Conference Paper for MAFIOK 2016.
Óbuda University Alba Regia Technical Faculty, Hungary, Székesfehérvár

Egy matematika verseny tanulságai

Debrenti Edith*
* Partiumi Keresztény Egyetem Nagyvárad, Pénzügy és Gazdasági Elemzések Tanszék
edit.debrenti@gmail.com

Kulcsszavak: szöveges feladatok, matematikai modell, problémamegoldás

Kivonat—**A szöveges feladat olyan életszerű, gyakorlati problémafelvetés, amelyben az ismert és az ismeretlen mennyiségek közötti összefüggés(ek) szövegesen van megadva, és megoldásához valamilyen matematikai modellre van szükség. A szöveges feladatoknak jelentős szerepe van a problémamegoldásban, a szövegértés fejlesztésében. A szöveges feladatok tanítása egyike a legnehezebb módszertani problémáknak. Jelen kutatásban egy matematika verseny helyi szakaszának IV. osztályos tanulóknak kitűzött feladatait (összesen négy szöveges feladatot tartalmazott) és azoknak megoldásait vizsgáltuk a Bihar megyei minta (N=636) esetén. A verseny feladatait megoldották a Partiumi Keresztény Egyetemen *Az óvodai és elemi oktatás pedagógiája* szakos II. éves hallgatók, illetve a Nyíregyházi Egyetem *Tanító* alapszakos hallgatói is. Lehetőség nyílt a hallgatók szövegesfeladat- megoldó képességeinek és előzetes ismereteinek vizsgálatára, feltárására, rávilágítani a meglévő hiányosságokra és segíthet a továbbiakban azok pótlásában.**

Abstract— **Word problems are lifelike, practical problems in which the relation(s) between known and unknown quantities is(are) provided in a textual form, and the solution to the problem requires some kind of mathematical model. Word problems play an important role in problem solving and in developing reading comprehension skills. Teaching word problems is one of the most difficult methodological issues.**

The present research investigates (altogether four) word problems and their solutions on the basis of the Bihar county model (N=636). The problems were designed for 4th grade students participating in a local mathematics competition. The problems were solved by the second year teacher training majors at Partium Christian University, as well as by teacher training majors at Nyíregyháza College. This provided an opportunity to investigate students' word problem solving skills and their previous knowledge in this field and to reveal any deficiencies that need to be tackled in the future.

1 BEVEZETÉS

A problémamegoldó képesség általános fejlesztése fontos célkitűzés a matematikatanításban.

A problémamegoldó tevékenység során a diákok értelmi képességének számos aspektusát mozgatjuk meg és fejlesztjük, ezek közül az egyik legfontosabb a gondolkodás.

„Problémának nevezzük olyan szituáció, kérdés, feladat (problémahelyzet) felbukkanását, amelyre a választ, a megoldást nem tudjuk azonnal észleléssel, emlékezés, tapasztalás alapján közvetlenül megadni, hanem

csak közvetett úton: gondolkodási és logikai műveletvégzésen keresztül." [8]
Problémamegoldó gondolkodásnak nevezzük a gondolkodási tevékenységnek azon részét, amely a problémák érzékelésén, felfogásán, jellemzésén, megoldásán keresztül egészen annak ellenőrzéséig és a kapott eredmények általánosításáig terjed.

A gondolkodási műveleteket tudatosan kell tanítani a tanórákon, megoldási stratégiákra kell tanítani a tanulókat és ösztönözni minél különbözőbb megoldások keresésére, a végén feladatmegoldásokat fontos a valósággal összevetni. A legtöbb esetben a probléma-megoldási folyamat áll a középpontban, nem pedig a kapott eredmény. Ezen folyamat struktúráját többször is hangsúlyoznunk kell a tanulóknak. [1]

A problémamegoldó képesség hatékony fejlesztéséhez hozzájárul minél több olyan szöveges feladat elvégzése, felvetése, amely ismeretlen a tanulók számára és amelyhez neki kell megtalálnia a megoldási lépéseket, az algoritmust.” [3]

Egy mai értelmezés szerint: „a szöveges feladat olyan életszerű, gyakorlati problémafelvetés, amelyben az ismert és az ismeretlen mennyiségek közötti összefüggés (összefüggések) szövegesen van megadva, és megoldásához valamilyen matematikai modellre van szükség.” [7]

A szöveges feladatok a műveletfogalom kialakításában és a műveletvégzés közvetett gyakoroltatásában is meghatározó szerepet töltenek be, ugyanakkor az elemi osztályokban a szöveges feladatok feldolgozásával a bonyolultabb gyakorlati problémák matematikai modellezésének képességét alapozzák meg. A szöveges feladatok segítségével fejleszteni lehet a tanulók szövegértését, ítélő-, emlékező-, lényegkiemelő és önellenőrző képességét. [7]

Pólya György matematikus és pedagógus a matematikai szöveges feladatok megoldását vizsgálva a következőképpen fogalmazott: „A szöveges feladatok egyenletekkel történő megoldása közben a diákoknak a valós szituációt a matematika nyelvére kell lefordítaniuk. Mindez lehetőséget ad arra, hogy a diákok megtapasztalják a matematikai fogalmak és a valós dolgok között húzódó kapcsolatokat. De az így kapott kapcsolatokkal óvatosan kell bánni.” [6]

Welchner [9] szerint a szöveges feladatok tanítása az egyik legnehezebb része a matematika módszertannak. A pedagógusok tanításának ezen a területen a leggyengébb a hatásfoka. A szöveges feladatok megoldása a tanulóktól olyan önálló szellemi munkát vár el, ami egy 6-10 éves gyereknek nem természetes tulajdonsága. Ezért a tanítótól egy speciális nevelőmunkát igényel, amellyel ezeket a tulajdonságokat (figyelem, türelem, összpontosítás, rendszerezési-, lényeg kiemelési képesség, stb.) fejlessze. Arra kell törekednünk, hogy ne csak a jobb tanulók tudjanak szöveges feladatokat megoldani, hanem a diákok nagy részének a gondolkodását arra a szintre fejlesszük, hogy megbirkózzanak a szöveges feladatokkal.

Ezért a szöveges feladatok fontos szerepet játszanak a pedagógiai kísérletekben és felmérésekben. [2]

Az olvasás és szövegértés, az értelmes tanulás, elsajátítás, a megértés mindenfajta tanulásnak alapvető szempontja, a matematikatanulás esetén még nagyobb ennek a fontossága. [3]
A PISA matematikai kompetencia modelljében az összetevők között a készségeknél találjuk a szöveges feladatok megoldását és a kommunikációs képességeknél a szövegértést, szövegértelmezést, prezentációt, ábrázolást, míg a probléma érzékenységet és a problémamegoldást a tudásszerző képességeknél.[4]
A szöveges feladatok tanításában a pedagógusoknak is lényeges szerepük van, hiszen ennek a résznek a tanításához elengedhetetlen az alapos szakmai felkészültség. [5]

2 KUTATÁS

A kutatás célja megvizsgálni, hogy tanítóképzős hallgatóink a szöveges feladatok megoldása esetén milyen módszereket alkalmaznak, milyen a szövegértésük, a problémamegoldó készségük. Célunk továbbá rávilágítani a hiányosságaikra és segíteni a továbbiakban azok pótlásában. Feltételezzük, hogy a hallgatóknak fejtörést okoznak a szöveges feladatok.

Résztvevők

A kutatás résztvevői a Partiumi Keresztény Egyetem 15 *Az óvodai és elemi oktatás pedagógiája* szakos hallgatója (másodévesek), és a Nyíregyházi Egyetem 13 *Tanító* alapszakos hallgatója. Összesen N=15+13=28 hallgató.

Módszer

A kutatás résztvevőinek, a 28 tanítóképzős hallgatónak a Bihar megyei Matematika Olimpiász helyi szakaszának 2016. 03. 24.-i IV. osztályos tanulóknak kitűzött feladatait kellett megoldaniuk. A hallgatók válaszaiban a pontosságot, a megoldási módszereket, azok változatosságát figyeltük és a hibákat elemeztük. A kutatáshoz felhasznált teszt megoldásait vizsgáltuk a Bihar megyei negyedikes minta (N=636) esetén is.
A kutatáshoz felhasznált teszt a következő feladatokat tartalmazta:
1.(20p) Szinbád a tengerész narancsot vásárolt a piacon. A narancsok száma egyenlő a 15 és 8 szorzatának kétszerese kisebbítve a 30 ötödével. Hány narancsot vásárolt Szinbád?
2.(20p) Florin háza a Vaslui és Barlad városokat összekötő úton van. Ha Florin Barladra menne 3-szor több kilométert tenne meg, mintha Vasluig. Ha Vasluira menne 12 km-rel kevesebbet utazna, mint Barladig. Hány km távolság van a két város között?
3.(20p) Két botanikuskert növényeket cserélt egymás között: 5 fikuszt 6 narancsfára, 12 narancsfát 4 citromfára, 8 citromfát 6 kaktuszra és 5 kaktuszt 4 pálmafára. Mennyibe került egy fikusz, ha egy pálma 50 lej?
4.(30p) Egy tartályban kétszer több tej van, mint egy másik tartályban. Ha az elsőből kiveszünk 30 litert, a másodikból 20 litert, akkor az első tartályban 3-szor több tej marad, mint a másodikban.
Hány liter tej volt kezdetben a tartályokban külön- külön?
Hivatalból járt 10 pont, munkaidő 1 óra.
Maximális elérhető pontszám 100.

1.TÁBLÁZAT A HALLGATÓK ÁLTAL ELÉRT PONTSZÁMOK

Hallgatók	I. (20p)	II. (20p)	III. (20p)	IV. (30p)	Összesen (100p)
PKE	17,2 86%	7,46 37,33%	9,73 48,66%	12,8 42,66%	57,2 57,2%
NYE	19,84 99,23%	7,15 35,76%	13,84 69,23%	15,53 51,79%	66,38 66,38%

A kutatás eredményei

A két hallgatói csoport feladatonkénti teljesítményét láthatjuk az 1. táblázatban. Az 1. feladat négy művelet elvégzésével oldható meg, két szorzás, egy osztás és egy kivonásból állt. A PKE hallgatói 86%-ban, míg a NyE hallgatói 99,23%-ban végezték el helyesen. A 2. feladatot közel azonos arányban oldották meg, 37,33%, illetve 35,76%-ban. Itt azt figyeltük, hogy milyen módszerrel oldották meg, használtak-e vázlatos ábrázolásokat, ami segítené őket a feladatmegoldásban. A PKE hallgatóinak 53,33%-a készített jó ábrát, 13,33% félig jó ábrát (ez azt jelenti, hogy a két összefüggés közül, amelyet meg kellett jeleníteni az ábrán, csak az egyik volt helyes), míg 20% rossz ábrát rajzolt. 13,33% nem oldotta meg a feladatot (maximális pontszámot 26,66% kapott).

A NyE hallgatóinak 30,76%-a készített jó ábrát, 53,84% félig jó ábrát, míg 15,38% rossz ábrát rajzolt, (maximális pontszámot 23,07% kapott).

A 3. feladatot fordított út módszerével lehetett megoldani, a végétől indulva el. A PKE 48,66%-ban, míg a NyE 69,23%-ban oldotta meg a feladatot, nem szokványos feladat lévén, logikai gondolkozásra volt szükség. (A különbség a két csoport között itt több, mint 20%!)

A 4. feladat esetén próbálgatás módszerével, vagy algebrai úton (egyenlet felírásával) is meg lehetett oldani a feladatot, ez a PKE-seknek 42,66%-ban, a NyE-nek pedig 51,79%-ban sikerült. A PKE hallgatói 20%-ban találgatással oldották meg, 13,33 % egyenlettel jól megoldotta a feladatot, 33,33% ismeretlen(ek) segítségével jól felírta a tartályok tartalmát, de az egyenletet nem vagy nem jól írta fel. 33,33% nem oldotta meg a feladatot, (maximális pontszámot 33,33% kapott).

A NyE hallgatói 15,38-%-ban találgatással oldották meg, 23,07% egyenlettel jól megoldotta a feladatot, 38,46% ismeretlen(ek) segítségével próbálta felírni a tartályok tartalmát, de az egyenletet nem vagy nem jól írta fel. 23,07% nem oldotta meg a feladatot (maximális pontszámot 38,46% kapott).

Összességében átlagban a PKE 57,2%-ban, míg a NyE 66,38%-ban teljesítette a feladatsort.

Szerettük volna összehasonlítani a két csoport teljesítményét. Első lépésben a két szórás egyenlőségére vonatkozó hipotézisvizsgálatot (F-próbát) végeztem el. *Nullhipotézisem* H_o: $\sigma_x = \sigma_y$, ahol σ_x, σ_y a populációk szórása, amelyből a mintákat véteteztük, azaz a PKE, illetve a NyE hallgatóinak csoportja.

Az F-próba értéke az 1. ábrából kiolvasható: F=1,50 < F kritikus= 2,63, ahol a számláló szabadságfoka 14, a nevezőé pedig 12.

	Variable 1	*Variable 2*
Mean	57,2	66,3846154
Variance	627,028571	415,589744
Observations	15	13
df	14	12
F	1,50876816	
P(F<=f)	0,24053921	
F Critical	2,63712356	

1. ábra: F-teszt a szórások egyenlőségére

A H_o feltevést elfogadhatjuk, azaz a két populáció szórása azonosnak tekinthető az eltérésük nem szignifikáns, az F-próba nem mutatott ki szignifikáns különbséget a szórások között (lásd. 1. ábra), így a t-próba alkalmazásának feltételei adottak voltak.

A két várható érték különbözőségére vonatkozó hipotézisvizsgálat:

A minták egymástól függetlenek és feltételezzük, hogy az eloszlásuk normális, valamint az F próbával végzett vizsgálattal a szórások azonossága fennáll, azaz nincs szignifikáns különbség. A *nullhipotézisünk*: H_0: $\mu_1 = \mu_2$, azaz a várható értékek közelítőleg azonosak.

A statisztikai jellemző *n+m-2=26 szabadsági fokú t-eloszlást* követ (az x szabadságfoka m-1, az y szabadságfoka n-1). A további eljárás azonos az egymintás t-próbával.

	PKE	NYE
létszam	15	13
átlag	57,20	66,38
korrigált szóras	25,04	20,38
korrigált szórásnégyzet	627,03	415,6

t próbastatisztika	**1,052863364**
szignifikancia szint alfa	0,05
szabadság fok n+m-2	26
t táblázatból t(0,05)	**1,706**

2. ábra: t-próba a várható értékek különbözőségére

A t-próba értéke a 2. ábrából kiolvasható: t=1,05 < t kritikus =1,7. A H_o feltevést elfogadhatjuk, a két minta azonos eloszlásból származik, tehát a mintában az átlagok eltérését a véletlen okozza, azaz nem lényegi. Ez számunkra azt jelenti, hogy a felmérésben szereplő két minta közel azonosan teljesített.

A kutatáshoz felhasznált teszt megoldásait vizsgáltuk a Bihar megyei negyedikes minta (N=636) esetén is. (A II., illetve a III. osztálynak más feladatsor volt kitűzve, a IV.-esek feladatsora csak szöveges feladatból állt, és ezek voltak a legnehezebbek, ezért esett ezekre a választás a kutatás során).

A tanulók 22 különböző városi iskolából, illetve 10 nagyobb községből voltak.

A falvak átlagai között nagyon nagy különbségek vannak, a 100; 99,25;

95,25; 92,50......35,29, 29,33 értékek között (csökkenő sorrendben). Összátlag 69,95, a szórás pedig 31,37.
A városi iskolák átlagai között is nagy különbségek vannak, a 100- tól a 29,60-ig (csökkenő sorrendben). Összátlag 80,11, szórás pedig 15,18.

A városi iskolák átlaga nagyobb, a szórás viszont kisebb. Az F-próba értéke a szórások egyenlőségére: F=4,27 > F kritikus= 2,94, ahol a számláló szabadságfoka 21, a nevezőé pedig 9.

A H_o feltevést elvetjük, és elfogadhatjuk a *H1*-t, azaz a két populáció szórására nézve az F-próba szignifikáns különbséget mutatott ki, a vidéki és a városi iskolák által elért eredményt tekintve.

Mivel 10 vidéki, illetve 22 városi minta várható értékeit kívántuk összehasonlítani, ezért egytényezős varianciaanalízist (Anova-tesztet) alkalmaztunk az iskolák által elért teljesítmények értékeire, külön a vidéki iskolákra, és külön a városi iskolákra.

A *H0* nullhipotézisünk, hogy az adott valószínűségi változó (a versenyen elért teljesítmény) várható értéke egyforma a városi iskolákra. Az Anova-teszt szerint az F próba számított értéke F=11,25 nagyobb, mint a táblázatbeli F kritikusérték (F=1,57), a H0 hipotézist elvetjük: a vizsgált valószínűségi változók mintabeli átlagai között az F próba szignifikáns eltérést mutat.

Hasonló eredményre jutottunk a vidéki iskolák esetén is: az Anova-teszt szerint az F-próba számított értéke F=18,91 nagyobb, mint a táblázatbeli F kritikusérték (F=1,96), a vizsgált valószínűségi változók mintabeli átlagai között az F próba szignifikáns eltérést mutat.

3 ÖSSZEGZÉS

Két tanítóképzős hallgatói csoportot vizsgálva a PKE 57,2%-ban, míg a NyE 66,38%-ban teljesítette a feladatsort.
A két csoport teljesítményét tekintve nincs szignifikáns különbség az átlagokat és a szórást illetően. A PKE-sek többet rajzoltak, ami segítette őket a feladatmegoldásban, logikai gondolkodásban a NyE hallgatói jeleskedtek.

A Bihar megyei negyedikes minta (N=636) esetén a falvak összátlaga 69,95, szórás 31,37, a városi iskolák esetén pedig összátlag 80,11, szórás pedig 15,18. Szignifikáns különbség van a vidéki és a városi iskolák által elért összátlagokat tekintve is, és külön- külön csoportként véve a két nagy mintát, azon belül is szignifikáns eltérés mutatható ki.

A pontozás nem volt azonos módon alkalmazva: voltak iskolák, ahol csak a részletes levezetésért járt a maximális pontszám, míg máshol csak az eredmény is ugyanennyit ért. A képzős hallgatók teljesítménye alulmarad a tanulókéhoz viszonyítva.

A hallgatók nem alkalmaznak feladatmegoldó stratégiákat, nem változatosak az alkalmazott módszereik, bizonytalanok. A szövegértelmezésre és a szemléletes (vázlatos ábrázolással történő) megoldásmódokra további nagy hangsúlyt kell fektetni, csakúgy, mint a logikus gondolkodás fejlesztésére.

IRODALOM

[1] A. Ambrus „A problémamegoldás tanításának elméleti alapjai", *Új Pedagógiai Szemle*, 52. évf. 10. sz., 2002, pp. 157-170.

[2] Cs. Csíkos, J. Szitányi, R. Kelemen, ''Vizuális reprezentációk szerepe a matematikai problémamegoldásban- Egy 3. osztályos tanulók körében végzett fejlesztő kísérlet eredményei, *Magyar Pedagógia*, 110. évf. 2. szám, 2010, pp.149–166.

[3] E. Debrenti, „Representations in primary mathematics teaching", *Acta Didactica Napocensia.* Vol. 6/3, 2013.

[4] E. Debrenti, „Matematika és szövegértés", *Partiumi Egyetemi Szemle*. 2/2014.

[5] K. E. Herendiné, „*A matematika tanítása az alsó tagozaton*", Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó. Budapest, 2013.

[6] Gy. Pólya, „*A problémamegoldás iskolája*", Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.

[7] T. Török, "*Szöveges feladatok és tanításuk*", Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt., 2009.

[8] Z. Tuzson, *„Hogyan oldjunk meg aritmetikai feladatokat?*"Módszertani feladatgyűjtemény, Erdélyi Tankönyvtanács, Kolozsvár, 2003.

[9] A. Wechner, „*Matematika. Segédanyag a szöveges feladatok tanításához*". Bács-Kiskun Megyei Önkörmányzat Pedagógiai Intézete, 1992.