Mérnöki Szimpózium a Bánkiban
(ESB 2022)
http://bgk.uni-obuda.hu/esb/

A számtani-mértani közép Thalész tételes geometriai értelmezésének kiterjesztése

An extension of Thales' theorem-based geometric interpretation of the arithmetic-geometric means

[1,2,3] Emőke Imre, [3]Delphin Kabey

[1] *Óbuda University, Bánki Donát Faculty of Mechanical and Safety Engineering,*
[2] *Óbuda University, Hydro-Bio-Mechanical Systems Research Center, imre.emoke@uni-obuda.hu*
[3] *Óbuda University, AIAM Doctoral School, Budapest, Hungary, delphinsrc@gmail.com*

Összefoglalás

A számtani-mértani közép egy geometriai szemléltetése N=2 esetén a Thalész kör. Az egységoldalú szimplexet tartalmazó hipersík fölé rajzolt gömb átmérője 1, sugara ½. A pont feletti magasság azonos a mértani középpel (magasságtétel). Ha N>2, ez nem igaz a gömbre, de van egy konkáv felület, amelyre igaz. Az *N* cellával rendelkező diszkrét eloszlás az N dimenziós euklideszi tér *N*-1 dimenziós szimplexében ábrázolható. Az egyes szimplex pontok baricentrikus koordinátáinak súlyozott általánosított geometriai átlaga, ahol a súlyok megegyeznek a baricentrikus koordinátákkal, logaritmikus alakban írva az entrópia átlaggal azonos. Ennek szép tulajdonságai vannak, szigorúan konkáv, szimmetrikus függvény, magassága kisebb vagy egyenlő, mint a számtani közép. Az entrópia átlag fizikai tartalma az információs entrópia és az osztályozó entrópia példáján mutatható be.

Kulcs szavak: Entrópia közép, számtani közép, mértani közép

Abstract

A geometrical representation of the arithmetic-geometric mean for *N*=2 is the Thales circle. The diameter of the sphere drawn above the hyperplane containing the unit-sided simplex is 1, and its radius is ½. The height above the point is the same as the geometric mean of the two barycentric coordinates (height theorem). If *N*>2, this is not true for the sphere, but there is a concave surface of the arithmetic mean weighted logarithmically with itself, which can be used instead of the sphere. The discrete distribution with *N* cells can be represented in an *N*-1 dimensional simplex of the N-dimensional Euclidean space. The weighted generalized geometrical mean of the barycentre coordinates of each simplex point, where the weights are equal to the barycentre coordinates, is used to derive the entropy mean, which is a strictly concave, symmetric function. The compact surface drawn above the hyperplane containing the unit-sided simplex is less than or equal to the arithmetic mean.

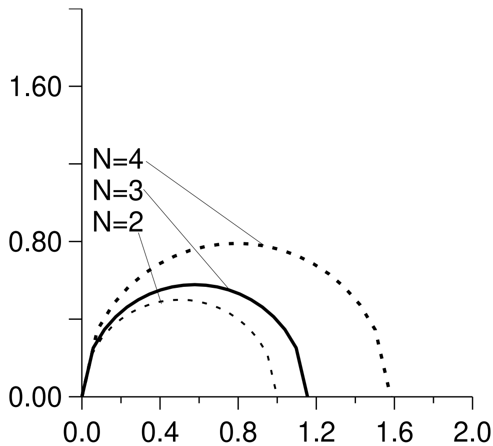
Keywords: arithmetic-geometric mean, entropy mean

1. Bevezetés

Matematikai tanulmányai során mindenki találkozik a számtani és a mértani közép fogalmával. A két közép között fennálló egyenlőtlenséghasznos eszköz, például egyszerű szélsőérték-feladatok megoldásában. A számtani-mértani közép egy geometriai szemléltetése N=2 esetén a Thalész kör. Az egységoldalú szimplexet tartalmazó hipersík fölé rajzolt gömb átmérője 1, sugara ½. A pont feletti magasság azonos a két baricentrikus koordináta mértani középével (magasságtétel). Bizonyára kevesen gondolnák, hogy ha N>2, akkor ez nem igaz.

Az egységoldalú szimplexet tartalmazó hipersík fölé rajzolt gömb hipersík feletti magassága nem is fejezhető ki a baricentrikus koordináták mértani közepének függvényeként. Jelölje O az alaplap köré írható gömb középpontját. Ekkor a kérdéses magasság (mint az alaplap hipersíkját befutó pont függvénye) az O körüli gömbfelületeken konstans, viszont a baricentrikus koordináták szorzata nem az. (Ez látható például a beírt kör esetén, amikor az érintési pontokban a baricentrikus koordináták mértani közepe zérus.)

Az egységoldalú szimplex köré írt, és e sugárral a szimplexet tartalmazó hipersík fölé rajzolt gömb átmérője N-el nő, és a számtani közép (1/N) N-el csökken. A szimplexet magában foglaló hipersík feletti magasságra nem igaz, hogy azonos lenne a mértani középpel. A bemutatásra kerülő súlyozott logaritmikus közép grafikonjának pontjai N>2 esetén egy gömbhöz hasonló, szimmetrikus felület mentén helyezkednek el.



1. ábra A köréírt körök 2D síkra vetített képe

2. Az “entrópia” közép

A p_i (i=1..N) nem negatív valós, számok általánosított súlyozott geometriai közepe abban az esetben, ha a pozitív w_i súlyok összege 1 :

$$M_0 = \coprod p_i^{w_i} \tag{1}$$

Tekintsük azt a speciális esetet, amikor az p_i valós számok az egységoldalú szimplex pontok koordinátái, és a szám és a hozzá rendelt súly megegyezik:

$$M_0 = \coprod x_i^{x_i} \tag{2}$$

Ezt logaritmikus alakban átírva, és az N elemszámmal és ln N-el osztva:

$$B_p = -\frac{1}{N\ln N}\sum_{i=1}^{N} x_i \ln x_i \le \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{1}{N} \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1;\, x_i \ge 0 \tag{4}$$

ahol x_i az egységoldalú szimplex egy pontjának i-edik baricentrikus koordinátája, i=1..N. Egyszerű helyettesítéssel adódik, hogy ez a súlyozott „entrópia közép” a szimplex súlypontjában , ahol maximális, egyenlő a számtani átlaggal, grafikonja pedig szigorúan konkáv.

3. Tárgyalás

A javasolt entrópia átlag egyik alkalmazása, a diszkrét eloszlásokhoz rendelt statisztikus entrópia [3]. A kapcsolat a fenti átlaggal úgy nyerhető, hogy a baricentrikus koordinátákhoz egy véges, diszkrét eloszlásfüggvény x_i relatív gyakoriságát rendeljük, és definíció szerint az átlag egy fajlagos entrópiát jelöl, de középnek ezt eddig kevéssé tekintették.

Ilyen az információelméleti entrópia. Egy további alkalmazás a szemeloszlás ún. normalizált szemeloszlási entrópia növekménye B ([1] Lőrincz et al, 2005):

$$B := \frac{\Delta S}{\ln N}. \tag{5}$$

vagy ∟S a szemeloszlási entrópia növekménye:

$$\Delta S = -\frac{1}{\ln 2}\sum_{i=1}^{N} x_i \ln x_i \tag{6}$$

Ennek a szimmetrikus függvénynek egy alkalmasan választott, két-dimenziós síkra vetített képe nyerhető a következőképpen. Rendeljünk az x_i relatív gyakoriságú cellához/baricentrikus koordinátához egy i-1 integer számot és ehhez egy átlagot:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i (i-1)}{N-1}. \tag{7}$$

Az A számot relatív alap-entrópiának hívjuk a szemeloszlás entrópia témakörében, ahol konkrét fizikai jelentése van.

Definiáljunk egy 2 dimenziós képsíkot a szimplex és a grafikon által generál N-dimenziós Euklideszi térben a B tengely és az egységoldalú szimplex 1 és N jelű csúcsai közötti éllel, és egy vetítő irányt két sík metszeteként az A= állandó, B = állandó feltétellel.

A B grafikonjának képén a felső határvonal szimmetria pontja N-től független, a többi pont kis N-ekre (N<20) N-től kevéssé függ, és kb. azonos egy ellipszissel (közelítően egy, az átmérőre merőleges irányban kétszeresre nyújtott félkörrel). A kép felső határvonalának ősképét az „a” vonal alkotja a szimplexben (2-3 ábra).

Kereshetjük a közép maximumát az egységoldalú szimplex fenti síkmetszetein, ahol A= állandó. A B szigorúan konkáv és szimmetrikus jelleg miatt az A (relatív alap-entrópia) rögzített értékéhez tartozó sík és a szimplex metszetén egyetlen (átlagos vagy optimális) pontot jelöl ki a *B* maximuma. Ez a következő:

$$x_1 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} a^{j-1}} = \frac{1-a}{1-a^N}, \tag{8}$$

ahol az *a* paraméter a következő *y* polinom gyöke:

$$y = \sum_{j=1}^{N} a^{j-1}[j-1-A(N-1)], \qquad 0 \le A \le 1 \tag{9}$$

A maximális entrópia átlaghoz minden síkmetszeten a diszkrét (empirikus) szemcse-eloszlásfüggvények görbe alatti területe egyforma, és az optimális ezek között átlagos eloszlású.

Levezethető, hogy az adott *A* koordinátájú szemeloszlási görbe-halmaz esetén a maximális *B* értékkel jellemezhető ún. optimális szemeloszlási görbék véges fraktál eloszlásúak, mivel a frakciók relatív gyakorisága az alábbi összefüggéssekkel számolható:

$$x_1 = \frac{(2^{(3-n)}-1)d_{\min}{}^{(3-n)}}{d_{\max}{}^{(3-n)} - d_{\min}{}^{(3-n)}}, \tag{10}$$

$$a = 2^{(3-n)} \tag{11}$$

ahol *n* fraktál dimenzió. Az optimális szemeloszlási görbe szemi-log ábrázolásban konkáv, ha *A<0.5*, lineáris ha A=0.5, konvex ha A>0.5. Egy *A* adott relatív alapentrópia esetén, szemi-logaritmikus ábrázolásban az optimális szemeloszlási görbe átlagos helyzetű, mert az *A*=állandó görbék – melyek görbe alatti területe azonos – minden esetben átmetszik. Az *y* polinom és a diagram felső határvonala szimmetrikus a következő értelemben. Ha a^* egy A^* -hoz tartozó pozitív gyöke *y*-nak, akkor $a=1/a^*$ az a gyök, ami $A = 1-A^*$ -hoz tartozik. A szimmetria-tengelyben – ahol *B* maximuma van - $A = 0.5$, $a=1$ és $x_i = 1/N$, következésképpen $B=1/\ln 2$ ($\Delta S = \ln N/\ln 2$), azaz *B* értéke nem függ a frakciószámtól.

Az egy metszethez tartozó maximális entrópia ún. „a” vonalra esik, amely feltehetően kapcsolatba hozható a metszetek súlypontjával, ez a kérdés további vizsgálatot igényel.

A diagram felső határvonalának pontjai (azaz a maximális *B* érték) függenek a frakciószámtól (*N*-től) a szimmetria pont kivételével. Az *A* koordináta definíciója és a Lőrincz-féle megoldás alapján a diagram felső határvonalán *B, a, A* és *N* kapcsolatára a következő képletek érvényesek:

$$A = \frac{1-a}{1-a^N} \frac{\sum_{i=1}^{N} a^{i-1}(i-1)}{N-1}. \tag{12}$$

$$B = -\frac{1}{\ln N \ln 2}\left[\ln x_1 + \ln a^{A(N-1)}\right] \tag{13}$$

A normalizált diagram felső határvonala kis *N* értékekre csak kissé függ *N*-től, így közelítően meghatározható a két frakció esetén érvényes képlettel:

$$B = -\frac{1}{\ln 2 \ln 2}(A \ln A + (1-A)\ln(1-A)). \tag{14}$$

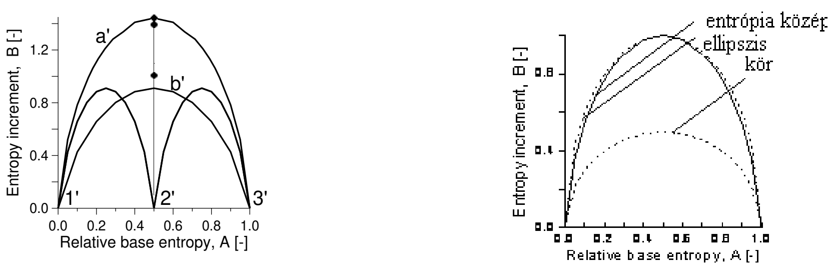
4. Konklúzió

A számtani-mértani közép egy geometriai szemléltetése N=2 esetén a Thalész kör. Ha N>2, akkor ez nem igaz. Egyfelől az egységoldalú szimplex köré írt gömb sugara N-el nő, másfelől és a számtani közép (1/N) N-el csökken. Ha a mértani közép helyett vesszük az egységoldalú szimplex baricentrikus koordinátáinak általánosított súlyozott geometriai közepét és ennek logaritmusát egy megfelelő együtthatóval (B_p), amit entrópia középnek nevezünk, akkor az egyenlőtlenség teljesül.

A geometriai jelentés is közelítően reprodukálható az N>2 esetre. A B_p közép ugyanis egy, az egységoldalú szimplexet tartalmazó sík fölé rajzolt szigorúan konkáv, szimmetrikus, kompakt felület. Megemlíthető, hogy míg a számtani vagy mértani közepek definíciója alapján a szimmetria és a pozitív homogenitás fennáll [4], az entrópia közép esetén csak a szimmetria teljesül.

A javasolt entrópia átlag egyik alkalmazása a diszkrét eloszlásokhoz rendelt statisztikus entrópia, ezekre osztályozás és osztályonként egy átlagos, fraktál eloszlás adható.

2. ábra Az entrópiafüggvény szimplex (N=3) feletti grafikonja, az A-B síkra vetített kép. Két szintvonal, valamint a B felső határvonal ősképe a szimplexben (az „a” vonal a B felső határvonal ősképe).



3. ábra A B gráfja a kétdimenziós szimplex (N=3) felett, 2D síkra vetített nyert kép.

5. Hivatkozások

[1] Lőrincz, J; Imre, E; Gálos, M; Trang, Q.P; Telekes, G; Rajkai, K; Fityus, I. (2005). Grading entropy variation due to soil crushing. Int. Journ. of Geomechanics. Vol 5. Number 4. p. 311-320.

[2] Imre, E; Lőrincz, J; Trang, Q.P; Fityus, S. Pusztai, J; Telekes, G; Schanz, T. (2009). Some dry density transfer function for sands. Invited paper. KSCE Journal of Civil Engineering 13(4):257-272. DOI 10.1007/s12205-009-0257-7
[3] Korn G. A. and Korn T. M. (1975). „Mathematical Handbook for Scientists and Engineers" 2nd. Edition, McGraw-Hill Book Company.
[4] Ádám, B. (2009). A számtani-mértani közép és egyéb érdekességek.

6. Melléklet – Szemeloszlási entrópia

Legyen *n* egymással egyenlő szélességű statisztikai cella, legyen M_i az elemek száma az i-edik cellában és legyen *M* az összes elemek száma. Ekkor az entrópia:

$$a_i = \frac{M_i}{M}, \quad \sum_i a_i = 1 \tag{15}$$

$$S = -\sum_i a_i . \log_b a_i \tag{16}$$

ahol a_i a cellák gyakorisága, *S* az egy elemre jutó, fajlagos entrópia.
A szemeloszlási entrópia a diszkrét valószínűségi eloszlásfüggvényre ismert entrópia képlet alkalmazása a szemeloszlási görbére. A szemeloszlási görbe diszkrét eloszlásfüggvény, a cellák mérete nem azonos.

$$2^{k+1} d_0 \geq d > 2^k \tag{17}$$

Az alkalmazás úgy történik, hogy két statisztikus cella rendszert veszünk fel, az egyik a másik finomítása. A d_0 szélességű, finomabb – ún. elemi – cella rendszer csak a levezetésben játszik szerepet, mérete nem lehet nagyobb, mint a problémában szereplő minimális szemcseméret. A szemeloszlási entrópia definiálása során feltesszük, hogy az egy frakción belüli eloszlás egyenletes, az egyes frakciókban lévő elemi cellák relatív gyakorisága azonos. A szemeloszlási entrópia *S* két tag összege, ez a két entrópia koordináta:

$$S = S_0 + \Delta S, \tag{18}$$

$$S_0 = \sum_{x_i \neq 0} x_i S_{0i}, \tag{19}$$

$$S_0 = \sum_{x_i \neq 0} x_i S_{0i}, \tag{20}$$

1.táblázat Az i-dik frakció és annak saját entrópiája

frakció	1	...	23	24
terjedelem	d_0 - 2 d_0	...	$2^{22} d_0 - 2^{23} d_0$	$2^{23} d_0 - 2^{24} d_0$
S_0 [-]	1	...	22	23