

Online matematikai szoftvercsomagok összehasonlítása

Katona János

SZIE Ybl Miklós Építéstudományi Kar, Budapest

katona.janos@ybl.szie.hu

Kulcsszavak: komputer algebra szoftver, matematika didaktika

Kivonat—Igen sokféle matematikai szoftvert ismerünk, amelyek jól használhatók a matematika tanítási-tanulási folyamatában is. Ebben a cikkben összehasonlítunk néhány jellemző szoftvert, amelyekben közös az, hogy ingyenesek, online elérhetőek, és a felsőoktatásban is használhatóak.

Abstract—We know a lot of Computer Algebra System (CAS) applications. Among other things, they are useful for studying and teaching mathematics. In this article we compare some typical CAS software. All of them are free, online and suitable to use in higher education.

1 BEVEZETÉS

A matematikai programcsomagokat (angolul Computer Algebra System azaz CAS) elsősorban fizikusok, mérnökök, matematikusok és rokon szakmák művelői számára fejlesztették ki. Feladatuk, hogy a szakemberek által konstruált matematikai modellek egyenleteit, egyenletrendszereit, differenciálegyenleteit stb. megoldják, ezáltal a mérnököket tehermentesítsék a hosszadalmas és hibalehetőségeikkel teli számítási műveletek alól.

Természetesen nekünk, tanároknak is nagy segítség egy ilyen szoftver. Például rögtön leellenőrizhetjük, hogy az általunk feladott egyenletnek vannak-e megoldásai a valós számok halmazán; illetőleg ha vannak, akkor azonnal láthatjuk, hogy a gyökök egész számok vagy sem. Igen gyorsan nagyon szép grafikonokat és ábrákat készíthetünk, statisztikai elemzé-

seket végezhetünk. A diákok is előszeretettel használják ezeket az alkalmazásokat, például a házi feladat ellenőrzésére vagy éppen a házi feladat végigszámolása helyett a végeredmény lejegyzésére.

2 METÓDUS

Összesen 11 ingyenes online szoftvert választottam ki a kínálatból. Ezek kb. felét ismertem, a másik felét internetes böngészéssel találtam. Természetesen ennél jóval több ilyen rendszer létezik, de ezek voltak a legnépszerűbbek. A keresés angol nyelven történt, tehát elképzelhető, hogy német vagy spanyol nyelvterületen nem ez a 11 alkalmazás használata a leggyakoribb. Magától értetődően a nem ingyenes és/vagy offline CAS szoftverek esetében sem ez a népszerűségi illetve használhatósági sorrend.

Ezek után kiválasztottam 5 olyan teszt-feladatot, amelyet jellemzően tanítunk a

felsőoktatásban. Ezeket sorban megoldattam a programokkal, ezáltal áttekintést kaptam többek között a szoftverek képességeiről, a felhasználó-barátságukról, az adatok bevitelének módjáról, a végeredmények megjelenítésének formájáról.

3 A TESZTFELADATOK

A szoftverek képességeit jelentős számú feladattal vizsgáltam, de ebben a cikkben csak az 1. ábrán látható 5 referenciafeladatot tekintem mérvadónak. Tapasztalatom szerint a tanulók számára gépi segítség nélkül az első probléma kivételével valamennyi feladat nehéznek mondható még a felsőoktatásban is.

Az első feladatot – egy egyszerű egyenletrendszer – a legtöbb középiskolás is meg tudja oldani. Az érdekessége inkább az, hogy a felsőoktatásban lineáris algebrából is előkerül, és hogy többféle lényegesen eltérő módszerrel is nekiláthatunk: Gauss-elimináció, Cramer-szabály, mátrix inverzének megkeresése. Az 1. ábrán látható konkrét esetben az egyenletrendszernek egyértelmű megoldása létezik a valós számok halmazán.

A második feladat egy negyedfokú polinom szorzattá alakítása – vagy ami lényegében ugyanaz – a gyökeinek megkeresése volt. Tesztfeladatnak olyat választottam, amelynek négy különböző valós gyöke van, de vannak olyan szoftverek, amelyek képzetes gyökökkel is boldogulnak.

A harmadik feladat egy számsorozat végtelenben vett határértékének kiszámítása volt. Megfelelő átalakításokkal és helyettesítésekkel a hatvány $(1+1/u)^{6u}$ alakra hozható, így a végeredmény e^6 .

A negyedik feladat egy helyettesítéses integrálás, az $x := 4 \sin(u)$ helyettesítéssel érhetünk legkönnyebben célhoz. Az ötödik feladat még ennél is nehezebb, egy

elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet kell megoldanunk. Számítógép nélkül az eredmény megtalálása hosszadalmas, az eredeti differenciálegyenlethez rendelt homogén differenciálegyenlet általános megoldásához hozzá kell adnunk az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását.

4 ÁLTALÁNOS TAPASZTALATOK

A feladatok megoldása természetesen az adatbevitellel kezdődik. Alapvetően két stratégiát különböztethetünk meg: a karakteres, és a grafikus adatbevitelt.

Karakteres adatbevitelnél gyakorlatilag a billentyűzeten elérhető jeleket használjuk. Ennek megfelelően egy kulcsszóval kezdünk, ami a számítógép számára kijelöli a feladatot (pl. „limes”, „integrate”), majd pedig következik maga a matematikai képlet. A képletben általában csak egyféle (kerek) zárójelet használhatunk, de ezeket igen nagy mélységben egymásba ágyazhatjuk. Régebben a szorzást a „*” jel jelezte, ma már ez több alkalmazásban elhagyható. A speciális jeleket (négyzetgyök, végtelen, kisebb-egyenlő) valamilyen kulcsszóval, függvénnyel, vagy karakterkombinációval helyettesíthetjük. Például a Maxima-online a 3. tesztfeladatunkat a következő alakban fogadja: $\text{limit}(((4*x+3)/(4*x-5))^{(3*x-5)}, x, \text{infinity})$.

Grafikus adatbevitel esetén egy felsorolt jelsorozatból választhatunk például egérkattintással. Ezután egy grafikusan megjelenített képletben tudunk a megfelelő rubrikákba navigálni, ahová a konkrét értékeket azután be tudjuk írni. (Ez a beviteli mód ismerős lehet azoknak, akik a Microsoft Word egyenletszerkesztőjét használták már.)

1. tesztfeladat. *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:*

$$\left. \begin{aligned} 4x + 5y - 3z &= -6 \\ 3x - 2y - 2z &= 2 \\ 2x + 3y + 5z &= 16 \end{aligned} \right\}$$

2. tesztfeladat. *Alakítsuk szorzattá a következő kifejezést:*

$$2x^4 - x^3 - 26x^2 - 11x + 12$$

3. tesztfeladat. *Számítsuk ki az alábbi határértéket:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n + 3}{4n - 5} \right)^{3n-5}$$

4. tesztfeladat. *Keresendő a határozatlan integrál:*

$$\int \sqrt{16 - x^2} \, dx$$

5. tesztfeladat. *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:*

$$y'(x) + y(x) \cdot \cos x = \sin x \cdot \cos x$$

1. ábra A komputeralgebra szoftverek tesztelésére használt feladatsor

Valószínűleg az a legjobb megoldás, ha alkalmazásunk mindkét adatbeviteli módra fel van készítve. (További pozitívum lehetne, ha a kulcsszavakat magyarul is „megértené” a szoftverünk.)

Az adatok bevitel után a szoftver általában elküldi a tennivalót a szervernek, amely a számítások elvégzése után visszaküldi a végeredményt. Ez nyilván aktív és viszonylag gyors internetkapcsolatot igényel. (Amennyiben offline szeretnénk dolgozni, valószínűleg egy nagyméretű fájl kellene a gépünkön tárolni. Ennek két hátránya van: egyrészt

előzetes telepítést igényelne, másrészt sok helyet foglalna, ami például az okostelefonokon okozhat gondot.)

Ezután a böngészőnk ablakában megjelenik a végeredmény. A végeredmény formátuma is lehet karakteres vagy grafikus. A karakteres eredménykiírás előnye régebben az volt, hogy könnyebben meg lehetett jeleníteni és ki lehetett nyomtatni, de ma már szinte csak grafikus képernyőket és nyomtatókat használunk. Sok szoftver a valós-valós függvényeket vázolja is, itt az értelmezési tartomány meg-

felelő leszűkítése jelzi a program intelligenciáját.

Egyszerűbb esetben a matematikai problémának egyetlen megoldása van. A kiírás szempontjából bonyolultabb eset, ha több megoldás létezik, illetve ha a megoldás például a valós számok egy intervalluma. Egyenlet esetén azonosság-nak hívhatjuk azt az esetet, amikor az egyenlőség minden valós számra teljesül. Ezt az alkalmazás vagy szövegesen (angolul) kiírja, vagy például a következőképpen jelzi: $x = x$.

Nagyon óvatosak kell legyünk, ha az alkalmazás nem ír ki megoldást. Maradva a gyökök keresése típusú példánál: lehetséges, hogy az egyenletnek a valós számok halmazán nincs megoldása, de a komplex számok halmazán van. Az is lehetséges, hogy a komplex számok halmazán sincs megoldás, végül a harmadik eset, hogy a komputeralgebra rendszer nincs felkészítve a megadott típusú egyenlet vizsgálatára. Legjobb lenne ezt a három esetet is szövegesen, egyértelműen jelezni. Sajnos ezt nem mindegyik alkalmazás teszi meg, tehát egyes esetekben nem különül el egyértelműen a fenti három lehetőség.

A legrosszabb eset az lenne, hogy a szoftver ad végeredményt, de az helytelen. (Ismét csak az egyenletekre hivatkozva: gyökös kifejezéseket tartalmazó egyenlőségeknél egyik bevett módszer, hogy mindkét oldalt négyzetre emeljük. Mivel ez nem ekvivalens átalakítás, hamis gyököt, illetve hamis gyököket is kaphatunk.) Szerencsére ilyen a tesztelt programokkal és feladatokkal nem fordult elő.

5 KONKRÉTUMOK

Sajnos a programok nagyobb része nem tudta mind az öt feladatot megoldani.

Az 1. táblázat első öt oszlopában + jellel jelöltük, ha kaptunk eredményt; negatív jellel, ha nem. Látható, hogy mindössze négy alkalmazás tudta mind az öt feladatot megoldani, viszont ezek közül egyik sem mutatja ingyenesen a megoldás lépéseit. Ezáltal a házi feladat elkészítései csak akkor nyújtanak segítséget a hallgatóinknak, ha sikerül nekik eljutni a végeredményhez. Ezt össze tudják hasonlítani a szoftver által megadott eredménnyel.

Egészen más a helyzet, ha a hallgatók valahol elakadnak a feladatok megoldása során. Ekkor azoknak a szoftvereknek veszik hasznát, amelyek a megoldás módszerét is megadják, illetve lépésről lépésre ismertetik a számítás menetét.

Egyre több hallgatónak van okostelefonja és mobilinternet előfizetése. Ezért az 1. táblázatban feltüntettem azokat a szoftvereket, amelyek léteznek a két leggyakoribb mobil operációs rendszerhez készített applikációja. (Zárójelben megjegyzendő, hogy ezekkel a puskázás lehetősége új, magasabb szintre került. A telefonokon és okosórákon már nem csak statikus tartalmakat tárolhatunk, hanem ezek már a problémamegoldás segítésére is alkalmasak.)

Léteznek már olyan szoftverek is, amelyek a matematikai képletek bevitelét nagyban segítik. A legtöbb okostelefon és érintőképernyős tablet rendelkezik kézírás felismerő alkalmazással. Ezek kiegészítéseként elérhetők olyan applikációk, amelyek a kézzel írt matematikai képleteket is azonosítják. Más alkalmazások a mobiltelefonnal készített fényképeken szereplő képleteket fordítják át a komputeralgebrai rendszerek számára érthető formába.

1. TÁBLÁZAT

NÉHÁNY INGYENES ONLINE KOMPUTERALGEBRA RENDSZER ÖSSZEHASONLÍTÁSA

	1	2	3	4	5	a megoldás lépései	ios és android app
Cymath	+	+	-	+	-	ingyenes	ingyenes
MapleCloud	+	+	+	+	+	-	-
Mathics	+	+	+	+	+	-	-
Mathpapa	-	+	-	-	-	ingyenes	ingyenes
Mathway	+	+	-	+	-	fizetős	ingyenes
Maxima-online	+	+	+	+	+	-	-
Quickmath	-	+	-	+	-	fizetős	-
Symbolab	+	+	+	-	+	ingyenes	ingyenes
Webmath	-	-	-	-	-	ingyenes	-
WolframAlpha	+	+	+	+	+	fizetős	fizetős
Yacas Online	+	+	+	-	-	-	-

6 MÓDSZERTANI MEGJEGYZÉSEK

Mindenképpen kívánatos, hogy például egy mérnökjelölt, vagy gazdasági szakember találkozzon ilyen szoftverekkel. Fontos megtanulni a szintaktikát, ami szerencsére viszonylag egységes. Például a táblázatkezelő rendszerekben is ugyanúgy jelöljük a hatványozást (a „^” jellel) és ugyanúgy ágyazzuk egymásba a zárójeleket, mint a komputeralgebra szoftverekben.

Ugyanakkor a végeredmény pusztá lekérdése nem elegendő, a megoldást értelmezni is kell tudni. Tisztában kell lennünk azzal, mit jelentenek az eredményben szereplő változók, függvénynevek (pl. \exp , \cos , \arcsin), konstansok (pl. e , i , π). Határozatlan integrál és elsőrendű differenciálegyenlet esetében értenünk kell a szokásosan „C”-vel jelölt konstans

szerepét. (Előfordul, hogy ezt a konstans a komputeralgebra alkalmazás nem is írja ki.)

Továbbmenve például a negyedik feladatban szereplő függvény értelmezési tartománya nem a teljes valós számok halmaza, ezt nyilván a végeredmény értelmezésénél is figyelembe kell venni. Ebből a szempontból jobbak voltak azok a szoftverek, amelyek a végeredményt is gyökös alakban adták meg, talán így könnyebb volt a diskusszió.

Arra mindenképpen alkalmasak ezek a programok, hogy az otthon önállóan megoldott feladatokat azonnal leellenőrizzük, mivel az azonnali visszajelzés inspiráló lehet. Ha viszont valahol elakadtunk a gyakorlás során, akkor kizárólag azok a szoftverek segítenek, amelyek a megoldás lépéseit is megadják.

7 ÖSSZEGZÉS

Én úgy ítélem meg, hogy mind a 11 szoftvert érdemes volt megnézni. Mindegyik másban erős, mindegyik tud valami olyat, amit a többi általában nem: könnyített adatbevitel, a megoldás lépéseinek mutatása, komplex számok használata, szabályok tanítása, gyakoroltatás, többféle megoldási módszer közötti választás, stb. Van, amelyik általános iskolában is hasznos; van, amely középiskolásoknak megfelelőbb; és van, amelyiknek a tudását a felsőoktatásban is kamatoztathatjuk. Egyes programoknak a tanárok fognak jobban örülni, másoknak a diákok.

Mindenesetre ha komputeralgebra rendszert szeretnénk használni, akkor valószínűleg a következő tulajdonságokkal rendelkező szoftvert választanánk:

- Univerzális, tehát sokféle feladattípussal elboldogul
- Erős, tehát bonyolult megoldási eljárásokat is végre tud hajtani
- Ingyenes
- Használatához nem szükséges semmilyen segédprogram, a funkciók egyszerűen böngészőből elérhetők
- Okostelefonon is működik
- Offline is használható

- Nem csak a megoldást adja meg, hanem az ahhoz vezető lépéseket is
- Szintaktikája egyszerű, magától értetődő
- Az eredmények kiírása grafikusán történik
- Többféle megoldási módszer közül választhatunk
- Az eredményt többféle alakban is kiírja
- Az egyenletek, egyenletrendszerek komplex gyökeit is megadja
- A valós-valós függvényeket grafikusán is vázolja
- Magyar nyelven is elérhető

Tudomásom szerint egyelőre nincs ilyen szoftver a piacon, tehát nekünk kell eldöntenünk, hogy a fenti paraméterek közül melyek szükségesek mindenképpen; és melyek azok, amelyek tekintetében kompromisszumot kell kötnünk.

IRODALOM

- [1] L. Bernardin, *A Review of Symbolic Solvers*, SIGSAM Bulletin, Vol.: (30)1, 1996, pp. 9-20.
- [2] S. Czirbusz, A. Kovács and N. Tihanyi, *Matematikai modellek komputeralgebrai támogatással*, ELTE IK, 2014.