

# A kreativitás fejlesztése I/A. (átkelés a hídon) Improving creativity I/A. (Bridge and torch problem)

**Kiss László**

főiskolai docens

Óbudai Egyetem, Rejtő Sándor Könnyűipari és Környezetmérnöki Kar,  
Médiatechnológiai és Könnyűipari Intézet (ÓE RKK MKI)  
kiss.laszlo@rkk.uni-obuda.hu

***Kivonat:** Ez a cikk, ahogy a címéből is látható, [1]-nek egyfajta kiegészítése. Itt most az alcímekben szereplő probléma [1]-ben tárgyalt általánosítását vizsgáljuk, és adunk egy bizonyítást arra, hogy az átkelési problémának az ott leírt algoritmus a valóban optimális.*

***Abstract:** This paper, as shown by the title, is an extension of sorts to [1]. It deals with a generalization of the problem in the subtitle presented in [1] and demonstrates that the algorithm proposed there is indeed the optimal algorithm.*

***Kulcsszavak/Keywords:** Logikai feladatok, algoritmusok, Logic puzzle, algorithms*

## A probléma megfogalmazása

Egy híd egyik oldaláról a másikra  $n$  ember szeretne átjutni. Az egyes emberek rendre  $t_1, t_2, \dots, t_n$  perc alatt képesek egyedül átkelni. Egyszerre legfeljebb csak ketten tudnak átmenni, mert a híd nagyobb terhet nem bír el. Az átkelési idő – két átkelő esetén – természetesen a két átkelő egyéni átkelési ideje közül a nagyobbik. Sötét éjszaka van, ezért szükségük van egy világító eszközre is. Mivel csak egyetlen lámpásuk van, valakinek azt vissza kell hoznia mindaddig, amíg mindenki át nem kelt a hídon. Legkevesebb mennyi idő alatt tudnak átjutni mindnyájan a túloldalra?

## Elnevezések, jelölések

Az átkelés a hídon a bal partról a jobb partra történjen, azaz nevezzük bal partnak azt, ahonnan, és jobb partnak azt, ahová át kell kelni.

Rögzítsük az embereknek egy olyan sorrendjét, amelyben az átkelési idő nem csökken, és indexeljük őket eszerint. Jelölje  $t_1, t_2, \dots, t_n$  rendre az 1, 2, ..., n indexű ember átkelési idejét. Ekkor tehát  $t_i \leq t_j$ , ha  $i < j$ .

Nevezzük **p**-t gyorsabbnak, mint **q**-t, illetve **q**-t lassabbnak, mint **p**-t, ha **p** indexe kisebb, mint **q**-é. Jelöljük ezt úgy, hogy **p**<**q**. Legyen **L** a leglassúbb, akinek tehát átkelési ideje:  $t_n$  és **I** a második leglassúbb (ha  $n > 1$ ), akinek átkelési ideje:  $t_{n-1}$ .

Ha **p** egyedül megy át, azt jelölje **p**>, Ha **p** **q**-val együtt megy át, azt jelölje **p&q**>, végül, ha nem biztos, de lehetséges, hogy **q** **p**-vel tart, de **p** biztosan átmegy, azt jelölje **p(&q)**>. Visszajövetelek esetén, hasonlóképpen, használjuk a **p**<, **p&q**<, vagy **p(&q)**< jelöléseket.

Egy átkelési stratégiát optimálisnak, azaz optimális megoldásnak nevezünk, ha az átkelés ideje minimális. Jelölje  $n$  átkelő esetén ezt az időt  $T_n$ .

## A bizonyítás

Az  $n=1$  és  $n=2$  eset triviális, az átkelési idők rendre:  $T_1=t_1, T_2=t_2$ . A továbbiakban csupán az  $n > 2$  eseteket vizsgáljuk.

Először azt bizonyítjuk, hogy ha egy megoldás optimális, akkor mindig pontosan ketten mennek át, és pontosan egyvalaki jön vissza. Ezen belül belátjuk, hogy a leglassúbb, **L**, csak egyszer megy át, azaz nem jön vissza. Ezt követően két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a leglassúbb párja (akivel együtt ment át) visszajön, vagy nem. Ha nem jön vissza, akkor igazoljuk, hogy a két leglassúbb együtt megy át, és őket a két leggyorsabb segíti az átkelésben (juttatja át). Ezt a fajta útsorozatot úgy is nevezzük, hogy kettő juttat át kettőt. Ha a leglassúbb párja visszajön, akkor ő a leggyorsabb. Ezt az útsorozatot (útpárt) másként úgy hívjuk, hogy egy juttat át egyet. Végül megállapítjuk, hogy az optimális megoldás lehet olyan, hogy a két átkelési mód nem keveredik, hanem előbbi átkeléseket – ha vannak ilyenek, és ekkor nyilván  $n > 3$  – utóbbi típusúak követik (feltéve, hogy vannak ilyenek).

Alábbiakban megállapításaink mindig optimális megoldásra vonatkoznak.

**1. állítás.** Ha ketten jönnek vissza, akkor feltehető, hogy azt megelőzően legutóbb mindegyikük egyedül ment át.

Bizonyítás: Ha a két visszajövő közül pontosan az egyik a visszajövetelt megelőzően legutóbb nem egyedül ment át, akkor ő az oda és vissza útjából is elhagyható, és az átkelés ideje ettől biztosan nem nő. Így az összes ilyen páros visszajövetelt lecserélhetjük olyanra, ahol csak egyvalaki jön vissza. Például: **x&z**>; ...; **y**>; ...; **x&y**< útsorozat cserélhető a **z**>; ...; **y**> ...; **y**< útsorozattal (itt az állításnak megfelelően feltettük, hogy **x**, az átkelése és a visszajövele között, a jobb parton maradt). Ha mindkét visszajövő a visszajövetelt megelőzően utoljára

párosan ment át, akkor csak az egyiket törölve az útjaiból szintén olyan esethez jutunk, ahol csupán egy jön vissza. Például:  $x\&z>$ ; ...;  $y\&w>$ ; ...;  $x\&y<$  útsorozat cserélhető  $z>$ ; ...;  $y\&w>$ ; ...;  $y<$ , vagy  $x\&z>$ ; ... $w>$ ; ... $x<$  útsorozattal. Ha együtt mentek át párban, akkor is csak az egyiket töröljük mindkét útjából. Például:  $x\&y>$ ; ...;  $x\&y<$  útsorozat cserélhető  $y>$ ; ...;  $y<$ , vagy  $x>$ ; ... $x<$  útsorozattal. **Q.e.d.**

**2. állítás.** Feltehető, hogy mindig egyvalaki jön vissza.

Bizonyítás: Indirekt. Tegyük fel, hogy van, amikor ketten jönnek vissza.

Legyen az első olyan út, ahol ketten jönnek vissza,  $x\&y<$ . Akkor, 1. állítás miatt, mindketten a visszaút előtt utoljára egyedül mentek át. Legyen közülük az, aki előbb ment át,  $y$ . Valakinek, közvetlenül  $y$  átkelése után, vissza kellett hoznia a lámpást, aki a feltevésünk miatt – miszerint  $x$  és  $y$  volt az első visszajövő páros – szintén egyedül tette meg a visszautat, legyen ő  $z$ .

Tegyük fel, hogy –  $y$  visszajövele előtt –  $z$  újra átmegy. Ha esetleg többször is átmenne, vegyük ezen átkelési közül az elsőt. Ekkor, az egymást követő két út,  $y$  átkelése és  $z$  visszatérése elhagyható, és  $z$  következő átkelésének idején, helyette,  $y$  mehet át.

Például:  $y>$ ;  $z<$ ; ...;  $z(\&w)>$ ;...;  $x\&y<$  utak cserélhetők ...;  $y(\&w)>$ ; ...;  $x\&y<$  utakkal.

A másik lehetőség, hogy –  $y$  visszajövele előtt –  $z$  már nem megy át. Az egymást követő két út,  $y$  átkelése és  $z$  visszatérése ebben az esetben is elhagyható, és az első páros visszatérésben  $y$  helyett  $z$  térhet vissza. Például:  $y>$ ;  $z<$ ; ...;  $x\&y<$  utak cserélhetők ...  $x\&z<$  utakkal.

Mivel mindkét esetben (több eset pedig nincsen) csökkent az átkelés ideje ( $T_n$ ), ellentmondásra jutunk azzal, hogy optimális megoldásból indultunk ki. **Q.e.d.**

Vegyük egy olyan optimális megoldást, ahol:

L a lehető leghamarabb marad a jobb parton. **(0)**

Amennyiben az átkelés idejét nem befolyásolja, azaz a megoldás továbbra is optimális marad, akkor válasszuk azt – utak cseréjével – úgy, hogy:

Balról jobbra a lassabb menjen előbb. **(1)**

Jobbról balra a gyorsabb jöjjön vissza előbb. **(2)**

Ha egy oda és egy vissza utat két ember is megtehet, akkor tegye a gyorsabb. **(3)**

Megjegyzés: Ilyen cserék alkalmazása nem befolyásolja a **(0)**-beli választást.

**3. állítás.** Ha valaki visszajön, akkor az adott pillanatban ő volt a leggyorsabb a jobb parton.

Bizonyítás: Indirekt. Tegyük fel, hogy  $x$  és  $y$  a jobb parton van,  $x < y$ , és mégsem  $x$  jön vissza előbb, hanem  $y$ . Mivel  $y$ -nak előbb, vagy utóbb újra át kell jutnia a jobb partra, két eset lehetséges.

Az egyik, hogy  $x$  a jobb parton marad mindaddig, amíg  $y$  újra át nem jut. Ebben az esetben – az átkelési idő növekedése nélkül –  $y$  ezen két útját  $x$  is megtehetné volna, ezért ez ellentmond (3)-nak. Például:  $y < \dots; y(\&w) >$  helyett  $x < \dots; x(\&w) >$ .

A másik, hogy mielőtt  $y$  újra átment volna,  $x$  visszajön. Ebben az esetben – az átkelési idő növekedése nélkül –  $x$  és  $y$  útjai felcserélhetőek, ami viszont (2)-nek mond ellent, Például:  $y < \dots; x <$  helyett  $x < \dots; y <$ . **Q. e. d.**

**4. állítás.** Senki sem megy át egyedül ( $n > 1$ ).

Bizonyítás: Indirekt. Tegyük fel, hogy az első, aki egyedül megy át, az  $x$ .

Ha  $x$  utolsóként menne át egyedül, akkor előtte neki kellett visszahoznia a lámpást (hiszen az a jobb partra kerül a többiek átmenete végén, és rajta kívül már nincsen senki a bal parton), de akkor mindkét út elhagyható, és az átkelési idő csökken, ami ellentmond annak, hogy a megoldás, amiből kiindultunk, optimális volt.

$x$  tehát nem utoljára ment át egyedül. Ebben az esetben  $x$  után közvetlenül valakinek vissza kellett hoznia a lámpást – és annak  $x$ -től különböző személynek kellett lennie, mert különben ismét csak  $x$  mindkét útja elhagyható lenne – legyen ő  $y$ . A 3. állítás miatt  $y < x$ .

Vizsgáljuk meg  $y$ -nak a visszajövetelét megelőző utolsó útját, azaz azt, amikor legutóbb a jobb partra került.  $x - y$ -nak ezen útja óta – a jobb partra való egyedüli átkelése által először van ott, hiszen különben nem tudott volna visszajönni a 3. állítás miatt, mivel ott van  $y$ , aki gyorsabb, mint  $x$ . Tehát az alábbi útsorozatnak kellett lejárnia:  $y \&w > \dots; x > y <$ , ami viszont cserélhető  $x \&w > \dots$  útsorozattal, azaz  $x$  és  $y$  egyedüli útjait elhagyhatjuk, és  $y$ -t, a megelőző útjában,  $x$ -szel cserélhetjük. Ezáltal az átkelés ideje csökkenthető, ami ellentmond annak, hogy optimális megoldásból indultunk ki. Tehát  $x$  nem mehetett át egyedül. **Q. e. d.**

Beláttuk, hogy minden optimális megoldás (mivel az (1)-(3)-beli sorrendcsere az átmenők és visszajövők számát nem érinti, a (0) feltevést pedig mindeddig nem használtuk) olyan, hogy a bal partról a jobb partra mindig ketten mennek át. Ugyanakkor, a 1. állítás bizonyításában, azt is láthattuk, hogy minden olyan optimális megoldás, amelyben valamikor ketten jönnek vissza, átalakítható olyanná, hogy csupán egy jöjjön vissza, de akkor valakinek egyedül is kellene átmennie. Ilyen optimális megoldás viszont nem létezik a most bizonyítottak szerint, tehát beláttuk, hogy minden optimális megoldás pontosan olyan, hogy mindig ketten mennek át, és mindig egyvalaki jön vissza.

**L** csak egyszer mehet át, hiszen ő sohasem lesz a leggyorsabb a jobb parton, tehát a 3. állítás miatt nem jöhet vissza.

#### 4. állítás. $I$ nem mehet át előbb, mint $L$ .

Bizonyítás: Indirekt. Tegyük fel, hogy  $I$  előbb megy át, mint  $L$ . Ekkor 3. állítás miatt, ő mindaddig, amíg  $L$  át nem megy, nem jöhet vissza, mert – nemhogy nem a leggyorsabb, de egyenesen – ő a leglassúbb a jobb parton. Emiatt amikor  $L$  átmegy,  $I$  és  $L$  együtt lesznek a jobb parton. Útjaikban felcserélésük nem befolyásolná az átkelés idejét, ami ellentmond **(1)**-nek. Például:  $x\&l$ ; ...;  $y\&l$  útsorozat cserélhető  $x\&L$ ;...;  $y\&l$  útsorozattal. **Q. e. d.**

Bontsuk szét most két esetre az utak vizsgálatát aszerint, hogy  $L$  párja visszajön, vagy nem.

**1. eset.**  $x\&L$   $L$  útja, és  $x$  már nem jön vissza.

#### 5. állítás. Ha $x\&L$ $L$ útja, és $x$ már nem jön vissza, akkor $x=I$ .

Bizonyítás: Indirekt. Tegyük fel, hogy  $x\&L$   $L$  útja, és  $x \neq I$  (Nyilvánvaló, hogy akkor  $x < I$ ). A 4. állítás miatt  $I$  nem mehetett át előbb, mint  $L$ . Ha  $I$  később ment át, mint  $L$ , akkor abban az útban és  $L$  útjában  $I$  és  $x$  kicserélhető és a megoldás optimális marad, ami ellentmond **(1)**-nek. Például:  $x\&L$ ; ...;  $y\&l$  útsorozat cserélhető  $I\&L$ ;...;  $x\&y$  útsorozattal. **Q. e. d.**

$I$  és  $L$  tehát együtt ment át. Mint megállapítottuk,  $L$  csak egyszer megy át, és már nem jön vissza. Az eset feltevése miatt azonban  $I$  sem, hiszen ő megy át  $L$ -lel. Ez azt jelenti, hogy nem mehetnek elsőként át, mert akkor nem hozná vissza senki a lámpást, pedig  $n > 2$  miatt még vannak emberek a bal parton. Így kell valakinek lennie, aki előttük már átment, és nekik visszahozza a lámpást.

**6. állítás.** Aki közvetlenül  $I$  és  $L$  párosának átkelése előtt hozta vissza a lámpást, annak a közvetlenül előttük átmenő páros egyik tagjának kellett lennie.

Bizonyítás: Indirekt. Tegyük fel, hogy nem a közvetlenül előttük átmenő páros egyik tagja hozta vissza  $I$  és  $L$  párosának a lámpást. Ebben az esetben a két páros útja felcserélhető, és ez ellentmondana **(0)**-nak, hiszen feltettük, hogy  $L$  a lehető leghamarabb megy át. Például:  $x\&y$ ;  $w$ ;  $I\&L$  útsorozat cserélhető  $I\&L$ ;  $w$ ;  $x\&y$  útsorozattal. **Q. e. d.**

$I\&L$  után is vissza kell tehát hozni a lámpást, hiszen aki nekik hozta a lámpást, még a bal parton van.

**7. állítás.** Aki közvetlenül  $I$  és  $L$  párosának átkelése után hozta vissza a lámpást, annak a közvetlenül előttük átmenő páros másik tagjának kellett lennie.

Bizonyítás: Indirekt. Tegyük fel, hogy közvetlenül  $I$  és  $L$  párosa után nem az előttük átmenő páros másik tagja hozta vissza a lámpást. Ebben az esetben az utak sorrendjének cseréjével  $I$  és  $L$  párosa előbb juthatna át, ami ismét ellentmondana **(0)**-nak. Például:  $x\&y$ ;  $x$ ;  $I\&L$ ;  $z$  útsorozat cserélhető  $I\&L$ ;  $z$ ;  $x\&y$ ;  $x$  útsorozattal. **Q. e. d.**

Megállapíthatjuk tehát, hogy ha  $x \&L > L$  útja, és  $x$  már nem jön vissza, akkor  $x = I$ , és egy  $a \&b > a < I \&L > b <$  útsorozat játszódik le. Mivel ez akár a lelegején is lejátszódhat, ezért **(0)** miatt pontosan ott történik meg, és **(3)** miatt  $a$  és  $b$  a két leggyorsabb, továbbá 3. állítás miatt  $a < b$ .

**2. eset.**  $x \&L > L$  útja, és  $x$  még visszajön.

**8. állítás.** Ha  $x \&L > L$  útja, és  $x$  még visszajön, akkor  $x$  azonnal visszajön.

Bizonyítás: Indirekt. Tegyük fel, hogy  $x \&L > L$  útja, és  $x$  még visszajön, de  $x$  nem jön vissza azonnal. Jelölje az  $x$  visszajövele előtt közvetlen átmenő utat  $y \&z >$ . Ekkor 3. állítás miatt  $x < y$  és  $x < z$ . Ugyancsak 3. állítás miatt sem  $y$ , sem  $z$  nem jöhetett vissza  $x$  és  $L$  közös útja óta, hiszen  $x$  gyorsabb, mint ők; tehát  $x$  és  $L$  közös útja óta most mentek át először. Ebben az esetben viszont  $x$  és  $z$  szerepe a két átmenetben felcserélhető lenne, ami ellentmondana **(1)**-nek. Például:  $x \&L > \dots; y \&z > x <$  útsorozat cserélhető  $z \&L > \dots; x \&y > x <$  útsorozattal. **Q. e. d.**

Megállapíthatjuk tehát, hogy ha  $x \&L > L$  útja, és  $x$  még visszajön, akkor az  $x \&L > x <$  útpár játszódik le. Mivel ez a lelegején is lejátszódhat, ezért **(0)** miatt pontosan ott történik meg, és **(3)** miatt  $x$  a leggyorsabb kell, hogy legyen.

A két esetet összefoglalva, látható, hogy vagy a két leglassúbb jut át a két leggyorsabb segítségével, vagy a leglassúbb a leggyorsabb által. Első esetben egy  $n-2$ , másodikban egy  $n-1$  elemű problémához jutunk, és folytathatjuk tovább, egészen addig, amíg az átkelők száma 3-nál kevesebb nem lesz. Megállapíthatjuk tehát, hogy mindenkit vagy a leggyorsabb, vagy a két leggyorsabb párosa juttat át a leglassabbtól kezdve az esetekben leírt módon.

**9. állítás.** A megoldás választható úgy, hogy olyan út után, amikor egy juttat át egyet, ne legyen olyan út, amikor kettő juttat át kettőt.

Bizonyítás: Indirekt. Tegyük fel, hogy van az állításnak ellentmondó útsorozat, és az nem alakítható át az átkelési idő növekedése nélkül. Jelölje  $a$  és  $b$  a két leggyorsabbat,  $a < b$ , és legyenek  $p < q < r$  olyanok, hogy  $r - t$   $a$ , ezután pedig  $p$  és  $q$  párosát  $a$  és  $b$  párosa juttatja át. Az útsorozat ebben az esetben a következő:  $a \&r > a < a \&b > a < p \&q > b <$ . Cseréljük ki ezt az útsorozatot az állításnak megfelelőre, azaz  $q$  és  $r$  párosát  $a$  és  $b$  párosa,  $p - t$   $a$  juttassa át. Az útsorozat ebben az esetben a következő lesz:  $a \&b > a < q \&r > b < a \&p > a <$ . Látható, hogy a két útsorozat időszükségletének különbsége éppen  $p$  és  $q$  időadatának különbsége, azaz az első út csak akkor nem tart tovább, ha a  $p$  és  $q$  időadata megegyezik. Tehát a cserét megvalósítottuk úgy, hogy az idő nem nőtt. Ez ellentmond a feltevésünknek. **Q. e. d.**

Fenti állításból következik, hogy a megoldásban vagy csak „kettő juttat át kettőt”, vagy ilyenek után „egy juttat át egyet”, vagy csak „egy juttat át egyet” utak vannak.

Jelölje most  $a$  és  $b$  a két leggyorsabbat.  $I$  és  $L$  átjuttatása a „kettő juttat át kettőt” esetben (az útsorozat:  $a \&b > a < I \&L > b <$ )  $t_2 + t_1 + t_n + t_2$ , az „egy juttat át egyet”

esetben (az útsorozat:  $\mathbf{a\&L>}$ ;  $\mathbf{a<}$ ;  $\mathbf{a\&L>}$ ;  $\mathbf{a<}$ )  $t_n+t_1+t_{n-1}+t_1$  időt igényel. Utóbbi akkor lesz kisebb, ha  $t_1+t_{n-1}<2t_2$  teljesül. Ebből következik, hogy a váltás feltétele, hogy  $t_1+t_j<2t_2$  teljesüljön, ahol  $t_j$  a még át nem jutottak közül a második leglassúbb átkelési ideje.

Az átkelési idő tehát a következőkből tevődik össze. Összeadunk a leglassúbb átkelési idejétől kezdve minden második időt, amíg vagy már nem maradtak legalább négyen, vagy nem teljesül a párok átjuttatásának a feltétele, és hozzáadunk annyiszor  $2t_2+t_1$ -et, ahány tag részt vett az összegzésben, azaz ahány párt átjuttatott a két leggyorsabb. Az eredményhez a következő összegezni szándékozott (azaz kettővel ismét kisebb indexű) időtől kezdve hozzáadunk minden kisebb indexű időt, és az így összegzett idők száma mínusz háromszor a leggyorsabb idejét.

Képlettel ezt az alábbi módon írhatjuk le.

$$T_n = \sum_{k=0}^{l-1} t_{n-2k} + l(2t_2 + t_1) + \sum_{i=n-2l}^1 t_i + (n - 2l - 3)t_1$$

Ahol  $l$  az a legkisebb egész, amire:  $t_1 + t_j < 2t_2, \forall j < n - 2l$ .

### Összefoglalás/Következtetés

Sikerült bizonyítani adunk arra, hogy az alcímben szereplő probléma [1]-ben leírt algoritmus valóban optimális megoldást ad. Továbbra is szép feladat maradt annak megoldása és bizonyítása, hogy ha nem legfeljebb kettő, hanem legfeljebb  $m$  ember mehet át a hídon, akkor milyen lehet egy optimális átkelési algoritmus.

### Irodalomjegyzék

- [1] Kiss László: A kreativitás fejlesztése I. (Az indukciós gondolkodás tanítása), MAFIOK 2011, Szolnok, DVD melléklet