Conference Paper for MAFIOK 2016.
Óbuda University Alba Regia Technical Faculty, Hungary, Székesfehérvár

Kétváltozós függvények oktatása GeoGebrával

Klingné Takács Anna
Budapesti Gazdasági Egyetem, Budapest, Magyarország
Klingne.TakacsAnna@uni-bge.hu

Kulcsszavak: kalkulus, többváltozós függvények, GeoGebra

Kivonat— **Gazdaságtudományi alapterületen hallgatóink a hagyományos kalkulus mellett ismerkednek a többváltozós függvények analízisével is. Az oktatásra fordítandó órakeret viszont kevés az adott témában, így csak a kétváltozós függvények szélsőértékének keresésére és a szintvonalak felírására van lehetőség. Az órákon hagyományos munkaformákat alkalmazunk,a szemléltetetéshez, megértéshez számítógépes módszereket. Bruner elmélete szerint a szemléltetés a tanítás-tanulás folyamatában mindvégig fontos. Ennek egy eszköze lehet a GeoGebra, melynek 3D-és funkciójával egyszerűbb kétváltozós függvények megjeleníthetők. Erre mutatunk példát előadásunkban.**

Abstract— **In addition to traditional calculus, Economics students learn the basic theory of multivariate functions. We teach only finding local extremal values and constructing the equations of level curves, since have few classes on the topic. We use traditional methods, and computerized methods for illustration, comprehension. According to Bruner's theory illustration is important in the teaching-learning process at all times. GeoGebra is a proper tool for the 3D illustration of simple two variable functions. Our presentation introduces an example for this.**

1 Bevezetés

Matematika alapok I. és Gazdasági matematika I. tantárgyak keretében oktatjuk hallgatóinknak a többváltozós függvények analízisét, speciálisan a kétváltozós függvények szélsőértének meghatározása és a szintvonalak felírása alkotja az oktatott anyag nagy részét, és ezekből a típusú feladatokból kell a vizsgákon jártasságot mutatni a diákoknak. Azért is fontos, hogy ismerjenek ilyen típusú problémákat, mivel a gazdasági modellezésben a gazdasági folyamatok nem csak egyváltozós függvénnyel írhatók le,sőt több változó is szerepet kaphat az elemzéseknél.

2 Elméleti alapok röviden

A két és többváltozós függvényeket az egyváltozós függvényekhez hasonlóan definiáljuk. A többváltozós függvények értelmezési tartománya most rendezett valós számpárok, számhármasok, szám n-esek halmaza, értékkészlete pedig ugyanúgy, mint az egyváltozós esetben a valós számok egy részhalmaza.

A kétváltozós függvény képe egy felület, szemléltethetjük például a 3 dimenziós derékszögű Descartes féle koordinátarendszerben.

Számunkra a kétváltozós függvények esetében is a deriválás a legfontosabb művelet, mivel a különböző, több változótól függő mennyiségek szélsőértékeit így tudjuk kiszámítani.

Kétváltozós, f(x,y) függvények differenciálása:

Legyen az f függvény értelmezve a $P_0(x_0,y_0)$ pontban és annak egy környezetében, az f(x,y) függvény x szerinti parciális deriváltjának nevezzük a következő határértéket:

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\right) \quad (1)$$

Az x szerinti parciális deriválásnál, y rögzített, x változó.

Szemléletesen: Metsszük el a felületet egy y tengelyre merőleges síkkal, ez a felületből egy görbét metsz ki, a görbe érintőjének a meredeksége, más szóval iránytangense a felület x szerinti parciális deriváltja. (Hasonló a definíció az y szerinti parciális deriválás esetében.)

Az egyváltozós esethez hasonlóan itt is definiálhatunk magasabbrendű deriváltakat. Itt négy másodrendű derivált lesz.

Szélsőérték: lehet helyi minimum illetve maximum.

Az f(x,y) függvénynek az (a,b) helyen helyi minimuma van, ha (a,b) pontnak van olyan környezete, ahol f(a,b) > f(x,y).

Az f(x,y) függvénynek az (a,b) helyen helyi maximuma van, ha (a,b) pontnak van olyan környezete, ahol f(a,b) < f(x,y).

Ha az f(x,y) kétváltozós függvénynek szélső értéke van az (a, b) pontban, akkor helyi szélsőértéke van az x = a helyen az f(x,b) egyváltozós függvénynek is, amelynek görbéje természetesen illeszkedik a felületre. Ezért az egyváltozós függvényeknél tanultak alapján a szélsőérték létezésének szükséges feltétele $f'_x=0$. Hasonlóképpen helyi szélsőértéke van az y = b helyen az f(a,y) egyváltozós függvénynek is. Ezért a szélsőérték létezésének $f'_y=0$ is szükséges feltétele.

Megfogalmazható a következő tétel:

Az f kétváltozós függvény (a,b) helyhez tartozó szélsőértéke létezésének szükséges feltétele:

$$f'_x=0 \text{ és } f'_y=0 \quad (2)$$

Tehát a függvénynek csak ott lehet szélsőértéke, ahol az elsőrendű parciális deriváltjai zérussal egyenlők. [3]

Az elegendőséget is megfogalmazó tétel: Tegyük fel, hogy az f kétváltozós függvény valamennyi parciális deriváltja létezik az (a,b) pontban, és azok folytonosak.

Ha $f'_x(a,b)=0$ és $f'_y(a,b)=0$, (3)

továbbá

$$D(a,b)=f''_{xx}(a,b)f''_{yy}(a,b)-\left[f''_{xy}(a,b)\right]^2\rangle 0, \quad (4)$$

akkor f-nek az (a,b) pontban lokális szélsőértéke van: $f''_{xx}(a,b)<0$ esetén maximum, $f''_{xx}(a,b)\rangle 0$ esetén minimum van. Ha $D(a,b)<0$, akkor f-nek az (a,b) pontban nincs lokális szélsőértéke. Ha $D(a,b)=0$,akkor további vizsgálódás szükséges a szélsőérték létezésének eldöntésére. [2]

3 Módszertani alapok

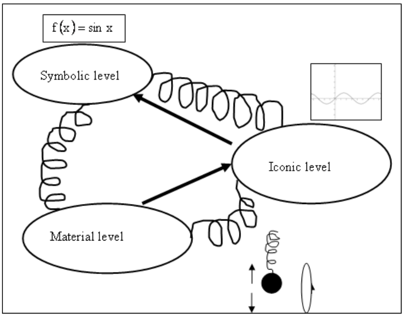
A. Bruner reprezentációs elméletéről

Bruner vizsgálta, hogy az ember hogyan reprezentálja, milyen kódok segítségével tárolja a külvilágból érkező információkat. Szerinte minden gondolkodási folyamat háromféle síkon mehet végbe, az ismereteket, a tudást az ember háromféle módon tudja reprezentálni.

- Materiális (enaktív) sík (Az ismeretszerzés egy cél elérésére konkrét tárgyi cselekvések, tevékenységek, manipulációk révén megy végbe.)

- Ikonikus sík (Az ismeretszerzés szemléletes képek, ill. elképzelt szituációk révén történik. Például fadiagram, algebrai problémák geometriai szemléltetése.)

- Szimbolikus sík (Ezen a síkon az ismeretszerzés matematikai szimbólumok és a nyelv segítségével megy végbe.) [1]



1. ábra A reprezentációs gondolkodási síkok közötti átmenet segíti a probléma megoldó gondolkodás fejlesztését

A három reprezentációs mód az oktatási folyamat minden fázisában szerepet játszik. Az egyik módról a másikra való áttérés növeli a rugalmasságot, és a problémamegoldó gondolkodás hatékonyságát. Az ikonikus sík (szemléltetés) végig jelentős szerepet játszik a matematika oktatásában. [1]

Úgy gondoljuk, hogy matematikatanításunk többnyire a szimbolikus síkon zajlik. Hogyan lehet bevonni az oktatásba a többi gondolkodási síkot? A számítógép segítségével mindhárom gondolkodási szint megjelenik a tanításban. Ez az egyik oka, annak, hogy számítógépes módszereket használunk a szemléltetéshez, és a tananyag megértéséhez. Feladatunk volt, hogy olyan programokat keressünk, amelyek mindenki számára elérhetők, és a használatuk különösebb előképzettséget nem igényel. Ilyen szoftver a GeoGebra, jelenleg az 5.0. verziója tölthető le. A másik alkalmazás,amelyet a diákok tanulmányaik során megtanulnak használni az Excel. [4]

B. Készségek, jártasságok

Ahhoz, hogy a kétváltozós függvények szélső értékét meg tudja keresni a hallgató el kell sajátítania a parciális deriválás technikáját. Ehhez jól kell értse a változó fogalmát, most két változó van, és jártasság szintjén kell tudnia deriválni az egyváltozós függvényeket, alkalmazni a deriválási szabályokat, felismerni az összetett függvényt, jól kiválasztani, hogy melyik a külső függvény és melyik a belső.

Jártasnak kell lennie az egyenletrendszerek megoldásában, a kapott megoldások behelyettesítésében.

Készség szinten kell tudnia a diáknak a megoldási „útmutató” alkalmazásait. (Tudja a megoldás lépéseit.)

4 ALKALMAZOTT OKTATÁSI MÓDSZEREK

Tapasztalataim szerint az egyik fő problémát az okozza, ha a változók szorzatát, vagy hányadosát kell parciálisan deriválni. Ekkor vissza szoktam utalni az egy változóra, az alábbiak szerint mutatom:

$$\left(x^2\sqrt{y}\right)'_x = \left(x^2\right)'_x\sqrt{y} + x^2\left(\sqrt{y}\right)'_x = \qquad (5)$$
$$= 2x\sqrt{y} + x^2\cdot 0 = 2x\sqrt{y}$$

$$\left(x^2\sqrt{y}\right)'_y = \left(x^2\right)'_y\sqrt{y} + x^2\left(\sqrt{y}\right)'_y = \qquad (6)$$
$$= 0\cdot\sqrt{y} + x^2\cdot\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2\sqrt{y}}$$

Az utóbbi (6) egyenletben az utolsó lépést is részletezni kell. Hasonlóan mutatom hányados deriválásakor is az eljárást. Végig hangsúlyozni kell, hogy az x szerinti parciálás deriválás esetén y úgy viselkedik, mint konstans, ezért a derivált 0. Meg kell jegyezni, hogy ha y konstans,akkor a többszöröse és hatványai is azok.

Az első deriváltakból alkotott egyenletrendszer megoldása során célszerű a behelyettesítéses módszert alkalmazni a legtöbbször. Sok feladatban jónak bizonyul a kiemelés az egyes egyenletekben, mert típushibaként követik el az ismeretlennel való osztást.

A D-vel jelölt kifejezést írjuk fel mint a változók függvényét, majd utána helyettesítsük be az egyenletrendszer megoldása során kapott pontokat. Tanítottam úgyis, hogy kiszámoltuk a parciális deriváltak értékét az adott pontokban, ezekkel a D kifejezés számértékét határoztuk meg, valamint annak előjelét. Az előzőleg javasolt módszerrel kevesebb volt a tévesztés.

Szintvonalak felírása után, próbáltam velük elképzeltetni egyszerűbb esetekben a felületet,de ez meddő próbálkozás volt. Ezért célszerű a felületet ábrázolni számítógépes alkalmazással, esetünkben a GeoGebrával.

5 EGY VIZSGAFELADATRÓL

Az alábbi vizsgadolgozat feladatot kapták hallgatóink:

Adja meg az f(x,;y) függvény lokális szélsőértékhelyeit, nyeregpontjait!

$$f(x;y) = 2x^2y + 4xy - y^2,\ \ (x,y)\in R^2 \qquad (7)$$

Írja fel a P(2;1) ponthoz tartozó x és y változó szerinti szintvonalakat!

A. *Hagyományos módon*

Meghatározzuk a deriváltakat: szoktam a kétváltozós függvényt csak z-vel is jelölni

$$\begin{aligned} z'_x &= 4xy + 4y & z'_y &= 2x^2 + 4x - 2y \\ z''_{xx} &= 4y & z''_{xy} &= 4x + 4 \\ z''_{yx} &= 4x + 4 & z''_{yy} &= -2 \end{aligned} \qquad (8)$$

Az első deriváltakból alkotott egyenletrendszer megoldásaiként kajuk a következő pontokat: $P_1(0;0)$, $P_2(-2;0)$, $P_3(-1;1)$.

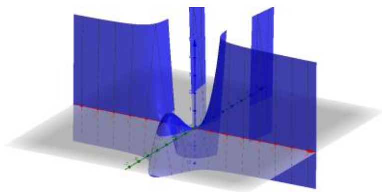
A $D(x;y) = -8y - (4x+4)^2$ kifejezésbe helyettesítve a pontokat a P_3 pontban lokális maximum van, a P_1 és P_2 pontokban nyeregpontjai vannak.

A szintvonalak felírása:

$$\begin{aligned} f(2;y) &= 16y - y^2 \\ f(x;1) &= 2x^2 + 4x - 1 \end{aligned} \qquad (9)$$

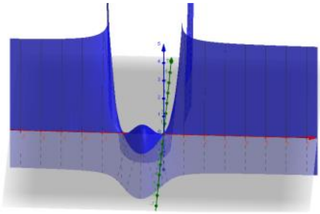
B. *Szemléltetés GeoGebrával*

A parancssorba begépeljük a függvény hozzárendelési szabályát, majd a Nézet menüben válasszuk a 3D-s nézetet.



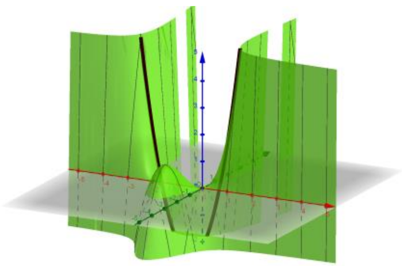
2. ábra A kétváltozós függvény, mint felület

A forgatás gombot választva több oldalról is megvizsgálhatjuk a felületet és a lokális szélsőérték koordinátái is leolvashatók, szemléletessé válik a két nyeregpont is.



3. ábra A kétváltozós függvény a szélsőérték és nyeregpontok szempontjából

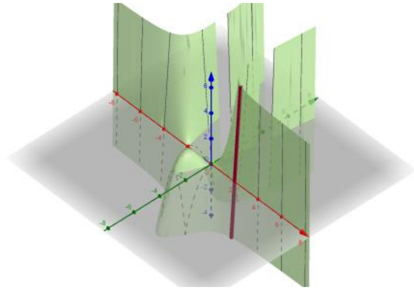
A szintvonal nem más mint a felület és sík metszéspontja. A metsző sík: y = 1. A sík és a felület metszésvonalához a GörbeParaméteres[t, 1, 2t² +4t- 1, t, -3, 3] parancsot kell választanunk és ráteszi az alkalmazás a szintvonalat a felületre.



4. ábra Az x változóhoz tartozó szintvonal a felületen

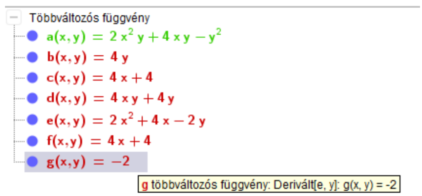
Az y változóhoz tartozó szintvonalat a felület és az x=2 sík metszésvonalaként kapjuk meg. A parancssorba írjuk be : GörbeParaméteres[2, k, 16k-k² ,k, -3, 3]. Sajnos a szintvonal itt csak egy egyenesként jelenik meg.

A parciális deriváltak is



5. ábra Az y változóhoz tartozó szintvonal a felületen

kiszámoltathatók GeoGebrával. Ehhez a Derivált parancsot kell választanunk, majd a szintaxisban először a függvény nevét, majd a változót kell írni. Az algebrai ablakban megjelennek a deriváltak.



6. ábra Parciális deriváltak az algebrai ablakban

A GeoGebra jól használható a szemléltetésben, és a deriválás ellenőrzésére is.

6 OKTATÁSI TAPASZTALATOK

Az általam javított 45 vizsgadolgozatban mindössze 8 akadt,amelyben a diák nem foglalkozott az adott (7) feladattal. Teljesen hibátlam megoldás is csak 12 volt.

Általában az a tapasztalatunk, hogy ezzel a típusú feladattal „valamit kezdenek” a hallgatók. A többség (kb 80%-uk) ismeri a megoldási lépéseket. Az első és második parciális deriváltakat meghatározzák. Az egyenletrendszer felírása az első deriváltakból megtörténik, bár többször előfordul, hogy a szükséges feltételt nem írják fel, csak elkezdik megoldani és a levezetés során derül ki, hogy jól tudják a feltételt. A legtöbb tévesztés mégis az egyenletrendszer megoldása során keletkezik. Az adott (7) példában célszerű kiemelni az y változót,ennek hiányában az osztásnál gyököt veszítenek. Ezért a megoldások felében, csak 2 db stacionárius pontot találtak meg a megoldás során a hallgatók.

Hiba szokott még lenni, hogy „elfelejtik” visszahelyettesíteni a stacionárius pontokat a D-vel jelölt kifejezésbe. (Mivel lineáris algebrát nem tanulnak, nem használjuk a mátrix kifejezést.) Az előjeleket néha tévesztik, vagy összekeverik, ezért a szélsőérték típusát tévesen állapítják meg. Tanácsként szoktam mondani, ha $f''_{xx}(a,b)$ előjele negatív – asszociáljanak a $\cap$ „szomorú parabolára”, amelynek maximuma van. Ha pozitív az előjel, gondoljanak a $\cup$ „mosolygós parabolára”, annak minimuma van. És azért a második deriváltat nézzük, mert egyváltozós analízisben is a függvény görbületét a második derivált mutatja meg. A hallgatók elmondása szerint ez segíti őket az információ felidézésénél.

A másik kérdésük volt: Mi az a nyeregpont? Erre kérdéssel válaszolok: Lovat láttak már? És már rajzolom is a táblára: Nézzük a lovat oldalról és hátulról! Ha oldalról nézzük a ló hátát,

7. ábra A nyeregpont, mint „minimax” pont

minimumot látunk, ha hátulról,akkor maximumot. Nevezhetjük a nyeregpontot „minimax” pontnak is.

Ezen mindig jót derülnek,de így megjegyzik a fogalmat. (A ló egész órán a táblán marad.)

7 KÖVETKEZTETÉSEK

Bruner fundamentális, reprezentációs és narratív elméleteinek elemei egyaránt megjelennek a kétváltozós függvények analízisének tanítása során.

A hallgatók hiányosságai miatt az “oktatási spirál” megfelelő szintjéhez “vissza kell nyúlnunk”. A matematikai alapok elsajátítása áthúzódik a felsőoktatás szintjére, ezért is fontos felzárkóztató kurzusok tartása. Egyetemünkön is tartunk ilyen típusú felkészítőket diákjainknak év eleji felmérés alapján.

A reprezentációk, szemléltetések a tanítás-tanulás folyamatában mindvégig fontosak. Ennek egyik eszköze lehet a számítógép. A GeoGebra alkalmazás mindenki számára elérhető, felülete könnyen kezelhető.

A narratívumok, az anekdotázás, segítik a fogalmak, eljárások felidézését. Erre a lovas szemléltetést hoznám példának.

IRODALOM

[1] A. Ambrus, “Bevezetés a matematika-didaktikába,” *ELTE Eötvös Kiadó, Budapest*, 23-40, 2004.

[2] L. Csernyák, I. Albeker, Cs. Czétényi, O. Pörzse, “Analízis,” *Nemzeti Tankönyvkiadó Budapest*, 16., átdolgozott kiadás, 195–197, 2005.

[3] E. Stettner, A. Takács Klingné, “Analízis lépésről-lépésre”, URL: http://hdl.handle.net/2437/201653, 2016. 07. 04.

[4] A.Takács Klingné, “A matematikai analízis alapjainak és alkalmazásainak számítógéppel segített oktatása a Kaposvári Egyetemen,” , phD értekezés, 2014, URL: http://hdl.handle.net/2437/201653 2016.07.04.

[5] URL: www.geogebra.org (2016.07.04.)