Conference Paper for MAFIOK 2016.
Óbuda University Alba Regia Technical Faculty, Hungary, Székesfehérvár

Gondolatok a Lagrange Interpolációs Polinom tanítása kapcsán

Kovács István Béla
BGE PSZK, Módszertani Intézet, Budapest, Hungary

Kovacs.IstvanBela@uni-bge.hu

Kulcsszavak: Lagrange interpoláció, magasabb rendű számtani sorozat, véges differenciák

Kivonat Bemutatjuk, hogyan alakítottuk át a Lagrange interpolációs polinom tanítását informatika szakos hallgatók numerikus módszerek kurzusában, jobban kihasználva a lineáris algebra fogalmait. Említünk egy tanítható alkalmazást, és egy erre vonatkozó elegáns tárgyalás módot.

Abstract We show first how we have transformed teaching Lagrange interpolation making better use of the concepts of linear algebra in a course of numerical methods for informatics students. We introduce an application that can be taught in the course and present an elegant treatment of the topic.

1 BEVEZETÉS

A Budapesti Gazdasági Főiskolán (ma már egyetem) 2012 őszén kezdődött a gazdaságinformatikus képzés. A lineáris algebra és numerikus módszerek tárgyak fejlesztése az én feladatom volt. A numerikus módszerek tárgy tartalmának meghatározásához több forrást is fölhasználtam. Összehasonlítottam több hazai főiskola és egyetem elektronikusan hozzáférhető jegyzeteit. Szempont volt, hogy a kurzus nagy részét könnyen beszerezhető tankönyvre alapozzuk. Mivel a numerikus módszerek tárgy 1 + 1-es, azaz két hetente előadás és két hetente gyakorlat, így a félév során hat előadás hangozhat el, és hat gyakorlaton találkozunk. A témák részletes kifejtésére kevés a lehetőség. Célunk volt tehát a legfontosabb, modern eljárásoknak is alapját képező klasszikus gondolatok bemutatása. A matematikát oktató abban reménykedik, hogy tárgyának legalább a hallgatóság tovább tanulást választó része hasznát fogja venni. A tankönyv kiválasztásában így az is szerepet játszott, hogy a kurzusban tanultakat zökkenőmentesen lehessen továbbfejleszteni. A képzés beindításának idején Stoyan Gisbert, Numerikus Módszerek Mérnököknek és Programozóknak című könyve állt rendelkezésre a legtöbb könyvesboltban [1]. Elég vékony és olcsó ahhoz, hogy néhány hallgató a polcán akarhassa tudni. A többiekre való tekintettel a kurzus megindításakor rendelkezésre állt saját jegyzet.

2 A LAGRANGE INTERPOLÁCIÓS POLINOMRA VONATKOZÓ FEJEZET ÁTDOLGOZÁSA

A régi változatban a probléma fölvetését követően azonnal definiáltuk a Lagrange alap polinomokat

$$q_i(x)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j} \qquad (1)$$

Fölhasználva, hogy $q_j(x_j)=1$ míg $q_j(x_i)=0$ ha $i\neq j$, beláttuk, hogy

$$L(x)=\sum_{j=0}^{n} f_j\cdot q_j(x) \qquad (2)$$

olyan legfeljebb n-1 fokú polinom ami teljesíti $L(x_j)=f_j,\quad j=1,2,....,n$ tulajdonságot. Ez után az algebra alaptételéből beláttuk, hogy a Lagrange interpolációs polinom egyértelmű a legfeljebb n-1 fokú polinomok között.

Ezt követően azonnal áttértünk a Newton rekurzió tárgyalására, megemlítve hogy L(x) előállítása az alap polinomok felhasználásával nagyon művelet igényes.

A Newton rekurzióval L(x)-et $c_1+c_2\cdot(x-x_1)+.....+c_n\cdot(x-x_1).....(x-x_{n-1})$ alakban szeretnénk előállítani. Ennek lehetőségét a könyvet követően indukcióval bizonyítottuk.

Az új változatban először a legfeljebb n-1 fokú polinomok terének bázisaival kezdünk. E szerint $1, x, x^2, ..., x^{n-1}$ tekinthető $R_{n-1}[x]$ természetes bázisának. Ha $x_1, x_2, ..., x_n$ különböző számok, akkor

$$q_i(x)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j} \qquad (3)$$

is bázis, amiből minden $R_{n-1}[x]$ polinom egyértelműen kikombinálható. Továbbá $1,\ (x-x_1),\ (x-x_1)\cdot(x-x_2),\ .....,(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot...\cdot(x-x_{n-1})$ is bázis, hiszen az n = 3, n = 4 esetekhez hasonlóan a bázis transzformáció mátrixa háromszög mátrix 1 determinánssal. Így az oszlop vektorok függetlenek.

n = 3

	1	$x-x_1$	$(x-x_1)\cdot(x-x_2)$
1	1	$-x_1$	$x_1\cdot x_2$
x	0	1	$-(x_1+x_2)$
x^2	0	0	1

n = 4

	1	$x-x_1$	$(x-x_1)\cdot(x-x_2)$	$(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)$
1	1	$-x_1$	$x_1\cdot x_2$	$-x_1\cdot x_2\cdot x_3$
x	0	1	$-(x_1+x_2)$	$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$
x^2	0	0	1	$-(x_1+x_2+x_3)$
x^3	0	0	0	1

A determináns szóra a fejek lehajlanak, de a háromszög mátrix említésekor a hallgatók fele mosolyogva néz fel. Ezzel a Lagrange interpolációs polinom létezése és egyértelműsége biztosított, az indukciót pedig egyelőre kiküszöböltük a Newton rekurzióból.

Kimondjuk, hogy ha p(x) k fokú polinom értékét legalább k + 1 helyen adjuk meg, akkor az alappontokhoz tartozó Lagrange interpolációs polinom éppen p(x).

Végül mindkét változatban bevezetjük az $[x_k, \ldots, x_m] = \sum_{i=k}^{m} f_i \cdot \prod_{\substack{j=k \\ j \neq i}}^{m} \frac{1}{x_i - x_j}$ és $[x_k] = f_k$ jelöléseket. Segítségükkel a Fraser diagram elvét az alábbi két lemmával igazoljuk:

Lemma 1. A fönti jelölésekkel $c_k = [x_1, \ldots, x_k]$.

Lemma 2. $[x_k, \ldots, x_m] = \frac{[x_{k+1}, \ldots, x_m] - [x_k, \ldots, x_{m-1}]}{x_m - x_k}$.

A kurzus kollokviumos, a dolgozatban elméletet nem kérdezünk, ám Lemma 1. könnyű bizonyítása az anyaghoz tartozik, Lemma 2. induktív bizonyítását melléklet tartalmazza. A dolgozatban két változatot lehetett kérdezni, adja meg L(x)-et az alap polinomok segítségével (másodfokú), vagy a Newton rekurzióval (harmadfokú).

A változtatásnak több oka is volt. Elkerülni a rutint, jobban támaszkodni az előző félév lineáris algebrájára, kiterjeszteni a vizsga feladatok körét, és bevezetni a következő alkalmazást.

3 EGY TANÍTHATÓ ALKALMAZÁS

Fölhasználjuk a Lagrange interpolációs polinomot az $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$ összegek kiszámítására. A magasabb rendű számtani haladványok fordított irányú alkalmazására Szele Tibor is fölhívja a figyelmet [4] és utal rá Anthony Ralston [2].

Előadáson bevezetjük a sorozatok magasabb rendű differencia sorozatait:

(a_n)	1		3		2		5		2		4
(Δa_n)		2		-1		3		-3		2	
$(\Delta^2 a_n)$			-3		4		-6		5		....
$(\Delta^3 a_n)$				7		-10		11		....	

Definiáljuk a k rendű számtani haladványokat: $b_n = n^3 - n + 1$ harmadrendű számtani sorozat:

(b_n)	1		1		7		25		61		121
(Δb_n)		0		6		18		36		60	
$(\Delta^2 b_n)$			6		12		18		24		....
$(\Delta^3 b_n)$				6		6		6		....	

majd belátjuk a következő tételt.

TÉTEL 3. Az „n” változó k fokú polinomjával definiált sorozatok k rendű számtani sorozatok.

A fordított állítást

TÉTEL 4. A k rendű számtani sorozatok megadhatók az „n” változó k fokú polinomjaként.

nem bizonyítjuk, megemlítjük, hogy induktív bizonyítása megtalálható Szele Tibor könyvében [4].

Most már (a_n) sorozathoz definiáljuk

$$S(n)=\begin{cases} a_0+a_1+\ldots+a_{n-1} & ha \quad n\geq 1 \\ 0 & ha \quad n=0 \end{cases}$$

részletösszegek sorozatát, és összehasonlítjuk Fraser tábláikat.

Ha (a_n) k fokú számtani sorozat, akkor $(S(n))$ k + 1 fokú számtani haladvány, így az előállító polinom éppen a Lagrange interpolációs polinom. Legyen $p(x)$ az (a_n)-et előállító polinom, $a_n=p(n)$. Jelölje továbbá $(x)_k$ az $x(x-1).....(x-k+1)$ szorzatot!

$$\begin{array}{llllll}
0 & p(0) & & & & \\
 & & \Delta\, p(0) & & & \\
1 & p(1) & & \frac{1}{2}\cdot\Delta^2 p(0) & & \\
 & & \Delta\, p(1) & & \frac{1}{3!}\cdot\Delta^3 p(0) & \\
2 & p(2) & & \frac{1}{2}\cdot\Delta^2 p(1) & \ldots\ldots & \frac{1}{k!}\cdot\Delta^k p(0) \\
 & & \Delta\, p(2) & & & \\
 & & & & \frac{1}{3!}\cdot\Delta^3 p(k-3) & \\
 & & & \frac{1}{2}\cdot\Delta^2 p(k-2) & & \\
 & & \Delta\, p(k-1) & & & \\
k & p(k) & & & &
\end{array}$$

miatt

$$L(x)=\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j\,!}\cdot\Delta^j\, p(0)\cdot(x)_j \qquad (4)$$

míg

$$\begin{array}{lllllll}
0 & S(0) & & & & & \\
 & & p(0) & & & & \\
1 & S(1) & & \frac{1}{2}\cdot\Delta\, p(0) & & & \\
 & & p(1) & & \frac{1}{3!}\cdot\Delta^2 p(0) & & \\
2 & S(2) & & \frac{1}{2}\cdot\Delta\, p(1) & & ..... & \\
 & & p(2) & & ..... & & \frac{1}{(k+1)!}\cdot\Delta^k p(0) \\
 & & & & & ..... & \\
 & & & & \frac{1}{3!}\cdot\Delta^2 p(k-2) & & \\
k & S(k) & & \frac{1}{2}\cdot\Delta\, p(k-1) & & & \\
 & & p(k) & & & & \\
k+1 & S(k+1) & & & & &
\end{array}$$

miatt

$$L_S(x)=S(0)+\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{(j+1)\,!}\cdot\Delta^j\, p(0)\cdot(x)_j \qquad (5)$$

Ha tehát

$$L(x)=c_1+\sum_{j=2}^{k+1}c_j\cdot(x)_j\,, \qquad (6)$$

akkor

$$L_S(x)=\sum_{j=1}^{k+1}\frac{c_j}{j}\cdot(x)_j \qquad (7)$$

.

Végül $L_S(n)=S(n)$ miatt $p(0)+p(1)+.....+p(n)=L_S(n+1)$. (8)

Gyakorlaton kiszámoltuk az $1^2+2^2+....+n^2$ és $1^3+2^3+....+n^3$ összeget előállító polinomokat.

A feladatok változatosabbá tétele érdekében kérdeztem már kollokviumi dolgozatban ezek előállítását. A hallgatók több mint nyolcvan százaléka foglalkozott vele, harmaduk pedig tökéletes levezetést adott. Bonyolultnak tartott algoritmust szívesen tanulnak, míg egyszerű eljárások részleteire kevésbé figyelnek.

4 A HÁTTÉR

A továbbiakban áttérünk olyan dolgokra, amik a kurzusba már nem férnek bele, de jól megvilágítják a fönt mondottakat, és további következtetésekre vezetnek. Az alábbiak Richard P. Stanley könyvén alapulnak [2].

Legyen A egy Abel csoport, $f : Z \to A$ pedig függvény.

Δ a differencia operátor, $\Delta\, f : \quad n \quad \mapsto \quad f(n+1) - f(n)$,

$\Delta^k f = \Delta\left(\Delta^{k-1} f\right)$

E az eltolás operátora, $E\, f : \quad n \quad \mapsto \quad f(n+1)$,

I az identitás, $I\, f : \quad n \quad \mapsto \quad f(n)$.

Ekkor $\Delta = E - I$ miatt az operátorok kommutálnak, és

$$\Delta^k f = (E - I)^k f = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \cdot E^j f$$

$$\Delta^k f(0) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \cdot f(j) \cdot \qquad (9)$$

Ugyancsak érvényes

$$f(n) = E^n f(0) = (I + \Delta)^n f(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \Delta^k f(0) \cdot \qquad (10)$$

Most már TÉTEL 4. könnyen bizonyítható.

Ha $f(n)$ m rendű számtani haladvány, akkor $\Delta^{m+j} f(0) = 0 \quad ha \quad j = 1, 2, \ldots.$

$m \le n$ értékekre

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \Delta^k f(0)$$

$$= f(0) + n \cdot \Delta^1 f(0) + n(n-1)\frac{\Delta^2 f(0)}{2\,!} + \ldots..$$

$$+ n(n-1)\ldots..(n-m+1)\frac{\Delta^m f(0)}{m\,!} = p(n) \qquad (11)$$

pontosan m fokú polinomja „n"-nek.

$n < m$ mellett is $p(n) =$

$$f(0) + n \cdot \Delta^1 f(0) + \ldots.. + n\,! \cdot \frac{\Delta^n f(0)}{n\,!} = f(n) \qquad (12)$$

Így már egyszerű az interpolációs polinom megszerkesztése.

ÁLLÍTÁS 5. Tetszőleges $p_0, p_1, \ldots., p_n$ számokhoz megadhatunk legföljebb n fokú polinomot, amivel $p(j) = p_j$ minden indexre.

$$\begin{array}{ccccccccc}
p_0 & & p_1 & & \cdots & & p_{n-1} & & p_n \\
 & \Delta p(0) & & & & & & \Delta p(n-1) & \\
 & & \Delta^2 p(0) & & & & & & \\
 & & & \cdots & & \cdots & & & \\
 & & & & \Delta^n p(0) & & & &
\end{array}$$

ugyanis kiegészíthető $\Delta^n p(j)$ konstans választással úgy, hogy p_j n fokú számtani sorozat legyen. Ez után

$$p(k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot \Delta^j p(0) \cdot \qquad (13)$$

ÁLLÍTÁS 6. Ha $p(x)$ m fokú polinom és $S(n) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{n-1} p(j) & ha \quad n \geq 1 \\ 0 & ha \quad n = 0 \end{cases}$, akkor

$$S(n) = \sum_{j=1}^{m} \binom{n}{j} \cdot \Delta^{j-1} p(0)$$

.

A bizonyításhoz csak annyit kell meggondolnunk, hogy

$$S(n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot \Delta^{j} S(0), \tag{14}$$

továbbá $\Delta\, S(n) = p(n)$ miatt $\Delta^{1+j} S(n) = \Delta^{j} p(n)$. (15)

Például: $p(j) = j^2$ esetén

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & 1 & & 4 \\ & 1 & & 3 & \\ & & 2 & & \end{array} \quad \text{miatt } S(n) =$$

$$\binom{n}{1} \cdot 0 + \binom{n}{2} \cdot 1 + \binom{n}{3} \cdot 2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \tag{16}$$

Említsünk meg még egy formuláinkból kiolvasható eredményt!

Legyen $[n] = \{1, 2, ..., n\}$. Ekkor a $[d]$halmazt$[n]$-be képező függvények száma n^d. Jelentse $S(d, k)$ a $[d]$halmaz k nem üres osztályú partícióinak számát, $(n)_k$ pedig az $n(n-1).....(n-k+1)$ szorzatot!

Ekkor a $[d]$halmazt$[n]$-be képező függvényeket a képterük elemszáma alapján osztályozva

$$n^d = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot k! \cdot S(d, k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (n)_k \cdot S(d, k) \cdot \tag{17}$$

Ugyan akkor

$$n^d = \sum_{k=0}^{n} (n)_k \cdot \frac{1}{k!} \cdot \Delta^k p(0) \cdot \tag{18}$$

Ezért

$$S(d, k) = \frac{1}{k!} \cdot \Delta^k p(0) \tag{19}$$

és előállítottuk a másodfajú Sterling számokat is! Kihasználjuk itt, hogy ha $k > d$, akkor mind $\Delta^k p(0)$ és $S(d, k)$ zérus, így az összegzést 0-tól d-ig végezzük. Ekkor

$$q(x) = \sum_{k=0}^{d} \left(S(d, k) - \frac{1}{k!} \cdot \Delta^k p(0) \right) \cdot (x)_k$$

legfeljebb d fokú polinom végtelen sok zérus hellyel rendelkezik, így az együtthatók megegyeznek.

IRODALOM

[1] S. Gisbert, Numerikus Matematika Mérnököknek és Programozóknak, TYPOTEX, Budapest, 2007.

[2] A. Ralston, Bevezetés a Numerikus Analízisbe, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969, pp. 58-68.

[3] R. P. Stanley, Enumerative Combinatorics, Vol 1, Cambridge University Press, 1997, pp. 36-38.

[4] T. Szele, Bevezetés az Algebrába, Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, pp. 82-87.