Conference Paper for MAFIOK 2016.
Óbuda University Alba Regia Technical Faculty, Hungary, Székesfehérvár

Geodézikus poliéderek az építész hallgatók geometria oktatásában

Talata István*

*Szent István Egyetem,
Ybl Miklós Építéstudományi Kar, Budapest
talata.istvan@ybl.szie.hu

Kulcsszavak: geometria oktatás, poliéder, geometriai transzformációk, építészet

Kivonat—**Geodézikus poliéderen egy szabályos test vagy más konvex poliéder olyan háromszög-lapokkal történő finomítását értjük, amely egy jó gömbi közelítést ad. Egy n-edrendű geodézikus poliéder rekurzívan definiálható (tetszőleges $n \geq 1$ esetére), mint egy $(n-1)$-edrendű geodézikus poliéder háromszöglapokkal történő finomítása. Geodézikus kupolát 1923-ban Walther Bauersfeld tervezett először, de a geodézikus kupolák, valamint geodézikus poliéderek az 1960-as években Buckminster Fuller népszerűsítésében váltak közismertté. A balatonboglári Gömbkilátó fémszerkezete egy geodézikus poliéder élváza.**

A Szent István Egyetem Ybl Miklós Építéstudományi Karán tartott Számítógépes térgeometriai modellezés kurzusok egyik témaköre a geodézikus poliéderek modellezése: különböző szoftverekkel (AutoCAD, Cabri 3D, GeoGebra) modellezzünk ezek közül olyan poliédereket, melyek esetében, azok magas fokú szimmetriája alapján, geometriai transzformációk használatával készíthetjük el a lapjaikat. Ez segíti az építész hallgatókat, hogy jobban megértsék a poliéderek és a geometriai transzformációk tulajdonságait, és fejlődjön a térlátásuk.

Abstract—**A geodesic polyhedron is a triangulation of a Platonic solid or other convex polyhedron to produce a close approximation to a sphere. A geodesic polyhedron of order n can be defined recursively, for every $n \geq 1$, by creating it as a refined triangulation of a geodesic polyhedron of order $(n-1)$. Geodesic domes were invented by Walther Bauersfeld in 1923, but geodesic domes and geodesic polyhedra, respectively, were popularized by Buckminster Fuller in the 1960's. In Balatonboglár, the metal structure of the Spherical Lookout is the edge framework of a geodesic polyhedron.**

It is one of the topics in the course "Space Geometry with Computers" at Ybl Faculty of Szent István University to model geodesic polyhedra with different softwares (AutoCAD, Cabri 3D, GeoGebra), and because we choose among those polyhedra those ones that have high level of symmetry, therefore geometric transformations can be used to construct all of the many faces of such polyhedra. This helps architecture students to have a better understanding of polyhedra and geometric transformations, and to develop their space vision.

1 BEVEZETÉS

A Szent István Egyetem Ybl Miklós Építéstudományi Karán tartott Számítógépes térgeometriai modellezés szabadon választható tárgy kurzusainak tematikájában nagy hangsúllyal szerepel a poliéderek témaköre.

A 2015/16-os tanévben a geodézikus poliéderek modellezése is bekerült ezen kurzusok poliéderekkel foglalkozó tananyagrészébe, mivel építészeti szempontból is érdekes, önhordó szerkezetekkel bírnak azok az építmények, melyek szerkezete geodézikus poliédernek, vagy geodézikus kupolának az élváza.

A geodézikus poliéderek olyan, csak háromszöglapokkal rendelkező poliéderek, amelyek gömböt közelítenek meg, és amelyekre egy megfelelő eljárást többször egymás után alkalmazva, olyan egyre több csúccsal, éllel és lappal rendelkező geodézikus poliéderek adódnak, melyek alakja egy gömb egyre jobb közelítése. Geodézikus kupolán pedig olyan, csak háromszöglapokból álló poliéderfelületet értünk, amely egy félgömb (vagy általánosabban egy gömbszelet) gömbfelületi részét közelíti meg, tehát egy geodézikus poliéder felületének olyan darabját, amely a poliéder sokszöglapjainak egy részhalmaza, és egy egész gömbfelület helyett annak csupán egy szelését közelíti meg.

A „geodézikus" szó a geodézikus poliéderek nevében arra utal, hogy ezek a poliéderek egy gömböt közelítenek meg, melynek geodézikus (elterjedtebb magyar fordításban: geodetikus) vonalai a főkörök, míg az ilyen poliéderek élei főkörívek közelítései, és a megfelelő eljárás ismételt alkalmazásával, ahogy egyre jobban közelíti az eredményül kapott geodézikus poliéder a gömböt, adott hosszúságú főkörívek egyre több élből álló közelítéseként jelennek meg a geodézikus poliéder bizonyos éleinek sorozatai.

Ezeknek a poliédereknek, ill. kupoláknak a számítógépes modellezésekor olykor hatékonyan lehet alkalmazni geometriai transzformációkat, mivel ha szabályos test vagy archimédeszi test laphálójának finomításaként készítünk el egy geodézikus poliédert, akkor egy megfelelő poliéderrész elkészítése után, alkalmasan (a kiindulási test szimmetriáihoz tartozó) választott forgatásokat, tükrözéseket alkalmazva az egész geodézikus poliéder felszínét megkaphatjuk.

Ezáltal geodézikus poliéderek készítése közben a hallgatók elmélyíthetik ismereteiket a geometriai transzformációk témekörében és a poliéderek több tulajdonságát is jobban megismerik.

2 POLIÉDEREK AZ ÉPÍTÉSZ HALLGATÓK GEOMETRIA OKTATÁSÁBAN

A Számítógépes térgeometriai modellezés tárgy építész hallgatói korábbi tanulmányaik alapján már általában jól ismerik a szabályos testeket, és alapozó CAD kurzuson azok modellezését is elsajátították. A térgeometria kurzuson mindezen túlmenően, megismerkednek az archimédeszi testekkel és a Johnson poliéderekkel, valamint azok CAD modellezését is megtanulják: szabályos sokszöglapok megfelelő (térben kiszerkesztett) szögben való felhajtásával készítik el ilyen poliédereknek a csúcsalakzatait. Elsajátítják azt is, hogy ehelyett szelések (csonkolások) és eltolások (testek vagy lapok eltolásai) is alkalmazhatók bizonyos archimédeszi testek elkészítésekor, alkalmasan választott szabályos testből kiindulva. Archimédeszi testek csúcsait felhasználva egymást metsző sokszöglapok vagy csillagsokszöglapok csúcsaihoz, uniform csillag-poliéderek készítése is szerepel a térgeometria tantárgyi tematikában.

A hallgatók által a szabályos testekre már megismert dualitás fogalmat kiterjesztjük archimédeszi poliéderek duális poliédereinek a meghatározására is, poláris poliéderüket elkészítve előállíthatók ilyen poliéderek is.

A kurzusokon a CAD modellezés AutoCAD szoftverrel történik, emellett dinamikus geometriai szoftvereket (Cabri 3D, GeoGebra) is használunk poliéder-modellezésre. Ez utóbbi esetekben a szabályos testek már elérhetők közvetlen paranccsal, illetve a szoftverre sajátosan jellemző eszközökkel is kombinálhatjuk az említett poliéderek elkészítését (lapok felhajtását, vagy poliéderek szelését, esetleg testek, lapok eltolását), pl. Cabri 3D esetében konvex burok eszköz is használható, GeoGebra esetében pedig objektumok (pl. csúcsok, lapok) sorozata készíthető el akár egyetlen paranccsal.

Egy poliéder laphálójának dinamikus kinyitása/becsukása is megvalósítható a nevezett dinamikus geometriai szoftverekkel – akár egy ennek megfelelő eszköz behívásával (pl. a Cabri 3D-ben konvex poliéderek esetén, GeoGebrában pedig gúla, hasáb, szabályos testek esetén használható ilyen eszköz vagy parancs), akár a felhasználó által elkészítve, sokszöglapok megfelelő forgatásait megvalósítva, a forgatási szögeket alkalmasan változtatva.

3 A GEODÉZIKUS KUPOLÁK ÉS GEODÉZIKUS POLIÉDEREK TÖRTÉNETE

Geodézikus kupolát elsőként Walther Bauersfeld tervezett a jénai planetáriumba, amelynek első verzióját a Zeiss Művek egyik épületének a tetejére építették 1923-ban, majd ezután egy nagyobb, szintúgy geodézikus kupolával rendelkező, de önálló épületben elhelyezett planetáriumot is tervezett, ez 1926-ban nyílt meg a látogatók előtt

A geodézikus kupolák és geodézikus poliéder szerkezetű épületek Richard Buckminster Fuller népszerűsítésében váltak közismertté, ő valószínűleg Bauersfeldtől függetlenül újra felfedezte a geodézikus kupolákat, valamint a geodézikus poliédereket, és az azokra lehetséges többféle elkészítési eljárást is szisztematikusan feltérképezett. Az 1940-es évek második felétől foglalkozott ezzel a témakörrel, és 1954-ben az USA-ban szabadalmaztatott is bizonyos típusú geodézikus kupolákat. Továbbá, az általa alapított cégeken keresztül több ezer, geodézikus kupola és geodézikus poliéder szerkezetű épület megvalósításában közreműködött. Az 1960-as években volt a geodézikus kupolák és poliéderek fénykora, pl. az 1967-es Montreáli Expo amerikai pavilonja is egy Buckminster Fuller tervei alapján készült geodézikus kupola volt.

A balatonboglári Xantus János Gömbkilátó fémszerkezete egy geodézikus poliéder élváza, ez a Kádár István által az 1963-as BNV-re tervezett Magyar Atomium, a belföldi idegenforgalom pavilonjának a háromszöglemezektől megfosztott, és Városligetből Balatonboglárra szállított szerkezete, melyet az 1958-as Brüsszeli Világkiállítás jelképévé vált Atomium ihletett. A Gömbkilátó poliéderszerkezete az ún. geodézikus dodekaéder L2 poliéderének felel meg (ld. 4. fejezetet), 240 háromszöglapból, 360 élből és 122 csúcsból áll. Négyféle hosszúságú él alkotja az élvázát, ezek kétféle háromszöglapot határoznak meg. A leghosszabb él a legrövidebb élnél kb. 16%-kal hosszabb csupán. A poliéder mindegyik csúcsában 6 él találkozik, kivéve 12 csúcsot, amelyekben pontosan 5 él találkozik - ezek egy szabályos dodekaéder csúcsainak az irányában helyezkednek el.

Egy, a témakörhöz kapcsolódó poli-édertípust alkotnak az ún. Goldberg poliéderek. Goldberg poliéderen olyan poliédert értünk, amelynek ikozaéderes forgási szimmetriája van, minden lapja ötszög vagy hatszög, és egy csúcsban három lap találkozik. A geodézikus poliéderek közül soknak a duálisa (pontosabban: poláris poliédere) egy Goldberg poliéder, pl. amikor ikozaéder vagy dodekaéder alaptestből indulunk ki, és az ikozaéderes forgásszimmetriát és konvexitást megőrizzük a geodézikus poliéder lapjainak finomítása során, akkor ilyen poliédert kapunk, tehát a geodézikus dodekaéder Ln és geodézikus ikozaéder Ln ilyen poliéderek $1 \leq n \leq 3$ esetén (ld. 4. fejezetet az ilyen poliéderek leírásáért).

A kémiában is feltűnik bizonyos (a nanotechnológiában alkalmazható) molekulák kapcsolata a geodézikus poliéderekkel: a fullerének olyan molekulák, melyek gömbhéjszerkezetűek, azaz egy gömb felületéhez közel elhelyezkedő atomokkal rendelkeznek, elég nagy üres térrészt közrezárva – ezeknek a molekuláknak sok érdekes tulajdonságuk van. Az elsőként talált ilyen molekula, a Buckminsterfullerén-C60 (amely focilabda alakú) 1985-ös felfedezéséért 1996-ban kémiai Nobel-díjat kapott H. Kroto, R. Curl és R. Smalley. Azóta már találtak olyan fullerént is (a C240 jelűt), amely 240 atomból áll, és szerkezete a Gömbkilátó geodézikus poliéderének duálisa, amely egy Goldberg poliéder.

4 Geodézikus poliéderek és geodézikus kupolák konstrukciói

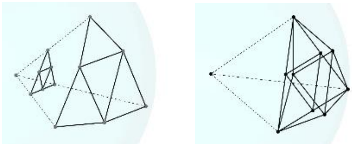
Egy n-edrendű geodézikus poliéder rekurzívan definiálható (tetszőleges $n \geq 1$ esetére), mint egy $(n-1)$-edrendű geodézikus poliéder háromszöglapokkal történő finomítása. A következőkben néhány eljárást mutatunk n-edrendű geodézikus poliéderek elkészítésére, és ezeket a poliédereket azonosítjuk határoló lapjaiknak $\mathcal{L}_n$ családjával.

Legyen c egy B gömb középpontja, és legyen H egy háromszöglap, $c \notin H. \pi(H)$ legyen az a háromszöglap, melynek csúcsai H csúcsainak a c pontból a B gömb felületére vetített képei. Ha $\mathcal{L}$ háromszögek egy családja, akkor legyen $\pi(\mathcal{L}) = \{\pi(H) |\, H \in \mathcal{L}\}$.

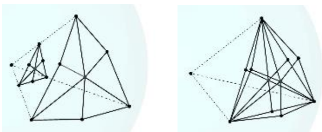
Legyen P_0 egy konvex poliéder, $c \in \operatorname{int} P_0 \subseteq B$, ahol $\operatorname{int} P_0$ jelöli P_0 belsejét (pl. P_0 lehet egy B-be írt szabályos test vagy archimédeszi test). Legyen $\mathcal{L}_0$ a P_0 poliéder lapjainak a családja.

Bontsuk fel az $\mathcal{L}_0$ minden egyes háromszögtől különböző lapját a lapok súlypontjaiból, mint közös csúcsból annyi háromszögre, amennyi a lap oldalszáma. Legyen $\mathcal{L}_0'$ az így keletkezett háromszög-ek és $\mathcal{L}_0$ áromszöglapjaiak az össze-ségének a családja. Legyen $\mathcal{L}_1 = \pi(\mathcal{L}_0')$.

Többféle eljárás is létezik, mellyel n-edrendű geodézikus poliédert készíthetünk egy $(n-1)$-edrendű, csak háromszöglapokat tartalmazó geodézikus poliéderből, most csak a két legegyszerűbbet emeljük ki: Mindegyik esetében először az $(n-1)$ −edrendű geodézikus poliéder lapjait bontjuk fel kisebb háromszögekre, majd ezeknek a csúcsait módosítjuk úgy, hogy mindegyik a B gömb felületén legyen. A két eljáráshoz tartozó lapfelbontások:



1. ábra Az 1. eljárás szerinti háromszög-felbontás és gömbi vetítés gömb belsejében, ill. gömb határán levő háromszög-csúcsok esetén.



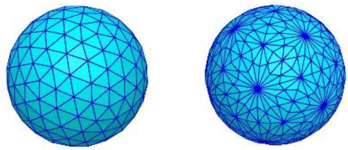
2. ábra A 2. eljárás szerinti háromszög-felbontás és gömbi vetítés gömb belsejében, ill. gömb határán levő háromszög-csúcsok esetén.

1. Egy háromszöglap oldalfelező pontjait berajzolva négy, az eredeti háromszöglappal hasonló háromszögre bontunk fel egy háromszöglapot.

2. Egy háromszöglap oldalfelező pontjait és súlypontját berajzolva hat olyan kisebb háromszögre bontjuk fel a háromszöglapot, melyeknek az egyik csúcsa a háromszöglap valamelyik csúcsa, másik csúcsa egy oldalfelező pontja, harmadik csúcsa pedig a súlypontja.

Az *1.* vagy *2.* háromszögfelbontási eljárások valamelyikét az $\mathcal{L}_{n-1}$ lapcsalád $(n \geq 1)$ minden elemére elvégezve, háromszöglapoknak egy $\mathcal{L}'_{n-1}$ családját kapjuk. Legyen $\mathcal{L}_n = \pi(\mathcal{L}'_{n-1})$. Ezzel az n-edrendű geodézikus poliéder rekurzív definiálását befejeztük, mivel a poliédert azonosítjuk a határoló lapjainak $\mathcal{L}_n$ családjával (tetszőleges $n \geq 1$ esetére).

Ha úgy kapunk n-edrendű geodézikus poliédert, hogy csak az *1.* eljárást alkalmazzuk, akkor Ln típusú geodézikus poliéderről beszélünk, ha pedig csak a *2.* eljárást alkalmazzuk, akkor LnT típusú geodézikus poliéderről, ld. [1]. A többi eljárás felsorolása megtalálható [2]-ben (ld. még [3]).



3. ábra Geodézikus ikozaéderek
L3 és L3T.

Ha van olyan sík, mely kettészel egy geodézikus poliédert úgy, hogy nem metsz bele egyik lapjának a relatív belsejébe sem, akkor az így keletkezett részek geodézikus kupolák (a klasszikus esetben, amikor félgömbhöz tartozó kupolát tekitünk, éppen a gömbközéppponton átmenő sík szeli ketté a geodézikus poliédert, de ilyen sík nem mindig létezik).

Gömböt közelítő, csak háromszöglapokkal rendelkező poliéder esetén az ideális eset az lenne, amikor csak egyféle élhossz fordul elő az élek esetében (mert ekkor a legegyszerűbb az élszerkezet megvalósítása). Ekkor a poliéder minden lapja szabályos háromszög lenne. Az ilyen poliédereket deltaédereknek nevezik, és ismert, hogy csak véges sok (nevezetesen 8) ilyen poliéder létezik, pl. legfeljebb 20 csúcsuk lehet. Tehát, ha gömbnek akármilyen jó poliéderközelítésére szeretnénk konstrukciót adni háromszöglapú poliéderekkel, akkor biztos, hogy legalább kétféle élhosszúság fog szerepelni a poliéder élhosszai között 20 csúcsszám fölött.

5 GEODÉZIKUS POLIÉDEREK MODELLEZÉSE

Az egyes szoftverek esetében sajátságos problémák jönnek elő a geodézikus poliéderek modellezésekor, illl. egyes fogások sokkal könnyebben megvalósíthatók bizonyos szoftverekkel, mint másokkal.

AutoCAD szoftver esetén nehézkes a gömbre vetítés, ehhez gömb és félegyenes metszéspontját kell megszerkeszteni. Azonban a gömb sugarának és a félegyenes irányának ismeretében a metszéspont könnyen megszerkeszthető.

Cabri 3D esetén nincs lehetőség több alakzat egyidejű transzformációjára vagy több transzformációra egy lépésben (ld. mint a poláris kiosztás AutoCAD-ben, vagy a listaműveletek GeoGebrában). Csúcsok vagy poliéderek konvex burka ellenben könnyen képezhető, de vigyázni kell, mert az L*n*T típusú geodézikus poliéderek nem mindig konvexek!

A GeoGebra az alappoliédereken (hasáb, gúla, szabályos testek) kívül más poliédert nem tud kezelni poliéderként, de sokszöglapok listájaként lehet kezelni ezeket. Poliéder síkkal való szelését sem ismeri a Geogebra, de sokszöglapokat lehet síkkal metszeni.

6 OKTATÁSI TAPASZTALAT

A Számítógépes térgeometria kurzusok hallgatói a 2015/16 tanévben szívesen foglalkoztak geodézikus poliéderekkel, pedig házi feladatot is kaptak ebből a témakörből. Általában Cabri 3D szoftverrel dolgoztak a legszívesebben, még ha itt egyesével is kellett minden transzformmációt végrehajtani az egész poliéder elkészítéséhez (de szerencsére a konvex burok képzés lehetősége miatt egyre nagyobb és nagyobb poliéderrésszel dolgozhattak). Meglepődtek, amikor egy L*n*T típusú geodézikus poliéderre az jött ki, hogy nem konvex (ekkor a konvex burok képzést óvatosan, megfelelő poléderrészekre lehetett csak alkalmazni Cabri 3D.ben). Mindegyik használt szoftverre igaz volt, hogy több száz lapú geodézikus poliédert lehetett velük aránylag kényelmesen elkészíteni, de a sokezer lap nagyságrendű poliéderek modellezése már szoftveres problémákba ütközött. A térbeli szerkesztés során ügyelniük kellett rá, hogy a poliéder lapjainak minden oldalát másik lap határolja, és két lapnak közös éle vagy közös csúcsa lehet, más közös részük nem lehet. A hallgatók változatosan használtak forgatásokat, síkra, egyenesre és pontra vonatkozó tükrözéseket a geodézikus poliéderek elkészítéséhez, sokszor azt is figyelembe véve, hogy egy adott szoftver esetén egy bizonyos nézetben melyik a legkönnyebben megvalósítható művelet.

7 KONKLÚZIÓ

Összeségében hasznosnak gondolom a geodézikus poliéderek témakörének a bevonását a tantárgy tematikájába, a való élethez és az építészethez való közvetlen kapcsolata miatt, valamint mert a hallgatók számára a poliéderek és a geometriai transzformációk tulajdonságainak jobb megértésére, és térbeli modellező munka révén a térlátásuk fejlesztésére adott lehetőséget.

IRODALOM

[1] R.K. Mueller, “Geodesic Polyhedra”, at http://simplydifferently.org/Geodesic_Polyhedra, 2007 (last updated in 2012).

[2] E. S. Popko, “Divided Spheres: Geodesics and the Orderly Subdivision of the Sphere”, CRC Press, Boca Raton, FL, 2012.

[3] A. Pugh, “Polyhedra: A Visual Approach”, University of California Press, Berkeley, CA, 1976.