Conference Paper for MAFIOK 2016.
Óbuda University Alba Regia Technical Faculty, Hungary, Székesfehérvár

A legrövidebb út a differenciálszámítás megértéséhez

Tóth Attila, Csáky Antal
Konstantin Filozófus Egyetem, Közép-európai Tanulmányok Kara, Nyitra, Szlovákia
atoth2@ukf.sk, antal.csaky@gmail.com

Kulcsszavak: differenciálszámítás, mintafeladatok, főiskolai előkészület

***Kivonat*— A tanulmányban hangsúlyozzuk a differenciálszámítás alapjainak oktatását a középiskolákban. Már 5-6 motivációs tanórával megfelelő alapot kaphatnak a diákok, melyre lehetne építeni a főiskolai, egyetemi képzésben. Tanulmányunkban olyan feladatokat is közlünk, melyek felkelthetik a diákok érdeklődését a differenciálszámítás iránt és egyben bemutatják alkalmazását több szakterületen is.**

***Abstract*— The submitted contribution emphasizes the importance of teaching fundamentals of differential calculus at secondary schools. Students can receive adequate basics of differential calculus in as few as 5-6 motivational lessons, and that would be sufficient background for their future university studies. In this study we present several tasks which can catch the students' interest in differential calculus and at the same time show its application in various specialized areas.**

1. BEVEZETÉS

Az iskola lényege a felkészítés. Az egymással versengő vállalatok, a piacgazdaság determinálja, hogy elméletileg felkészült és a szakmában jól orientálódó szakembereket neveljünk. A legtöbb esetben kvantitatív elemzésekre is szükség van, természetesen az informatikát felhasználva. A mai fiatalok nemcsak Szlovákiában, hanem Magyarországon is, és általában, nem céltudatosan készülődnek a pályájukra. A középiskolákon közepes eredményeket elérő diákok egyre gyakrabban jelentkeznek, és kerülnek be főiskolákra. És ez nemcsak próba-szerencse játék, hanem elgondolkodtató a tanárok számára is. A középiskolai tanár elegendően felkészítette-e a diákot? A főiskolán hogyan hozható be az a hátrány, hogy egy gimnazista remélhetőleg már alapjaiban véve ismeri a derivácó fogalmát, és az integrálszámítást, néhány szakközépiskolán pedig sok tanár a (modulból) kerettantervből kiválasztván tanította mindezeket. Vajon behozható-e a hátrány, ha az adott főiskolán az erre szánt óraszám nagyon kevés (heti 2 előadás, 2 gyakorlat)? A szlovákiai érettségi feladatokban a differenciálszámítás már meg sem található. Az Állami Pedagógiai Intézet irányelvei szerint a sorozatok után választható a határérték 1 , illetve a differenciálszámítás, majd az integrálszámítás. Az állami előírások célja mindenekelőtt *a valós helyzetek matematizálása*. A valós helyzet lehet azonban sok esetben az a szembenézés is, amikor a főiskolára bejutott közepes diák hallgatóként nem képes ilyen óraszám alatt megérteni a deriváció lényegét. A középiskolai táblázatokban ugyan a valós függvénytan fejezetben nagyon röviden fel vannak vázolva a határérték és a differenciálszámítás szabályai, de ezek magyarázatot igényelnek. Vannak próbálkozások, amelyek kezdeményezik, hogy a differenciálszámítás automatikusan belefoglaltassék a középiskolai matematikaoktatásba és ne csak a kétszintű érettségi illetve az emelt szintű matematikaoktatás része legyen. Nagyon sok az olyan diák, akik a tanulmányaik folyamán nem kellőképpen készülnek a felsőoktatásba, a felzárkózásuk azonban nagy akaratot, kitartást és rengeteg saját számolást igényel. Mindezek hiányában éppen a matematika bizonyulhat így a főiskolákon, és az egyetemeken a legnehezebb tantárgynak. A jelen tanulmány egy lehetőséget nyújt arra, hogy gyakorlatorientált feladatok megoldásával, hogyan hozható be a középiskolából eredő hátrányt, valamint hogyan tehetjük érthetőbbé a differenciálszámítás fogalmát.

2. A DIFERENCIÁLSZÁMÍTÁS JELENTŐSÉGE

A differenciálszámítás fokozatosan alakult ki. A mechanikának és egyéb tudományoknak lépést kellett tartani a fejlődéssel. Így szembesült az ember az infinitezimálisokkal, a mozgásokkal, és az ellentmondásokkal. A gyakorlatban talán nincs is olyan tudományág, ahol a differenicálszámítást ne alkalmaznák. Az orvostudományban, a biológiában, a környezetvédelemben, de kiemelkedetten fontos a fizikában, azon belül a mozgások elemzésénél. A változások korát éljük, így a változások számítása kiterjed a közgazdaságtanra, környezetvédelemre, sőt a társadalomtudományokra is. A deriváltakat gyakran a függvények szélsőértékeinek meghatározására is alkalmazzuk. Függvényegyenletek is tartalmazhatnak deriváltakat, ezeket differenciálegyenleteknek nevezzük. Sok jelenséget le tudunk írni a differenciálszámítás alkalmazásával, általában azokat, melyek folytonos mozgással vagy változásokkal modellezhetőek. Ha a valóságközeli feladványok matematikai modell segítségével leírhatóak, akkor könnyen kiszámítható mikor lesz a jelenségeknek maximuma, vagy minimuma. Tehát a valós helyzetek matematizálása, ami az Állami Pedagógiai Intézet fő célja, elképzelhetetlen a differenciál- és integrálszámítás nélkül.

Érdekes módon a természettudományok iránt a töredékére csökkent a diákok érdeklődése, ugyanakkor a földtudományok iránt rendkívülien megnőtt. Az iskoláink az igényekhez sok esetben alkalmazkodni tudnak, ugyanakkor még nem tudni, lesz-e ennyi földtudományszakosnak megfelelőszámú munkahely. A földtudományok egyik ágazatában az idegenforgalomi szakra bejutott hallgatóknál végeztünk felmérést.

Csupán a hallgatók 5 százaléka ismerte a differenciálszámítást, ami következtében a felzárkóztatásukat meg kell oldani. Ebben értelemszerűen éppen az segíthetne, ha a középiskolákon a diákok egy kicsit megismerhetnék ezeket a fogalmakat.

50 éve még nyilvánvalóbb volt, hogy ki milyen irányultságú, a legjobbak mentek csak általános középiskolába, gimnáziumokba, amelyek legfontosabb célja a főiskolára való felkészítés volt. Így érthető, hogy a volt csehszlovák tankönyvek (általában cseh vagy szlovák nyelvből fordítódtak magyarra) még tartalmazták a differenciálszámítás minden applikációját. A gimnáziumi feladatgyűjtemény erre jó példa, az átlagos tanuló is nekifoghatott a feladatmegoldásnak [4], a csillaggal megjelölt (igényesebb) példákat azonban csak a legjobbak tudták megoldani. Viszont a modernizálni akaró, újabb és újabb tanterveknek megfelelő felfogás fokozatosan kiiktatta a kötelező tantervből a differenciálszámítást.

A közös államunkban (Monarchia) a matematika már 1851-ben is fontosnak ígérkezett, kötelező volt matematikából érettségizni. Hová „fejlődtünk" ma a technika világában? Ha jelenleg megvizsgáljuk, akkor a diákok kis hányada választja a matematikát érettségi tantárgynak, akik kimondottan a természettudományokon belül matematika-fizika szakra, illetve olyan jellegű szakra jelentkeznek, ahol alapvető követelmény a matematika érettségi a bejutáshoz.

Magyarországon a differenciálszámítás a 11. osztályban jelenik meg a fakultáción, az emelt szintű oktatásban [2]. A kétszintű érettségi példákban szerepel a közgazdasági nyereségfüggvény vizsgálata (a minimális veszteség, a költségek minimalizálása, és maximális nyereség feltételeinek az analizálása), a térfogat és területszámítás minimalizálása, az érintő és paraméteres egyenletek számítása, valamint a függvényvizsgálat. Érdekes módon úgy nézünk a régi tankönyvekre, amelyek részletesen rávezetnek a határérték számításon keresztül a derivációra, mint valami tüneményekre. Pedig nem azok, csak le kellene porolni a jó öreg orosz tankönyveket, a volt csehszlovák és magyar feladatgyűjteményeket, majd a régi kontextusokat átformálni a mai kornak megfelelően [3, 4].

Ha kitekintünk Magyarországról, elmondhatjuk, hogy a német tankönyvekben 11. osztályos tananyag foglalkozik ezekkel a témakörökkel, ahol a függvényvizsgálaton kívül megjelennek az alkalmazási módszerek is

Nagyon hasznos az ifjúság szempontjából az alábbi példa segítségével megszerettetni a derivációkat ami a gépkocsi fogyasztására irányul. Hiszen a fiataloknak csupán elenyésző hányada nem rendelkezik jogosítvánnyal, és így, még aki nem mindennap vezet, azt is érdekelhetné, hogy mennyit is tankolunk és miért olyan sokat:

Egy gépkocsi fogyasztása az $f(v) = \frac{1}{12000}v^3 - \frac{3}{200}v^2 + \frac{4}{5}v$ függvény segítségével írható le. (A sebességet a (v) jelöli km/h-ban, az f függvény a fogyasztást jelenti literben). Azt kell megállapítanunk, hogy mekkora sebesség mellett a legkevésbé gazdaságos az autó használata! Mekkora ekkor a fogyasztása? Milyen sebességgel a leggazdaságosabb az autó használata egy hosszabb úton? Mekkora ekkor a fogyasztása?

A függvény szélsőértékeit kell megkeresni, amiket a függvény v szerinti deriválásával, s a derivált nullhelyeinek megkeresésével kapunk meg. A deriváltfüggvény:

$$f'(v) = \frac{1}{4000}v^2 - \frac{3}{100}v + \frac{4}{5}$$

A szélsőérték helyeit megkapjuk, ha megoldjuk a $f'(v) = 0$ egyenletet. A $f'(v)$ nullhelyei: $v_1 = 80$ (km/h), $v_2 = 40$ (km/h) . A deriváltfüggvény 40 km/h-nél a deriváltfüggvény pozitívból negatívba vált, így itt lokális maximum van. Ekkor a legnagyobb a gépkocsi fogyasztása kis sebességnél. Természetesen nagy (80 km/h feletti) sebességnél a gépkocsi fogyasztása jelentősen megnő, így csak erről az értékről van értelme beszélni. Itt a fogyasztás, ha visszahelyettesítünk 12l. 80 km/h – nál van minimum (helyi). Itt a fogyasztás 8l. A legjobb lenne, ha rádöbbenének arra is, hogy a néhány évtizede futtatott személyautókról van szó, és talán keresgélni kezdik majd a mai modern autók fogyasztási $f(v)$ függvényét [8]. Még érdekesebb lehet így felkelteni a figyelmet, hogy nagyon sok más probléma is felírható az ilyen és hasonló példák segítségével, csak okosan és jól tudjuk az empirikus eredményeket felhasználni.

3. FELADATOK IDEGENFORGALMI SZAKOSOKNAK

Az ENSZ felmérése szerint Európa lakosainak a száma 1960-ban 641 millió, és 1970-ben 705 millió. A felmérés alapján számítsuk ki, hogyan függ a népesség a t időtől. Saccoljuk meg, mennyi lesz a kontinensünk lakosainak száma pl. a 2000-es esztendőben [6].

Megoldás:

Jelölje a személyek számát a P. A görbe pontjaiból már ismerünk kettőt: $(t_1, P_1) = (0; 641)$ a $(t_2, P_2) = (10; 705)$ Majd felírható a változás mértéke (Európa lakosainak száma P) az alábbi egyenlettel: $P - 641 = \frac{705-641}{10-0}(t-0) = \frac{64}{10}t$, behelyettesíthetjük a t helyébe $-30,15.40$ számokat:

Évszám	**1930**	**1975**	**2000**
t (év)	-30	15	40
ENSZ felmérés	573	728	854
A felvázolt egyenlet alapján	449	737	897

1. táblázat Az ENSZ felmérés és a felvázolt egyenlet eredményeinek összehasonlítása

Mit jelentenek ezek a számok? Amint látható az eredmények eléggé jó approximációt mutatnak, tehát a felmérés és az egyenlet felállítása jó volt. A meredekség a t szorzója, értéke $6{,}4$. A felmérés feltételezi, hogy ez a meredekség megmarad, tehát a populációnövekedés tartós lesz. (Érdekes módon éppen az EU létrehozatala változtatja meg ezt a meredekséget??!).

A múlt (1930) eredményeit befolyásolja a háborúban elesettek száma. Az eredmény értelmezhető a következőképpen. A populáció változását t időben *N(t)*-vel jelöljük. Ha az idő *t*–ről *t*+h értékre változik, akkor a változás mértéke $N\ t+h\ -N(t)/h$ és ugyanúgy kiszámítható a meredekség deriváció segítségével: $N(t)=dN/dt$. A populációváltozás egyenlete P$=6{,}4t+641$, ahol t az idő az 1960-as évtől számítva, és az éves változás $\frac{dp}{dt}=6{,}4$ milliónyi fő. Tehát differenciálszámítás segítségével megfelelő pontossággal gyorsabban kiszámítható az éves változás.

A továbbiakban érdekes lehet megvizsgálni a költségvetési alkalmazásokat. Az összköltségek határértéke legyen $C'(x)\ \ 5\ ,6\ .$ A definíció szerint $C'\ a\ =\lim_{h\to 0}\frac{C\ x+h\ -C(x)}{h}$, ami annyit jelent, hogy egy nullához közeli h számmal nő a gyártmányok száma, és így a ráfordítások $C\ x$ -ről $C\ x+h$ -ra változnak. A számítások azt mutatják, hogy ha például a mennyiségek számát (x) eggyel megnöveljük $(x+1)$, akkor deriváció segítségével is a számítotthoz közeli értéket kapunk és így az approximáció: $C'\ x\ \approx\frac{C\ x+h\ -C\ x}{h}=C\ x+1\ -C\ x$, hiszen $h=1$. Tehát a gyakorlati gazdaságtanban alkalmazhatjuk az előbb említett meredekséget, ami a változást szemlélteti. Ebben az esetben a deriváció lényege az, hogy megmutatja az összköltség változását, ha a termékek számát eggyel növeljük. A közgazdaságtanban ez az egyik legelterjedtebb differenciálszámítási módszer.

Legyen egy konkrét példa erre. A költségvetési függvény legyen $C\ x\ =x^2+2$. Az előbbi egyenlet szerint $x=10$ gyártmány esetén, behelyettesítve az x helyére 10 majd 11 értéket:

$C\ 10\ =102;\ C\ 11\ =123\ \Rightarrow$ $C\ 11\ -C\ 10\ =21$

A deriváció szerinti számítás pedig $C'\ x\ =2x\Rightarrow C'\ 10\ =2.10=20.$

A konkrét behelyettesítéssel és differenciálszámítással kapott különbség $21-20=1$.

Nagyobb számú produktumokra pedig pl., ha $x=100$ ez a különbség a mennyiségekhez viszonyítva a következőképpen alakul:

$C\ 100\ =10000+2=10002,$ és $C\ 101\ =10201+2=10203,$ ebből pedig mivel

$C\ x+1\ -C\ x\ =\frac{C\ x+1\ -C\ x}{1}=\frac{10203-10002}{1}=201$ a deriváció szerint: $C'\ x\ =200.$

Tehát minél nagyobb a produktumok száma, annál jobb a közelítés $\approx$ **.** Itt javasolnánk azt az új jelet, amelyik mutathatná a változás mértékének a nagyságát $\overset{3}{\approx}$, tehát pl. 3 nagyságrendi közelítést.

Lássunk még egy konkrét valós feladatot, amikor több változó is szerepel az egyenletben:

Két üdítőitalt gyártunk $x=kofola, y=vínea$, amelyek Szlovákiában közkedveltek. A költségfüggvényt a következő egyenlet alapján határozták meg empirikusan:

$C\ \ x,y\ \ = x^2 + 1{,}1y^2 - xy + 90x + 10y + 500$, ahol x,y az italok mennyiségei hektoliterben mérve. Ha az egyes típusok mennyiségének szintje az $x_0 = 500$ hl és $y_0 = 450$ hl-ről megváltoztatjuk, számítsuk ki a kiadásokat, ha az első típust 2 hektoliterrel, vagy a másikat 1hl-rel megnöveljük.

Megoldásként először is be kell helyettesíteni a kezdeti értékeket, miszerint adódik, hogy $C\ \ x_0,y_0\ \ = 500^2 + 1{,}1450^2 - 500.450 + 90.500 + 10.450 + 500 = 297\ 750$ pénzegység. Számítsuk ki az x szerinti deriváció: $\frac{\partial C}{\partial x} = 2x - y + 90 \ \Rightarrow\ \frac{\partial C(500{,}450)}{\partial x} = 640$ majd az y szerinti deriváció : $\frac{\partial C}{\partial y} = 2{,}2y - x + 10 \Rightarrow \frac{\partial C(500{,}450)}{\partial y} = 500$

A táblázat megmutatja, hogy a visszahelyettesítéssel, a hosszantartó számolás jó közelítéssel helyettesíthető a differenciálszámítással, ha a mennyiségeket fél hektoliterenként növeljük egészen 2 hektoliterig.

h	0,5	1	1,5	2
$C\ \ x_0 + h, y_0\ \ - C(x_0, y_0)$	320,25	641	962,25	1284
$C\ \ x_0, y_0 + h\ \ - C(x_0, y_0)$	250,28	501,1	752,48	1004,4
$\frac{\partial C(x_0, y_0)}{\partial x}$	320	640	960	1280
$\frac{\partial C(x_0, y_0)}{\partial y}$	250	500	750	1000

2. táblázat A költségnövekedés több módszerrel a ***h*** léptéke alapján

A konkrét számeredmények, ha az első típust 2 hektoliterrel növeljük, a másikat pedig 1 hektoliterrel csökkentjük: $C\ \ x_0 + 2, y_0 - 1\ \ - C\ \ x_0, y_0\ \ \cong \frac{\partial C\ \ x_0,y_0}{\partial x} 2 + \frac{\partial C\ \ x_0,y_0}{\partial y}\ \ -1\ \ = 640.2 + 500\ \ -1\ \ = 780.$

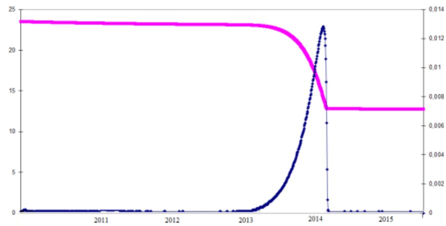
Tehát az összköltség 780 pénzegységgel megnövekedik. A differenciálszámításos módszerrel sokkal gyorsabban közelítő eredményhez juthatunk. A pontatlanság mértéke a h érték megváltoztatásától függ. A pontos érték a behelyettesítés után:

$C\ \ x_0 + 2, y_0 - 1\ \ - C\ \ x_0, y_0\ \ = 298\ 537{,}1 - 297\ 750 = 787{,}1$ pénzegység.

Ezek az egyenletek hozzásegítenek ahhoz, hogy ki tudjuk számítani, mikor lesz minimális költségünk, és ha majd hozzávesszük a főiskolai tananyagot, akkor azt is ki fogjuk tudni számítani, mikor lesz a legnagyobb nyereségünk, ha változtatjuk a produktumaink mennyiségét, ki tudjuk számítani, melyek az optimális mennyiségek.

4. A DERIVÁCIÓ A MÉRÉSI EREDMÉNYEK ALAPJÁN DIREKT MÓDON BÁRMILYEN VÁLTOZÁSRA ALKALMAZHATÓ

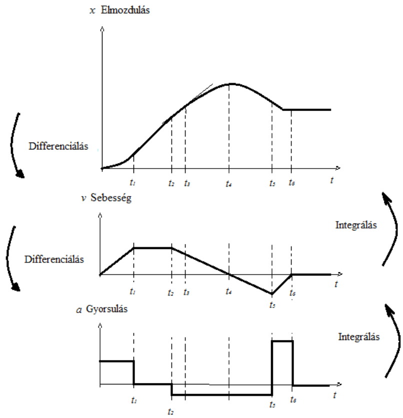
Nézzük meg a turisták számának a csökkenését Ukrajnában a derivácó segítségével, mégpedig úgy, hogy lerajzoltatjuk a definíció alapján a program grafikonkészítőjével a $\frac{dy}{dx} = \frac{y_2 - y_1}{1\ hét}$ akár hetekre, illetve napokra bontva az időintervallumot. A mért adatok alapján tehát kigenerálható a definíció szerinti kék görbe (1. ábra), amely nagyon jól érzékelteti, hogy a 2014-es esztendő melyik hetében volt a legnagyobb az apadás. Így találhatóak meg például annak a politikai okai, hogy pontosan ebben az időszakban mi történhetett, és ebből kifolyólag mi veszélyezteti leginkább a turistaforgalmat (az olaj árának csökkenése, a Nyugat szankciói Oroszország ellen…). Ezzel a módszerrel mindig megtalálható az extrém, a legnagyobb és a legkisebb változás is.



1. ábra A turisták számának csökkenése és annak a legnagyobb esése (a bal tengelyen ezres nagyságrendű a turisták száma)

5. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ÉS A SEBESSÉGEK MEGHATÁROZÁSA A FIZIKÁBAN

A parabolikus mozgás analizálásánál differenciálszámítással megkapjuk a sebesség pontos változását. A 2. ábrán látható, hogyan kapunk derivációval a sebesség változásából gyorsulást. Ha az elmozdulás-idő egyenes, akkor nincs sebességváltozás, a sebesség állandó (vízszintes vonal a sebesség-ábrán a t_1 és t_2 között). A görbe meredekségének csökkenése az elmozdulás ábrán fékezést mutat. Ez pedig nem más, mint negatív gyorsulás. Ez ennek a módszernek a lényege, derivációval ki lehet számítani a sebességet, újabb derivációval a gyorsulást, és integrálással pedig fordítva rekonstruálható a sebesség és elmozdulás.



2. ábra A diferenciál és integrál számítás grafikai értelmezése a mechanikában

A fizika ma már a differenciál- és integrálszámítás nélkül elképzelhetetlen. Alkalmazva van a dinamikában, elektrotechnikában, sőt maga a modern fizika is éppen a teljes differenciál segítségével van kifejtve, sok esetben a változó tömeg segítségével, amit a klasszikus fizika még nem is értelmezett 10 .

6. HOGYAN KAPCSOLÓDIK A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS A MATEMATIKA FEJEZETEIHEZ A SZLOVÁKIAI KÖZÉPISKOLÁKON

A szlovákiai tanterveink és a modernebb kiadású tankönyveink alapján a fentebb említett gyakorlati példák jól illeszkednek ahhoz a fejezethez, amelyben a függvény grafikonja és változásának a sebessége van részletesen bemutatva. Nálunk, Szlovákiában, sajnos már a gimnáziumi tantervből és tankönyvekből is hiányzik a differenciálszámítás. A magyar nyelvű fordításban azért a mi magyar szakembereink fontosnak vélték kiegészíteni a fejezeteket, és megértetni a függvénynövekmény fogalmát. Így egyszerű felvázolása található annak, milyen gyorsan csökken, vagy növekszik a lineáris függvény $f(x+1)$ és $f\ x+0{,}5$, sőt meteorológiai megfigyelésekkel ecsetelve a nemlineáris függvények növekedésének összefüggése is a grafikonok meredekségével bizonyítva van. Erre a fejezetre nagyon jól kapcsolódnának a bemutatott gyakorlati példáink, hiszen maguk a szerzők is az ún. magasabb matematika küszöbén találták magukat (ebben a tankönyvben a fejezet címe is az, hogy a magasabb matematika küszöbén). De az általános középiskola szlovák tankönyveiből hiányoznak a derivációk. Mivel több éve tanítjuk az általános és szakközépiskolákról érkező szlovák és magyar elsős hallgatókat, talán a legjobban érzékelhetjük a hiányt, amit a lehető leggyorsabban még a szemeszter elején orvosolni kell.

7. ZÁRSZÓ

Sajnos a főiskolai kerettantervek nem engedik meg bővíteni az óraszámokat, így a tapasztalat szerint a 2 előadás, és 2 gyakorlat nem elegendő ahhoz, hogy a hallgatóság zöme elsajátítsa a differenciálszámítást. A konkrét tapasztalat azt is kimutatja, hogy mindezzel éppen a közepes eredménnyel érkező diákok küszködnek a leginkább. Ha lehetővé tennék legalább $4-5$ tanítási órában megismertetni a derivációkat, és az integrálszámítást a szakközépiskolákban is, sokat segítenének a tanároknak, aki a tanterveikbe való beiktatás a hivatalos modulból megtehetik, de ez nem kötelező. A sorozatok, a határértékek után meg kellene alapozni a differenciál- és integrálszámítás fogalmait. Mert a legtöbb gyakorlatból eredő valós helyzet ma már elképzelhetetlen ezeknek a fogalmaknak ismerete nélkül. Kiszámíthatóvá válik a magánvállalkozó számára is a bonyolult helyzetekben a sok változó mennyiség, mikor lesz a legkisebb befektetése, és mikor lesz a legnagyobb nyeresége. A törvények szabta keretek között mozogván szinte hihetetlennek tűnt a főiskolai hallgatóknak is, hogy vannak olyan a gyakorlatból vett valós példák, amelyekben kis változtatásokkal elérhető, hogy ha a kiadások nőnek is, a nyereség nem csökken. Utalni lehet az integrálszámításra is, ami gyakorlatilag egy „antiderivált”. S ha már megtanultak deriválni, akkor fognak tudni integrálni is. És ez egy komplikáltabb konfigurációjú görbe alatti terület számításánál, valamint forgástestek térfogatának a kiszámításánál csodálatosan felhasználható 8 9 .

A gyakorlatorientált példák bemutatásával hamarabb válik érthetővé a differenciálszámítás fogalma, így matematizálhatóak a valós helyzetek, modellezhetővé válhat sok problémakör a tudományokban.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönjük a KEGA 016UKF-4/2016 - Implementácia konštruktivisticky orientovaného vyučovania matematiky s dôrazom na aktívne nadobúdanie poznatkov žiakmi v kontexte bilingválneho vzdelávania c. projekt támogatását.

IRODALOM

1 ŠVP, *Štátne vzdelávacie programy, platné od 1.9.2013*. Bratislava: Štátny Inštitút Odborného Vzdelávania, 2013.
2 V. Nagy, *Differenciálszámítás tanítása a középiskolában*, szakdolgozat. Budapest: ELTE, 2011.
3 V.E. Šnejder and A.I. Sluckij and A.S. Šumov, *Kratkij kurs vyssej matematiki*. Moskva: Vyssaja škola,1978, pp. 208-211.
4 F. Vejsada and F. Talafous, *Matematikai példatár*. Bratislava : SPN Bratislava, 1973, pp. 322-362.
5 J. Fecenko and Ľ. Pinda, *Matematika II*. Bratislava: ELITA/IURA EDITION, 2006, pp. 90-91.
6 K. Sydsaeter and P.I. Hammond, *Matematika közgazdászoknak*. Budapest: Aula, 1998, pp. 489-491.
7 Z. Kubáček, *Matematika pre gymnáziá.* Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, 2010, pp. 44-45.
8 V. Nagy, *A differenciálszámítás tanítása a középiskolákban*, szakdolgozat, Budapest: ELTE, 2011.
9 Ö. Vancsó and Á. Bárd, *Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten*. Budapest: ELTE, 2006.
10 A. Hudson and R. Nelson, *Útban a modern fizikához*. Budapest: Ligatura, 1994, pp. 26-27.