	0,00002	0,00000	0,00000
0,3	0,0003	0,52371	0,00005	0,00000	0,00004	0,00000	0,00000	0,00006	0,00000	0,00000	0,00007	0,00000	0,00000	0,00009	0,00000	0,00000
0,4	0,0004	0,69731	0,00010	0,00000	0,00011	0,00000	0,00000	0,00014	0,00000	0,00000	0,00017	0,00000	0,00000	0,00022	0,00000	0,00000
0,5	0,0005	0,87034	0,00017	0,00000	0,00022	0,00000	0,00000	0,00028	0,00000	0,00000	0,00035	0,00000	0,00000	0,00045	0,00000	0,00000



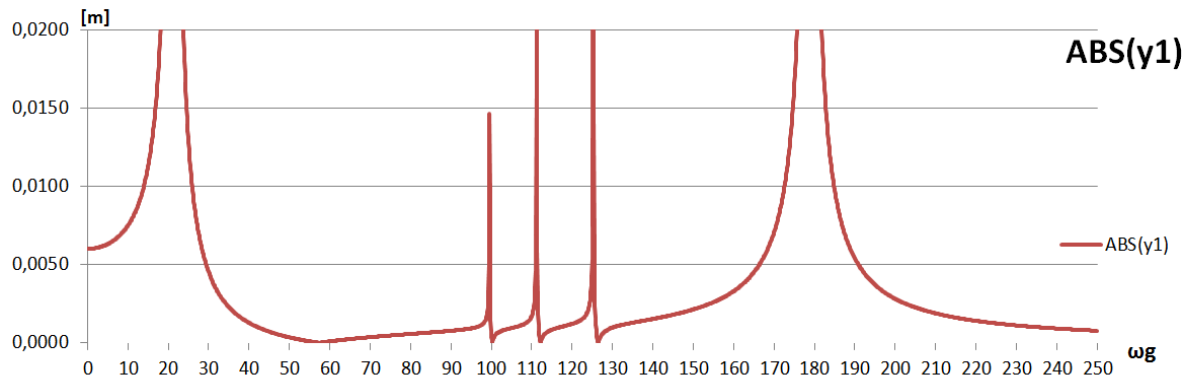
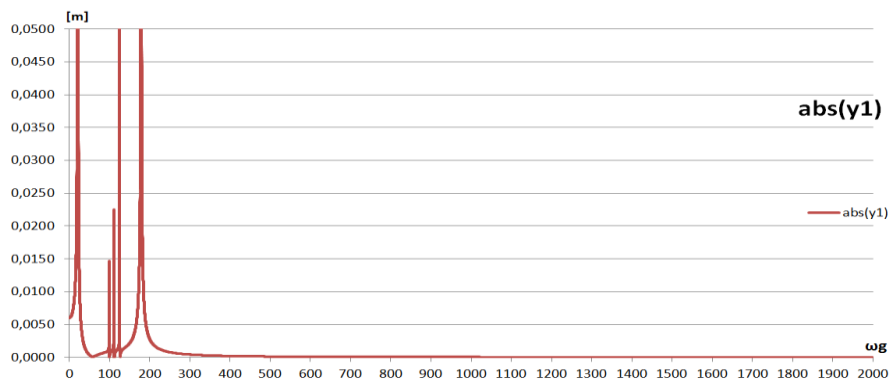
Maximum értékek az utolsó 1 másodpercben (40-ig 2ms-ben)					
ωg	y1	y2	y3	y4	y5
0,0	0,006019	0,017103	0,016409	0,015715	0,015022
0,5	0,006019	0,017103	0,016409	0,015715	0,015022
1,0	0,006019	0,017103	0,016409	0,015715	0,015022
1,5	0,006019	0,017103	0,016409	0,015715	0,015022
2,0	0,006046	0,017196	0,016492	0,015798	0,015099
2,5	0,006107	0,017395	0,016681	0,015980	0,015275
3,0	0,006124	0,017445	0,016746	0,016029	0,015622



5-DoF hajlított tartó, rugalmas befogással - ANALITIKUS megoldás – csillapítás nélkül

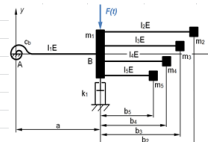
Rugómerevségi mátrix elemeinek számítása:				ANALITIKUS: nincs csillapítás!!!										
a=	0,12	m	I1=	6E-11	m4									
b2=	0,16	m	I2=	6E-11	m4									
b3=	0,15	m	I3=	6E-11	m4									
b4=	0,14	m	I4=	6E-11	m4									
b5=	0,13	m	I5=	6E-11	m4									
cb=	0,001	rad/Nm	E=	2,1E+11	Pa	$c_{11} = c_b a^2 + \frac{a^3}{3 I_1 E}$ $c_{ii} = c_{i1} = c_b (a^2 + a b_i) + \frac{a^2 (2a + 3b_i)}{6 I_i E}, \quad (i = 2 \dots 5)$ $c_{ii} = c_b (a + b_i)^2 + \frac{a(a^2 + 3a b_i + 3b_i^2)}{3 I_i E} + \frac{b_i^3}{3 I_i E}, \quad (i = 2 \dots 5)$ $c_{ij} = c_{ji} = c_b [a^2 + a(b_i + b_j) + b_i b_j] + \frac{a[2a^2 + 3a(b_i + b_j) + 6b_i b_j]}{6 I_i E}, \quad (i, j = 2 \dots 5, i \neq j)$								
C=	6,011E-05	1,707E-04	1,638E-04	1,569E-04	1,500E-04									
[m/N]	1,707E-04	6,591E-04	5,270E-04	5,033E-04	4,795E-04									
	1,638E-04	5,270E-04	5,936E-04	4,816E-04	4,589E-04									
	1,569E-04	5,033E-04	4,816E-04	5,326E-04	4,383E-04									
	1,500E-04	4,795E-04	4,589E-04	4,383E-04	4,759E-04									
C(-1)=	113 857	-6 304	-7 872	-9 956	-12 775									
[m/N]	-6 304	7 712	-1 725	-1 980	-2 297									
	-7 872	-1 725	9 237	-2 253	-2 613									
	-9 956	-1 980	-2 253	11 189	-3 000									
	-12 775	-2 297	-2 613	-3 000	13 726									
						ωg=	101	1/s	k1=	80	Ns/m	m1=	4	kg
						Fo=	100	N	k2=	0	Ns/m	m2=	1	kg
									k3=	0	Ns/m	m3=	1	kg
									k4=	0	Ns/m	m4=	1	kg
									k5=	0	Ns/m	m5=	1	kg

	ωgerj	F0	det4x4	det(5x5)	y1=		
Kezdő ért:	0	100	6,626E+15	1,102E+20	6,011E-03	[m]	
Lépkösz:	0,1	-6 304	7 712	-1 725	-1 980	-2 297	
		-7 872	-1 725	9 237	-2 253	-2 613	
		-9 956	-1 980	-2 253	11 189	-3 000	
		-12 775	-2 297	-2 613	-3 000	13 726	
							ωg
							ABS(y1)
							0
	0,1	100	6,626E+15	1,102E+20	6,012E-03		0,1
		113 857	-6 304	-7 872	-9 956	-12 775	
		-6 304	7 712	-1 725	-1 980	-2 297	
		-7 872	-1 725	9 237	-2 253	-2 613	
		-9 956	-1 980	-2 253	11 189	-3 000	
		-12 775	-2 297	-2 613	-3 000	13 726	
							0,2
							0,3
							0,4
							0,5
							0,6

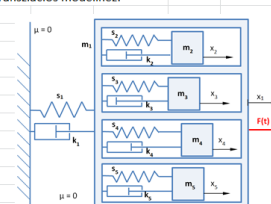


5-DoF translációs modell, rugalmas befogással - ANALITIKUS mego. – csillapítással

Rugóerevségi mátrix elemeinek számítása: **ANALITIKUS:**



Ebből visszafelé számoljuk a rugóerevségeket a translációs modellhez:



a= 0,12 m	l1= 6E-11 m ⁴
b2= 0,16 m	l2= 6E-11 m ⁴
b3= 0,15 m	l3= 6E-11 m ⁴
b4= 0,14 m	l4= 6E-11 m ⁴
b5= 0,13 m	l5= 6E-11 m ⁴
cb= 0,001 rad/Nm	E= 2,1E+11 Pa

$$c_{11} = c_b a^2 + \frac{a^3}{3 I_1 E}$$

$$c_{ii} = c_{11} = c_b (a^2 + a b_i) + \frac{a^2 (2a + 3b_i)}{6 I_1 E}, \quad (i = 2 \dots 5)$$

$$c_{ii} = c_b (a + b_i)^2 + \frac{a(a^2 + 3ab_i + 3b_i^2)}{3 I_1 E} + \frac{b_i^3}{3 I_1 E}, \quad (i = 2 \dots 5)$$

$$c_{ij} = c_{ji} = c_b [a^2 + a(b_i + b_j) + b_i b_j] + \frac{a[2a^2 + 3a(b_i + b_j) + 6b_i b_j]}{6 I_1 E}, \quad (i, j = 2 \dots 5, i \neq j)$$

C=	6,011E-05	1,707E-04	1,638E-04	1,569E-04	1,500E-04
[m/N]	1,707E-04	6,591E-04	5,270E-04	5,033E-04	4,795E-04
	1,638E-04	5,270E-04	5,936E-04	4,816E-04	4,589E-04
	1,569E-04	5,033E-04	4,816E-04	5,326E-04	4,383E-04
	1,500E-04	4,795E-04	4,589E-04	4,383E-04	4,759E-04

C(-1)	113 857	-6 304	-7 872	-9 956	-12 775
[m/N]	-6 304	7 712	-1 725	-1 980	-2 297
	-7 872	-1 725	9 237	-2 253	-2 613
	-9 956	-1 980	-2 253	11 189	-3 000
	-12 775	-2 297	-2 613	-3 000	13 726

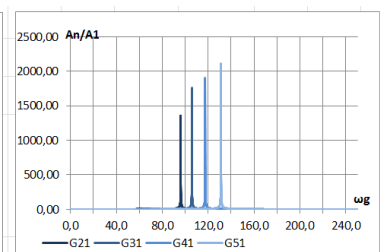
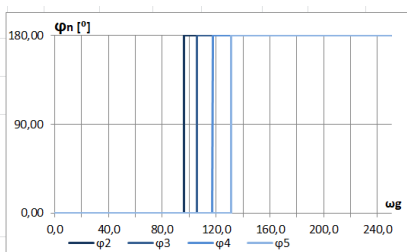
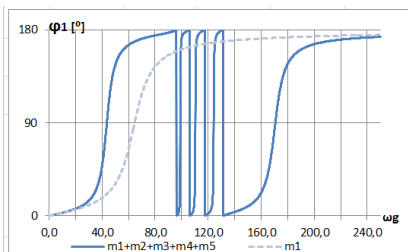
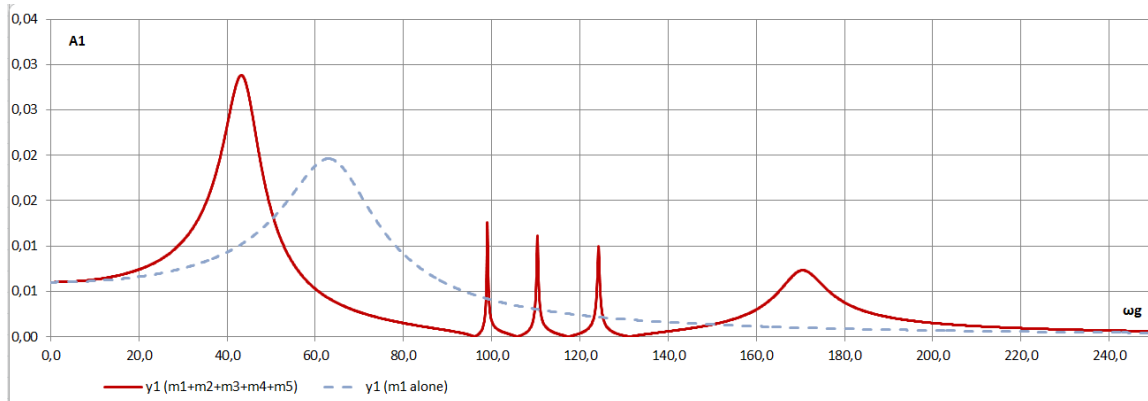
ωg= 101 1/s	k1= 80 Ns/m	m1= 4 kg	s1= 16635 N/m	(=1/c11)
Fo= 100 N	k2= 0,001 Ns/m	m2= 1 kg	s2= 9229 N/m	(=3*l2*E/(b2)^3)
	k3= 0,001 Ns/m	m3= 1 kg	s3= 11200 N/m	(=3*l3*E/(b3)^4)
	k4= 0,001 Ns/m	m4= 1 kg	s4= 13776 N/m	(=3*l4*E/(b4)^5)
	k5= 0,001 Ns/m	m5= 1 kg	s5= 17205 N/m	(=3*l5*E/(b5)^6)

Innentől a korábbi Novi Sad-i ETIKUM 2018-ra készített táblázat, a fenti értékek alapján átvett adatokkal:

5-szabadságfokú rdsz m1 tömegre ható erők (1. tömeghez van csatolva a 2-5. tömeg)		Masses:					
Beviteli adatok:	Számított adatok:	Given data	1.	2.	3.	4.	5.
Fo= 100 N	Saját frekvencia: ω1= 64,4883 1/s	ω = √s/m	Fo= 100				
s1= 16635 N/m	Fajlagos csillapítási tényező: β1= 10 1/s	β = k/2m	Ss= 16635	9228,516	11200	13775,5	17205,3
m1= 4 kg	Kritikus csillapítási tényező: kw1= 515,907 Ns/m	kcr = 2√ms = 2mω	Mm= 4	1	1	1	1
k1= 80 Ns/m	Csillapítási viszonyszám: D1= 0,15507	D = k/kcr	kn= 80	0,001	0,001	0,001	0,001
	Statisztikus rugómegegyülés: xs1= 0,00601 m	xst = Fo/s	ωn= 64,4883	96,06516	105,830052	117,369	131,169
			Dn= 0,15507	5,2E-06	4,7246E-06	4,3E-06	3,8E-06

ω2= 96,0651634 1/s		ω3= 105,8301 1/s		ω4= 117,3691 1/s		ω5= 131,1689 1/s	
S2= 9229 N/m	β2= 0,0005 1/s	S3= 11200 N/m	β3= 0,0005 1/s	S4= 13776 N/m	β4= 0,0005 1/s	S5= 17205 N/m	β5= 0,0005 1/s
m2= 1 kg	kw2= 192,130327 Ns/m	m3= 1 kg	kw3= 211,6601 Ns/m	m4= 1 kg	kw4= 234,7382 Ns/m	m5= 1 kg	kw5= 262,3378 Ns/m
k2= 0,001 Ns/m	D2= 5,2048E-06	k3= 0,001 Ns/m	D3= 4,72E-06	k4= 0,001 Ns/m	D4= 4,28E-06	k5= 0,001 Ns/m	D5= 3,81E-06

ωg		ωg/ω2		φ2 [fok]		G21		A2 [m]		ωg/ω3		φ3 [fok]		G31		A3 [m]		ωg/ω4		φ4 [fok]		G41		A4 [m]		ωg/ω5		φ5 [fok]		G51		A5 [m]	
0	0,00	0,00	0,00	0,00	1,000	0,006011	0	0	0,00	1,000	0,006011	0	0,00	1,000	0,006011	0	0,00	1,000	0,006011	0	0,00	1,000	0,006011	0	0,00	1,000	0,006011	0	0,00	1,000	0,006011	0	
0,1	0,00	0,00	0,00	1,000	0,006011	0,01000001	0	0,00094	0,00	1,000	0,006011	0,01	0,00085	0,00	1,000	0,006011	0,01000001	0,00076	0,00	1,000	0,006011	0,01000001	0,00067	0,00	1,000	0,006011	0,01000001	0,00058	0,00	1,000	0,006011	0,01000001	
0,2	0,00	0,00	0,00	1,000	0,006012	0,04000017	0	0,00189	0,00	1,000	0,006012	0,04	0,0017	0,00	1,000	0,006012	0,04000017	0,00162	0,00	1,000	0,006012	0,04000017	0,00145	0,00	1,000	0,006012	0,04000017	0,00128	0,00	1,000	0,006012	0,04000017	
0,3	0,00	0,00	0,00	1,000	0,006012	0,09000088	0	0,00283	0,00	1,000	0,006012	0,09	0,00256	0,00	1,000	0,006012	0,09000088	0,00229	0,00	1,000	0,006012	0,09000088	0,00211	0,00	1,000	0,006012	0,09000088	0,00194	0,00	1,000	0,006012	0,09000088	

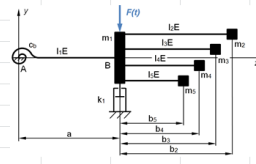


5-DoF hajlított tartó, rugalmas befogással - NUMERIKUS mego. – k1 csillapít. – V1:

5 mp-es időtartammal

Rugómerevségi mátrix elemeinek számítása:

a=	0,12	m	I1=	6E-11	m4
b2=	0,16	m	I2=	6E-11	m4
b3=	0,15	m	I3=	6E-11	m4
b4=	0,14	m	I4=	6E-11	m4
b5=	0,13	m	I5=	6E-11	m4
cb=	0,001	rad/Nm	E=	2,1E+11	Pa



$$c_{11} = c_b a^2 + \frac{a^3}{3 I_1 E}$$

$$c_{1i} = c_{i1} = c_b (a^2 + a b_i) + \frac{a^2 (2a + 3b_i)}{6 I_1 E}, \quad (i = 2 \dots 5)$$

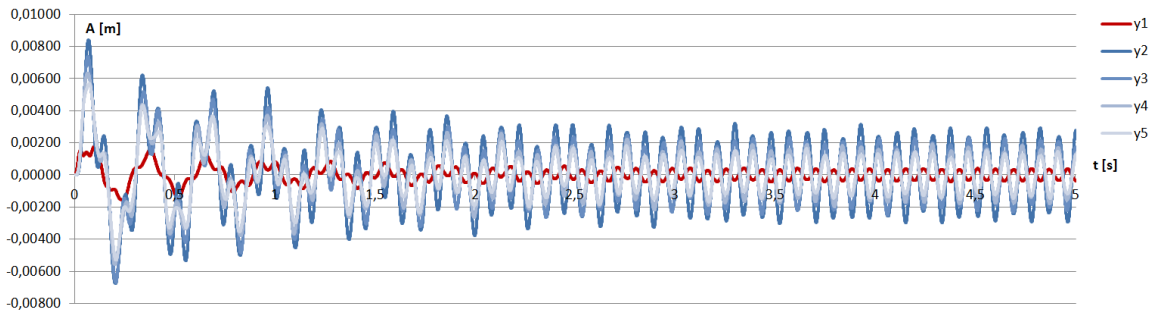
$$c_{ii} = c_b (a + b_i)^2 + \frac{a(a^2 + 3ab_i + 3b_i^2)}{3 I_1 E} + \frac{b_i^3}{3 I_1 E}, \quad (i = 2 \dots 5)$$

$$c_{ij} = c_{ji} = c_b [a^2 + a(b_i + b_j) + b_i b_j] + \frac{a[2a^2 + 3a(b_i + b_j) + 6b_i b_j]}{6 I_1 E}, \quad (i, j = 2 \dots 5, i \neq j)$$

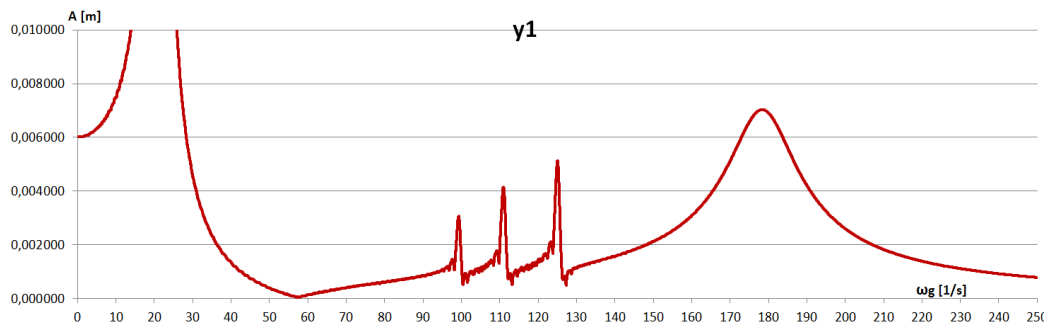
C=	6,011E-05	1,707E-04	1,638E-04	1,569E-04	1,500E-04
[m/N]	1,707E-04	6,591E-04	5,270E-04	5,033E-04	4,795E-04
	1,638E-04	5,270E-04	5,936E-04	4,816E-04	4,589E-04
	1,569E-04	5,033E-04	4,816E-04	5,326E-04	4,383E-04
	1,500E-04	4,795E-04	4,589E-04	4,383E-04	4,759E-04
C(-1)=	113 857	-6 304	-7 872	-9 956	-12 775
[m/N]	-6 304	7 712	-1 725	-1 980	-2 297
	-7 872	-1 725	9 237	-2 253	-2 613
	-9 956	-1 980	-2 253	11 189	-3 000
	-12 775	-2 297	-2 613	-3 000	13 726

ωg=	70	1/s	k1=	80	Ns/m	m1=	4	kg
Fo=	100	N	k2=	0	Ns/m	m2=	1	kg
			k3=	0	Ns/m	m3=	1	kg
			k4=	0	Ns/m	m4=	1	kg
			k5=	0	Ns/m	m5=	1	kg

		Max:	0,00040		0,00295		0,00229		0,00193		0,00149					
t [ms]	t [s]	y1''	y1'	y1	y2''	y2'	y2	y3''	y3'	y3	y4''	y4'	y4	y5''	y5'	y5
0	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,1	0,0001	0,17500	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,2	0,0002	0,34959	0,00002	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00002	0,00000	0,00000	0,00002	0,00000	0,00000
0,3	0,0003	0,52371	0,00005	0,00000	0,00004	0,00000	0,00000	0,00006	0,00000	0,00000	0,00007	0,00000	0,00000	0,00009	0,00000	0,00000
0,4	0,0004	0,69731	0,00010	0,00000	0,00011	0,00000	0,00000	0,00014	0,00000	0,00000	0,00017	0,00000	0,00000	0,00022	0,00000	0,00000
0,5	0,0005	0,87034	0,00017	0,00000	0,00022	0,00000	0,00000	0,00028	0,00000	0,00000	0,00035	0,00000	0,00000	0,00045	0,00000	0,00000



Maximum értékek az utolsó 1 másodpercben						
ωg	y1	y2	y3	y4	y5	
0,00	0,006019	0,017103	0,016409	0,015715	0,015022	5 mp-ig sűrűn
0,01	0,006019	0,017103	0,016409	0,015715	0,015022	javítva kézzel
0,02	0,006019	0,017103	0,016409	0,015715	0,015022	
0,03	0,006019	0,017103	0,016409	0,015715	0,015022	
0,04	0,006019	0,017103	0,016409	0,015715	0,015022	



5-DoF hajlított tartó, rugalmas befogással - NUMERIKUS mego. – k1 csillapítással –

V2: 10 mp-es időtartammal

Rugómerevségi mátrix elemeinek számítása: **2. verzió: 5 sec helyett 10 sec időtartam, és az utolsó 6 sec-ben véve a maximumot. És csak 0,1-es úg lépésben!**

a= 0,12 m	l1= 6E-11 m4
b2= 0,16 m	l2= 6E-11 m4
b3= 0,15 m	l3= 6E-11 m4
b4= 0,14 m	l4= 6E-11 m4
b5= 0,13 m	l5= 6E-11 m4

cb= 0,001 rad/Nm	E= 2.1E+11 Pa
-------------------------	----------------------

C= 6,011E-05	1,707E-04	1,638E-04	1,569E-04	1,500E-04	
[m/N]	1,707E-04	6,591E-04	5,270E-04	5,033E-04	4,795E-04
	1,638E-04	5,270E-04	5,936E-04	4,816E-04	4,589E-04
	1,569E-04	5,033E-04	4,816E-04	5,326E-04	4,383E-04
	1,500E-04	4,795E-04	4,589E-04	4,383E-04	4,759E-04

C(-1)= 113 857	-6 304	-7 872	-9 956	-12 775	
[m/N]	-6 304	7 712	-1 725	-1 980	-2 297
	-7 872	-1 725	9 237	-2 253	-2 613
	-9 956	-1 980	-2 253	11 189	-3 000
	-12 775	-2 297	-2 613	-3 000	13 726

ωg= 1	1/s	k1= 80	Ns/m	m1= 4	kg
Fo= 100	N	k2= 0	Ns/m	m2= 1	kg
		k3= 0	Ns/m	m3= 1	kg
		k4= 0	Ns/m	m4= 1	kg
		k5= 0	Ns/m	m5= 1	kg

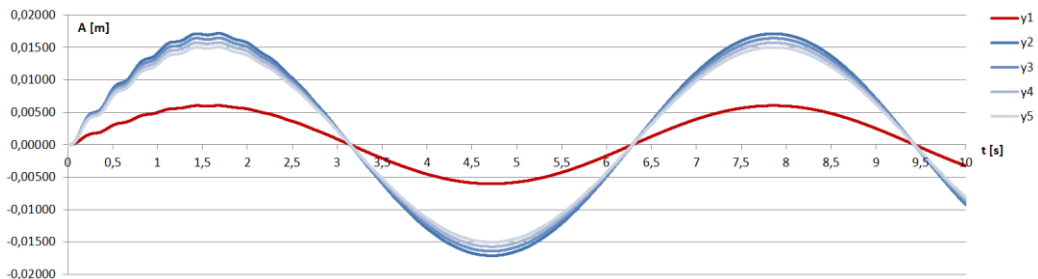
$$c_{11} = c_b a^2 + \frac{a^3}{3 I_1 E}$$

$$c_{i1} = c_{i2} = c_b (a^2 + a b_i) + \frac{a^2 (2a + 3b_i)}{6 I_1 E}, (i = 2 \dots 5)$$

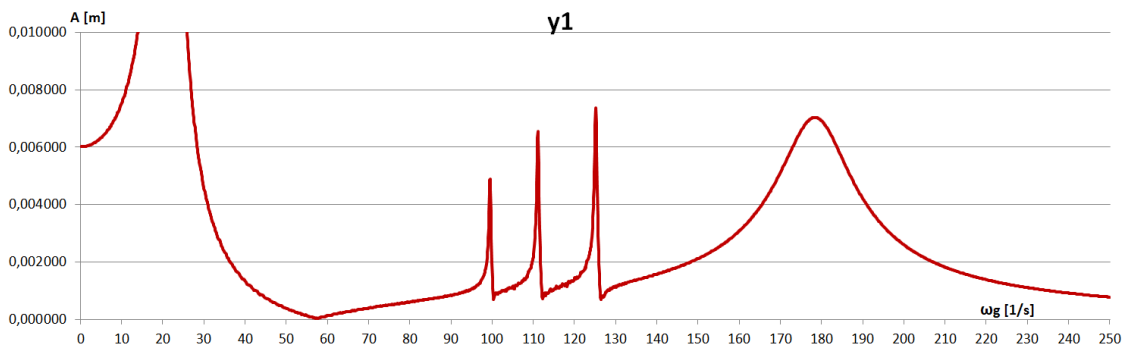
$$c_{ii} = c_b (a + b_i)^2 + \frac{a(a^2 + 3ab_i + 3b_i^2)}{3 I_1 E} + \frac{b_i^3}{3 I_1 E}, (i = 2 \dots 5)$$

$$c_{ij} = c_{ji} = c_b [a^2 + a(b_i + b_j) + b_i b_j] + \frac{a[2a^2 + 3a(b_i + b_j) + 6b_i b_j]}{6 I_1 E}, (i, j = 2 \dots 5, i \neq j)$$

t [ms]	t [s]	y1''	y1'	y1	y2''	y2'	y2	y3''	y3'	y3	y4''	y4'	y4	y5''	y5'	y5
0	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,1	0,0001	0,00250	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,2	0,0002	0,00499	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,3	0,0003	0,00748	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,4	0,0004	0,00996	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,5	0,0005	0,01244	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000
0,6	0,0006	0,01490	0,00000	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000
0,7	0,0007	0,01736	0,00001	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00002	0,00000	0,00000
0,8	0,0008	0,01980	0,00001	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00002	0,00000	0,00000	0,00002	0,00000	0,00000	0,00003	0,00000	0,00000



Maximum értékek az utolsó 1 másodpercben					
ωg	y1	y2	y3	y4	y5
0,0	0,006012	0,017076	0,016385	0,015693	0,015001
0,1	0,006012	0,017076	0,016385	0,015693	0,015001
0,2	0,006012	0,017076	0,016385	0,015693	0,015001
0,3	0,006012	0,017076	0,016385	0,015693	0,015001
0,4	0,006012	0,017076	0,016385	0,015693	0,015001
0,5	0,006012	0,017076	0,016385	0,015693	0,015001
0,6	0,006012	0,017076	0,016385	0,015693	0,015001
0,7	0,006012	0,017076	0,016385	0,015693	0,015001
0,8	0,006019	0,017099	0,016407	0,015714	0,015022
0,9	0,006021	0,017107	0,016412	0,015720	0,015027

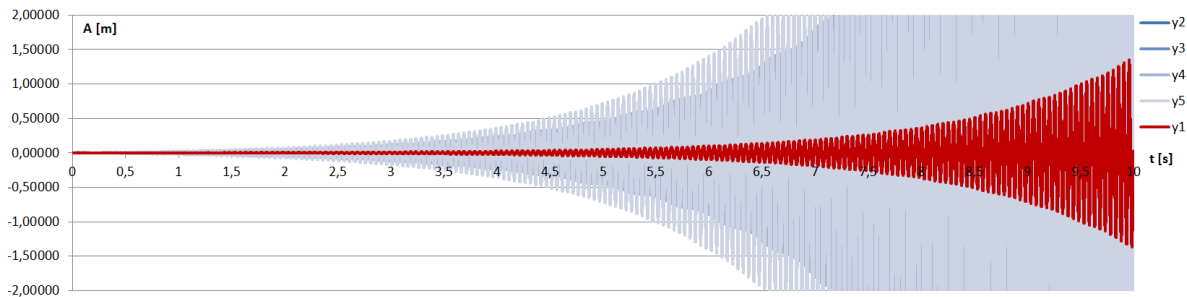


5-DoF hajlított tartó, rugalmas befogással - NUMERIKUS mego. – k1 csillapítással –

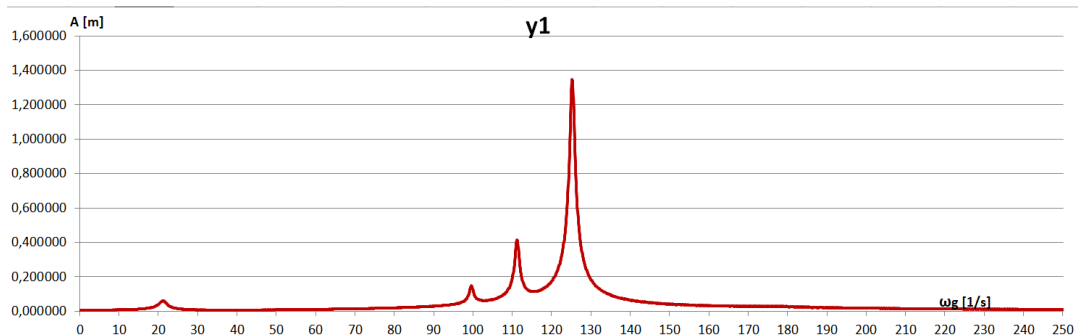
V3: a sebességeket is az előző sorból vettem, ez teljesen rossz eredményeket szült.

Rugómerevségi mátrix elemeinek számítása:					2. verzió: 5 sec helyett 10 sec időtartam, és az utolsó 6 sec-ben vége a maximumot. És csak 0,1-es ug lépésben!									
a=	0,12	m	I1=	6E-11	m4	3. verzió: a sebességek is az előző sorból véve, nem a saját idősorából.								
b2=	0,16	m	I2=	6E-11	m4									
b3=	0,15	m	I3=	6E-11	m4									
b4=	0,14	m	I4=	6E-11	m4									
b5=	0,13	m	I5=	6E-11	m4									
cb=	0,001	rad/Nm	E=	2,1E+11	Pa									
C=	6,011E-05	1,707E-04	1,638E-04	1,569E-04	1,500E-04									
[m/N]	1,707E-04	6,591E-04	5,270E-04	5,033E-04	4,795E-04									
	1,638E-04	5,270E-04	5,936E-04	4,816E-04	4,589E-04									
	1,569E-04	5,033E-04	4,816E-04	5,326E-04	4,383E-04									
	1,500E-04	4,795E-04	4,589E-04	4,383E-04	4,759E-04									
C(-1)=	113 857	-6 304	-7 872	-9 956	-12 775									
[m/N]	-6 304	7 712	-1 725	-1 980	-2 297									
	-7 872	-1 725	9 237	-2 253	-2 613									
	-9 956	-1 980	-2 253	11 189	-3 000									
	-12 775	-2 297	-2 613	-3 000	13 726									
						$\omega g=$	125,2	1/s	k1=	80	Ns/m	m1=	4	kg
						Fo=	100	N	k2=	0	Ns/m	m2=	1	kg
									k3=	0	Ns/m	m3=	1	kg
									k4=	0	Ns/m	m4=	1	kg
									k5=	0	Ns/m	m5=	1	kg

t [ms]	t [s]	y1''	y1'	y1	y2''	y2'	y2	y3''	y3'	y3	y4''	y4'	y4	y5''	y5'	y5
0	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,1	0,0001	0,31299	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,2	0,0002	0,62531	0,00003	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,3	0,0003	0,93681	0,00009	0,00000	0,00002	0,00000	0,00000	0,00002	0,00000	0,00000	0,00003	0,00000	0,00000	0,00004	0,00000	0,00000
0,4	0,0004	1,24737	0,00019	0,00000	0,00008	0,00000	0,00000	0,00010	0,00000	0,00000	0,00012	0,00000	0,00000	0,00016	0,00000	0,00000
0,5	0,0005	1,55684	0,00031	0,00000	0,00020	0,00000	0,00000	0,00025	0,00000	0,00000	0,00031	0,00000	0,00000	0,00040	0,00000	0,00000



Maximum értékek az utolsó 1 másodpercben						
ωg	y1	y2	y3	y4	y5	
0,0	0,006012	0,017074	0,016395	0,015691	0,015013	0,8 mp-ig
0,1	0,006012	0,017074	0,016395	0,015691	0,015013	javítva kézzel
0,2	0,006012	0,017074	0,016395	0,015691	0,015013	
0,3	0,006012	0,017074	0,016395	0,015691	0,015013	
0,4	0,006012	0,017074	0,016395	0,015691	0,015013	
0,5	0,006012	0,017074	0,016395	0,015691	0,015013	
0,6	0,006012	0,017074	0,016395	0,015691	0,015013	
0,7	0,006012	0,017074	0,016395	0,015691	0,015013	
0,8	0,006128	0,017518	0,017026	0,016631	0,016311	



5-DoF translációs modell, rug. befogással - NUMERIKUS mego. – csillapítással- Új adatokkal az analitikus számítás eredményei alapján

5-DoF translációs modell NUMERIKUS számítás. Adatok az analitikus alapján átírva. V1 új makróval 10 mp-ig
Maximumok 4 mp - 10 mp-ig véve (nem képes 66 ezer sornál többet a Word 2003-as, de a makrók változtat igen)

s1= 16635	N/m	k1= 80	Ns/m	m1= 4	kg
s2= 9229	N/m	k2= 0,001	Ns/m	m2= 1	kg
s3= 11200	N/m	k3= 0,001	Ns/m	m3= 1	kg
s4= 13776	N/m	k4= 0,001	Ns/m	m4= 1	kg
s5= 17205	N/m	k5= 0,001	Ns/m	m5= 1	kg
				ωg1= 90	1/s
				Fg1= 100	N

Max= 0,0008079

0,0071532

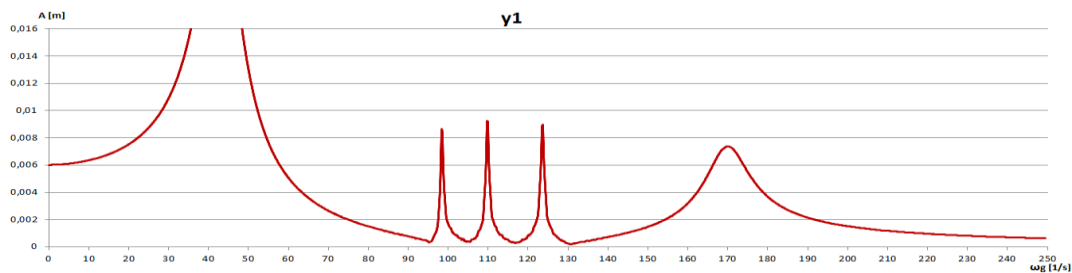
0,0037360

0,0022955

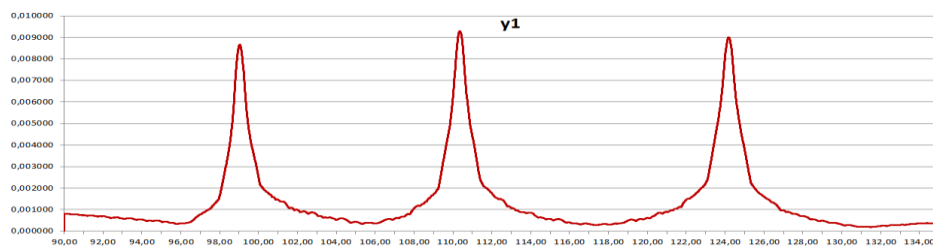
0,0017043

t	x1''	x1'	x1	x2''	x2'	x2	x3''	x3'	x3	x4''	x4'	x4	x5''	x5'	x5
0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,0001	0,224987	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,0002	0,448487	0,000022	0,000000	0,000021	0,000000	0,000000	0,000025	0,000000	0,000000	0,0000310	0,000000	0,000000	0,0000387	0,000000	0,000000
0,0003	0,673416	0,000067	0,000000	0,000083	0,000000	0,000000	0,000101	0,000000	0,000000	0,0001240	0,000000	0,000000	0,0001548	0,000000	0,000000
0,0004	0,896727	0,000135	0,000000	0,000208	0,000000	0,000000	0,000252	0,000000	0,000000	0,0003087	0,000000	0,000000	0,0003868	0,000000	0,000000

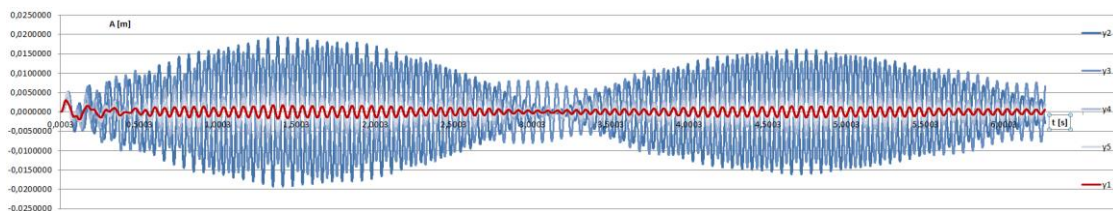
Maximum értékek az utolsó 6 másodpercben						Maximum értékek az utolsó 6 másodpercben						
ωg	y1	y2	y3	y4	y5	ωg	y1	y2	y3	y4	y5	
0	0,0060117	0,0060123	0,0060124	0,0060121	0,0060119		90,00	0,000808	0,007149	0,003736	0,002296	0,001699
0,1	0,0060117	0,0060123	0,0060124	0,0060121	0,0060119	Kézzel beírt 0,7 mp-ig	90,01	0,000808	0,007149	0,003732	0,002296	0,001699
0,2	0,0060117	0,0060123	0,0060124	0,0060121	0,0060119		90,02	0,000807	0,007143	0,003727	0,002295	0,001693
0,3	0,0060117	0,0060123	0,0060124	0,0060121	0,0060119		90,03	0,000806	0,007133	0,003720	0,002293	0,001685
0,4	0,0060117	0,0060123	0,0060124	0,0060121	0,0060119		90,04	0,000805	0,007120	0,003711	0,002290	0,001677
0,5	0,0060117	0,0060123	0,0060124	0,0060121	0,0060119		90,05	0,000804	0,007105	0,003700	0,002285	0,001668
0,6	0,0060117	0,0060123	0,0060124	0,0060121	0,0060119		90,06	0,000802	0,007086	0,003687	0,002280	0,001659
0,7	0,0060117	0,0060123	0,0060124	0,0060121	0,0060119		90,07	0,000800	0,007065	0,003673	0,002274	0,001674
0,8	0,0060133	0,0060134	0,0060145	0,006014	0,0060135		90,08	0,000797	0,007049	0,003657	0,002266	0,001689



A fenti ábra 0,1 1/s-os lépésekkel készült, míg az alábbi 0,01 1/s-osokkal 90-135 1/s között.



Egy általános lebegés kép (csak 6 mp-ig): Gerjesztő frekvencia ωg=101 1/s



TRANZLÁCIÓS és HAJLÍTOTT TARTÓS – analitikus megoldás - Új adatokkal (új Inventoros 3D szilárdtest modell alapján) – 2020.11.15 – v1:

Rugóerevségi mátrix elemeinek számítása: **TRANZLÁCIÓS ANALITIKUS:**

a = 0,12 m	l1 = 6,75E-11 m4
b2 = 0,19 m	l2 = 2,25E-11 m4
b3 = 0,165 m	l3 = 2,25E-11 m4
b4 = 0,14 m	l4 = 2,25E-11 m4
b5 = 0,115 m	l5 = 2,25E-11 m4
cb = 0,001 rad/Nm	E = 2,1E+11 Pa

$$c_{11} = c_6 a^2 + \frac{a^3}{3 I_1 E}$$

$$c_{i1} = c_{i1} = c_3 (a^2 + ab_i) + \frac{a^2(2a + 3b_i)}{6 I_1 E} \quad (i = 2 \dots 5)$$

$$c_{ii} = c_3 (a + b_i)^2 + \frac{a(a^2 + 3ab_i + 3b_i^2)}{3 I_1 E} + \frac{b_i^3}{3 I_1 E} \quad (i = 2 \dots 5)$$

$$c_{ij} = c_{ji} = c_3 [a^2 + a(b_i + b_j) + b_i b_j] + \frac{a[2a^2 + 3a(b_i + b_j) + 6b_i b_j]}{6 I_1 E} \quad (i, j = 2 \dots 5, i \neq j)$$

Ebből visszafelé számoljuk a rugóerevségeket a translációs modellhez:

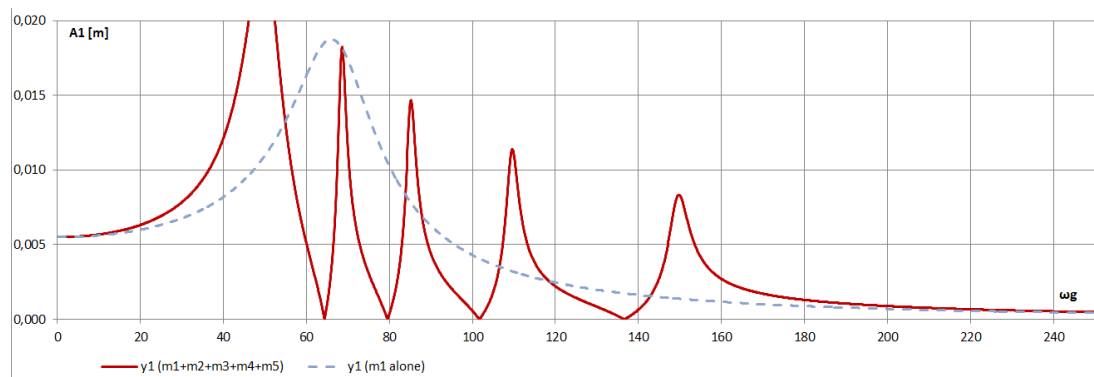
Számított értékek:

s1 = 18170 N/m	m1 = 4 kg	s1 = 18170 N/m	$(=1/c_{11})$
s2 = 2067 N/m	m2 = 0,5 kg	s2 = 2067 N/m	$(=3 \cdot l_2 \cdot E / (b_2)^3)$
s3 = 3156 N/m	m3 = 0,5 kg	s3 = 3156 N/m	$(=3 \cdot l_3 \cdot E / (b_3)^4)$
s4 = 5166 N/m	m4 = 0,5 kg	s4 = 5166 N/m	$(=3 \cdot l_4 \cdot E / (b_4)^5)$
s5 = 9320 N/m	m5 = 0,5 kg	s5 = 9320 N/m	$(=3 \cdot l_5 \cdot E / (b_5)^6)$

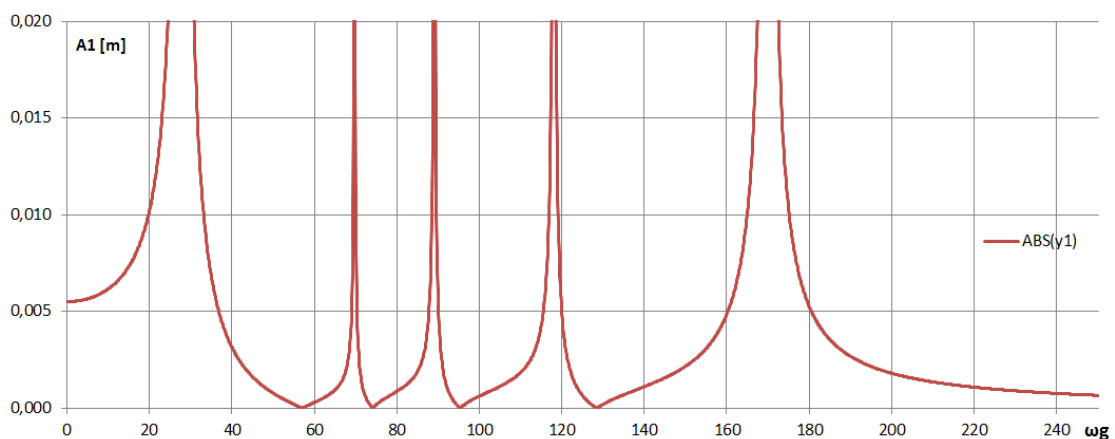
ωg = 101 1/s	k1 = 80 Ns/m	m1 = 4 kg
Fo = 100 N	k2 = 0,001 Ns/m	m2 = 0,5 kg
	k3 = 0,001 Ns/m	m3 = 0,5 kg
	k4 = 0,001 Ns/m	m4 = 0,5 kg
	k5 = 0,001 Ns/m	m5 = 0,5 kg

5-szabadságfokú rdsz m1 tömegre ható erők (1. tömeghez van csatolva a 2-5. tömeg)				Masses:				
Beviteli adatok:	Számított adatok:	Saját frekvencia: $\omega_1 = 67,3986$ 1/s		$\omega = \sqrt{s/m}$				
$F_0 = 100$ N		Fajlagos csillapítási tényező: $\beta_1 = 10$ 1/s		$\beta = k/2m$				
$s_1 = 18170$ N/m		Kritikus csillapítási tényező: $k_{cr} = 539,189$ Ns/m		$k_{cr} = 2\sqrt{ms} = 2m\omega$				
$m_1 = 4$ kg		Csillapítási viszonyszám: D1= 0,14837		$D = R/k_{cr}$				
k1= 80 Ns/m		Statikus rugó megnyúlás: $x_{st} = 0,0055$ m		$x_{st} = F_0/s$				
		$\omega_2 = 64,2904003$ 1/s	$\omega_3 = 79,44208$ 1/s	$\omega_4 = 101,6446$ 1/s	$\omega_5 = 136,5305$ 1/s			
$s_2 = 2067$ N/m	$\beta_2 = 0,001$ 1/s	$s_3 = 3156$ N/m	$\beta_3 = 0,001$ 1/s	$s_4 = 5166$ N/m	$\beta_4 = 0,001$ 1/s	$s_5 = 9320$ N/m	$\beta_5 = 0,001$ 1/s	
$m_2 = 0,5$ kg	$k_2 = 64,2904003$ Ns/m	$m_3 = 0,5$ kg	$k_{cr} = 79,44208$ Ns/m	$m_4 = 0,5$ kg	$k_{cr} = 101,6446$ Ns/m	$m_5 = 0,5$ kg	$k_{cr} = 136,5305$ Ns/m	
k2= 0,001 Ns/m	D2= 1,5554E-05	k3= 0,001 Ns/m	D3= 1,26E-05	k4= 0,001 Ns/m	D4= 9,84E-06	k5= 0,001 Ns/m	D5= 7,32E-06	

Transzlációs modell analitikus megoldással (csillapításokkal a táblázatból):

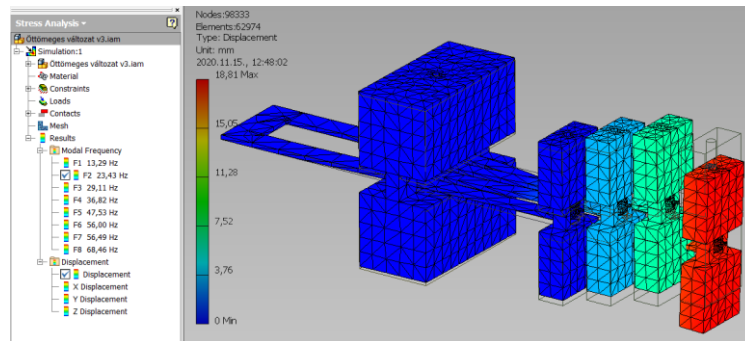
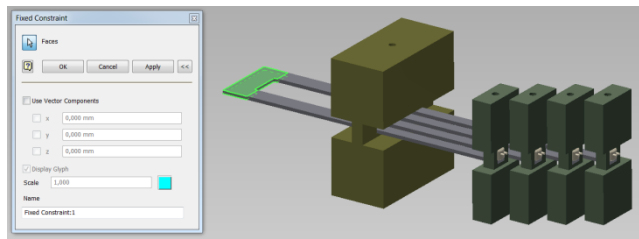


Hajlított tartós analitikus megoldás (nincs semmilyen csillapítás):

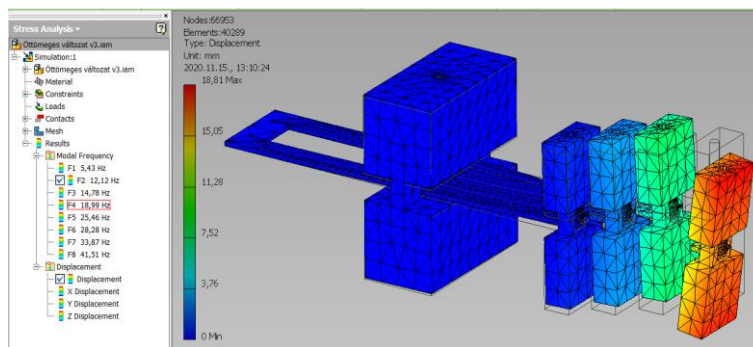


Ezekkel az adatokkal az Inventoros 3D modell (csillapítás csak az anyagi), és a saját frekvencia-analízis eredményei:

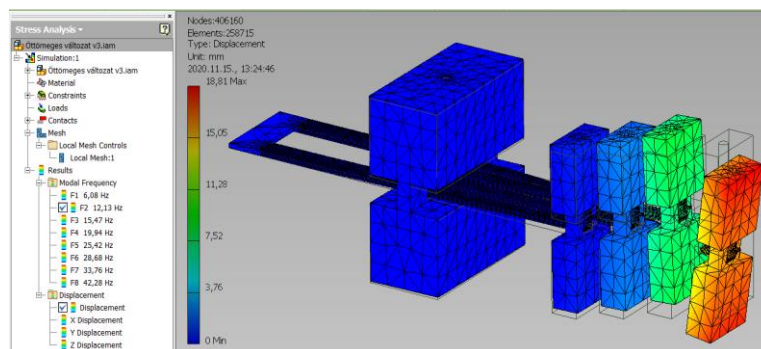
A befogás kényszer
felhelyezése:



Finomítva a hálót az Average Element Size értékét 0,08-ról 0,02-re változtatva és megengedve az íves elemeket, a számítás kevés memóriára hivatkozva leállt. Ezután 0,1-et beállítva és csak a rugó alsó és felső vízszintes síkjára 5mm-es Local Mesh Control-t alkalmazva:



Akkor nézzünk egy még finomabb hálót a laprugóra Local Mesh Control-t: 1 mm.



KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönöm mindkét témavezetőmnek, Dr. Cveticanin Livia professzor asszonynak és Dr. Bíró István dékán úrnak a rengeteg időt és energiát, amit nekem szenteltek. Soha nem múló hálával tartozom nekik azért, hogy mindig volt rám idejük, mindig megkaptam a kért segítséget, ami nélkül ez a rendkívül összetett kutatás idáig sem jutott volna el.

Köszönöm feleségemnek és szüleimnek a megértést, türelmet és segítséget, amit az elmúlt öt év során számomra biztosítottak.