Conference Paper for MAFIOK 2016.
Óbuda University Alba Regia Technical Faculty, Hungary, Székesfehérvár

Hogyan segíthetünk az átlagos képességű, és a matematikában tehetséges tanulóknak egyszerre?

(A kombinatorikus gondolkodás fejlesztése a középiskolában)

Árokszállási Eszter
Paksi Vak Bottyán Gimnázium, Paks, Magyarország
E-mail: arokszallasieszter@gmail.com

Kulcsszavak: A kombinatorikus gondolkodás fejlesztése a középiskolában, Bruner-féle reprezentációs szintek, kognitív terhelés elmélet

Kivonat—**A kombinatorika tanításának nagy hagyománya van Magyarországon. Ennek ellenére az egyetemektől olyan visszajelzéseket kapunk, hogy a tanulók nem tudják a kombinatorikát. Kutatásomban osztálytermi körülmények között keresem a választ arra, hogy mik lehetnek az okok, és hogyan tudnék segíteni a tanítványaimnak. Elméleti háttérként a Bruner-féle reprezentációs szinteket használom közepes tanári vezetéssel. A tanulók azonnal és folyamatosan visszajelzéseket kapnak munkájukról. A kognitív terhelés elmélet és a tanulás elmélet legújabb eredményeit is figyelembe veszem. Ebben a cikkben arról írok, hogy hogyan fejlődött egy átlagos képességű és egy tehetséges tanuló az utóbbi két évben. Ez az írás a "ProMath 2015, September 03rd to September 05th, 2015 University of Halle-Wittenberg, Faculty of Educational Sciences" és a "MIDK2016. Pozsony, 2016. Január 23. „ módszertani tanácskozásokon elhangzott előadásaim alapján készült és a 2016. május- júniusban elvégzett kutatásaimat mutatja be.**

Abstract—**The combinatorics of teaching has a long tradition in Hungary. Despite this, we get such feedbacks from universities that learners do not know the combinatorics tasks. In my research, I am looking for answers to classroom conditions to what could be the reason and how can I help my students. I use the theoretical background of Bruner's representational levels with medium teacher's guide. Students receive immediate and continuous feedbacks about their work. I take into account the cognitive load theory and the results of the latest learning theories also. In my paper, I would like to talk about how to develop a math gifted, and average abilities student, in the last two years. This presentation based on of "ProMath 2015, September 03rd to September 05th, 2015 University of Halle-Wittenberg, Faculty of Educational Sciences" and "MIDK2016. Bratislava, January 23, 2016, "methodological presentations at conferences. I present the most recent research work, which is carried out in 2016 between May and June.**

Keywords: Combinatorial development of thinking in secondary school, Bruner's representational levels, cognitive load theory

1 BEVEZETÉS

„A kombinatorikus szemléletmód és a feladatmegoldó módszerek formálása már az óvodában megkezdődik, s folytatódik az alsó és felső tagozat minden osztályában [1].” Így írtak V. Balogh et la. 1982-ben a hazai kombinatorikaoktatásról az általános iskolai tanároknak. Napjainkban is ezt a hagyományt követjük Magyarországon. Az óvodában már elkezdjük a kombinatorikus szemléletmódot kialakítani, és a középiskolában is folytatjuk. A matematika érettségi vizsgán is vannak kombinatorikus gondolkodást és kombinatorikus feladatmegoldási módszereket számon kérő feladatok. Mégis a főiskolákról, egyetemekről olyan visszajelzéseket kapunk, hogy a hallgatók nem minden esetben értik a kombinatorikát.

A mi középiskolánk, a Paksi Vak Bottyán Gimnázium, ahol a válaszokat keresem, egy kis létszámú iskola. 391 diák tanul itt. Egy 6 évfolyamos és két 4 évfolyamos osztályunk van párhuzamosan, egy évfolyamon. Az osztályok összetétele a matematikai tehetséget tekintve különféle. Bár a matematikát csoportbontásban tanítjuk, ami azt jelenti, hogy egy csoportban 12-16 tanuló tanul együtt, egy tehetségesebb és egy kevésbé tehetséges csoportban, mégsem tudunk homogén képességű csoportot kialakítani. Együtt tanítjuk a nagyon tehetséges és az átlagos képességű tanulókat. Ráadásul tanítványaim is különbözőképpen viszonyulnak a kombinatorika témaköréhez. Vannak, akik szeretik, mert otthonosan mozognak a sokféle, más-más megfogalmazású feladat között, és vannak olyan tanulók is, akik negatív érzelmüket nyilvánítják ki, amikor meghallják, hogy kombinatorikáról lesz szó a tanórán. Az is előfordul, hogy a matematika más területein átlagosan teljesítő tanulók ebben a témakörben kimagasló teljesítményt nyújtanak, illetve az is, hogy a kombinatorika a jó képességű tanulóknak gyengébben megy. Például a 12. osztályos, matematikából jeles tanuló Sz. A. (A tanulók nevét nevük kezdőbetűjével jelölöm.) ezt kérte „ A mi családunkban senkinek sem megy jól a kombinatorika. Hagyjuk az ismétlést az évvégére, hátha emlékszem még valamire az érettségin!” (2013. szeptember)

A modern képalkotó eljárások segítségével (fMRI) M. O’Boyle a Texas Tech University munkatársa azt vette észre, hogy problémamegoldás közben a matematikából tehetséges tanuló, a 13 éves S.M. agyterületeinek többszörösét, kb. ötszörösét-hatszorosát használja az átlagos képességű tanulókhoz viszonyítva. Mik lehetnek tehát az okok? Hogyan segíthetnék a tanítványaimnak, akik 12 és 18 éves koruk között tanulnak Gimnáziumunkban?

2 AZ ELMÉLETI HÁTTÉR

A. *A Bruner féle reprezentációs szintek*

Bruner háromféle reprezentációs síkot különböztet meg. (Bruner, 1961)

Az enaktív síkon az ismeretszerzés egy cél elérésének érdekében konkrét tárgyi tevékenységek, cselekedetek, manipulációk révén megy végbe.

Az ikonikus síkon az ismeretszerzés szemléletes képek, illetve elképzelt szituációk segítségével történik.

Szimbolikus síkon az ismeretszerzés matematikai szimbólumok és a nyelv segítségével történik.

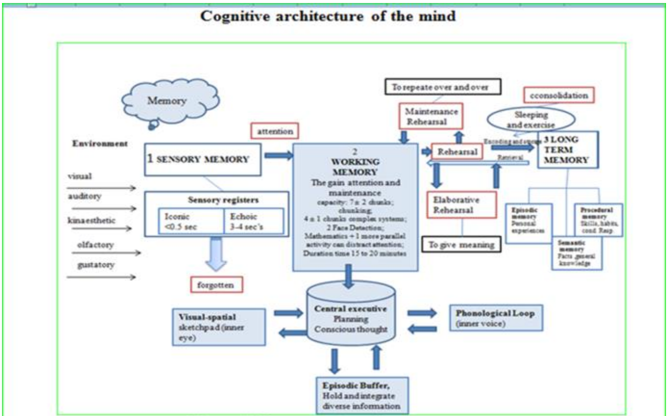


Figure 1 Memory and working memory

1. ábra Memória és munkamemória [4]

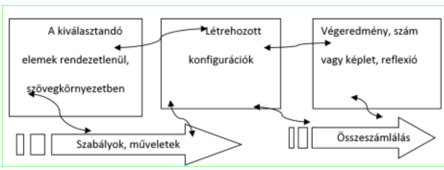
Nemcsak a fiatalabb, hanem „az idősebb tanulóknál is lényegesen hatékonyabbá tehető a tanulási folyamat, ha tudatosan változtatjuk a reprezentációs módokat, és így a reprezentációs módok izomorfiája is világossá válik [2].” Itt a reprezentációs szintek tudatos változtatása mellett azt is fontos megemlítenünk, hogy a minimális tanári vezetés, mint a felfedeztető tanítás eszköze nem elegendő a hatékony tanuláshoz. A másik véglet a maximális tanári vezetés, vagy a tanári előadás sem a leghatékonyabb módszer. P. A. Kirschner, J. Sweller és R. E. Clark szerint nem hagyhatjuk figyelmen kívül memóriánk jellemzőit és funkcióit sem [3]. A humán kognitív architektúrát az 1. ábrán Atkinson és Shiffrin (1968) (Kirschner, Sweller and Clark, 2006) memória modelljén vázlatosan mutatom be, melyet kiegészítettem A. Baddelay munkamemória modelljével.

B. *Kognitív terhelés elmélet*

A matematika tananyag elsajátítása azonban kognitív terhelést okoz tanulóknak. A terhelés főként a munka memóriára nehezedik. A problémaadatok struktúrájától, belső komplexivitásától függő terhelést nevezzük *belső (lényegi)kognitív terhelésnek (intrinsic cognitive load)*. Itt csak a probléma adatok belső természetére vagyunk tekintettel, függetlenül attól, hogy milyen oktatási módszereket alkalmazunk. A belső kognitív terhelés mértéke a problémaadatok részekre bontásával, és előzetes ismeretek megadásával csökkenthető. A problémaadatok prezentálási módjától függő terhelést *külső (idegen) kognitív terhelésnek (extraneous cognitive load)* nevezzük. A terhelés képek, grafikonok, mintapéldák használatával csökkenthető. “A belső és külső kognitív terhelés additív. Ezek együtt határozzák meg a teljes kognitív terhelést, amelyet a tananyag szab ki azáltal, hogy meg kell tanulni [5]”. (J. Sweller) A tanuláshoz, problémamegoldáshoz szükséges sémákat, automatizmusokat a munka memóriából kell merítenie a tanulónak. A hosszú távú memóriában tárolt sémáknak a munka memóriában meg kell jelenniük, hogy a tanulók ezeket felhaszálhassák a tervezésben és a tudatos gondolkodásban. A munka memória kapacitásának egy részét lefoglalják és ezzel *generatív kognitív terhelést (germane cognitive load)* hoznak létre. Ez a terhelés úgy csökken, ha kisebbé válik a belső és a külső terhelés és több hely marad a munka-memóriában.

C. A kombinatorika

“A kombinatorika a matematikának az az ága, amely a véges halmazok numerikus problémáival foglalkozik. Feladata, hogy az adott elemeket meghatározott szabály szerint csoportosítsa és a csoportok számát meghatározza.” (V. Balogh et al., 1982) A feladat nagyon egyszerűnek tűnik. Mindössze annyi, hogy számoljuk össze a csoportokat a probléma meg-oldáshoz szükséges szabályok alapján. (2. ábra) A feladat azonban a tanulók számára nagy kognitív terhelést jelent. Sok a hibázási lehetőség. A munka-meória kapacitása gyakran nem elegendő a feladatok megoldásához.



2.ábra Kombinatorikus összeszámlálás

3 A KUTATÁSI HIPOTÉZIS

A különböző reprezentációk tudatos váltogatásával folyamatos visszajelzést alkalmazva fejleszthető a kombina-torikus gondolkodás.

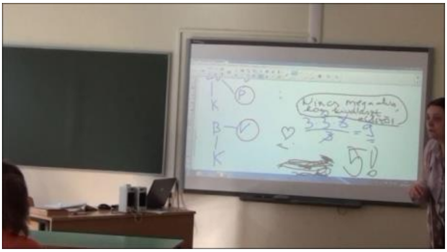
4 A KÍSÉRLETRŐL

A. A tanulócsoport

Heterogén matematikai képpességű tanulócsoportban tanítom a matematikát a kísérletben résztvevő 13 tanulónak (6 fiú és 7 lány) 2012 szeptembere óta, akik a hatosztályos képzési forma diákjai. Jelenleg 10. osztályosok, 15-16 évesek. Közülük 3-an szeretnének matema-tikából felvételizni a főiskolára, egye-temre. Egy kiváló képességű tanuló (F. M.) a mérnöki pályát választja. Mate-matika versenyeken vesz részt és a 2014. évi országos kompetencia mérésen a legfelső szinten teljesített. Ugyanezen a felmérésen volt átlag alatt teljesítő tanuló is. A tanulók 8. osztályban előtesztet írtak, amelynek tapasztalatai szerint a legjobban teljesítő tanuló (F.M.) meg-értette a szöveges feladatokat, a végére ért azoknak. Végeredményei nem minden esetben voltak pontosak. Néhány csoportot kihagyott a végső össze-számlálásnál. A kevésbé jól teljesítő tanuló (S.B.) nem minden feladatot értett meg. Megoldásainak nem voltak vég-eredményei, Csak néhány konfigurációt sorolt fel, nem találta meg az összeset.

B. Az osztályteremben végzett munka

A témát manipulatív tevékenységgel kezdjük. Például az osztályteremben a gyerekek a kirakott székekre különböző sorrendben ülhetnek le. A számjegyeket cédulákra írjuk fel és így képezünk különböző feltételek mellett számokat. Kalapból húzunk. (enaktív szint) Az ikonikus szintre szisztematikus össze-számlálás, fagráfok segítségével térünk át, majd ezután a szimbolikus síkon közös megbeszélés és pontosítás után számokkal is megadjuk a végeredményt. (1. kép) A tanulók lehetőséget kapnak arra is, hogy feladatokat alkossanak.



1. kép Az osztályban

C. Egyéni, pár és csoport munka

A kombinatorika tananyagot minden tanulónak egyénileg kell megtanulnia, de tudunk segíteni.
A tanulókból párokat alkotunk. Megbeszélhetik egymással a feladatokat a társak, és akik előbb készen vannak, felállhatnak és átmehetnek másoknak segíteni. Adhatnak fel egymásnak feladatokat. Ez a munka zajjal jár együtt, ami külső kognitív terhelést okoz. Ezért külön utasításként hangzik el, ha azt szeretnénk, hogy a tanulók önállóan dolgozzanak. „Maradjunk csöndben, mert gondolkozunk!”
Nagyobb 3-3-3-4 fős illetve 4-4-5 fős csoportokban akkor dolgozunk, ha összefoglalás van. Tanárként ügyelek arra, hogy a megoldásokat közösen megbeszéljük és a helyes, pontosított végeredmények a tanuló füzetekbe bekerüljenek.

D. 10. osztály kombinatorika záróteszt

I. rész

1. Van négy számjegyünk az 1, 5, 6, 9. Hány különböző kétjegyű számot alkothatunk belőlük, ha a keletkező számokban nem lehetnek azonos számjegyek?
2. Van négy betűnk A, A, B, B. Hányféleképpen rakhatjuk sorba ezeket, ha mind a négy betűt felhasználjuk?
3. Hányféle sorrendben ülhet le egymás mellé Anna, Béla, Cecília és Dávid?
4. Van négy számjegyünk a 3, 6, 7, 8. Hány különböző kétjegyű számot alkothatunk belőlük, ha a keletkező számokban lehetnek azonos számjegyek is?
5. Négy tanuló közül (Anna, Balázs, Csaba, Dóra) hármat hányféleképpen választhatunk ki, ha a háromfős csoportban a sorrend nem számít?
6. Négyféle színű golyó van egy kalapban arany, barna, citromsárga, piros. Mindegyikből legalább kettő. Belenyúlunk a kalapba és kiveszünk egyszerre kettőt. Belenézünk a markunkba, és lejegyezzük, hogy mit markoltunk ki.(Ilyenkor a golyók sorrendje nem számít.) Hányféle lehetőség van?

II. rész

7. A 0, 2, 3, 4, 5 számjegyekből legalább háromjegyű számokat képezünk. Minden így kialakított számban egy számjegy a megadottakból csak egyszer fordulhat elő. Hány különböző, legalább háromjegyű számot kaphatunk így?
8. Elmegyünk egy cukrászdába, ahol hat különböző ízű fagylaltot árulnak.
a) Hány háromgombócos fagylaltot rendelhetünk pohárban, ha a gombócok sorrendje nem számít és ugyanolyan ízűek is lehetnek a gombócok?
b) Hány különböző háromgombócos fagylaltot rendelhetünk itt, ha azonos ízű gombócokat is kérhetünk, és nekünk

számít az is, hogy milyen sorrendben vannak a gombócok a tölcsérben?

9. Öt fiú és négy lány körtáncot táncolnak.

a) Hány különböző kör alakítható ki?

b) Hány különböző kör alakítható ki akkor, ha azt is megszabjuk, hogy az öt fiú egymás mellett legyen?

4 Az eredmények, következtetések

Az eredményeket feladatonként a két kiválasztott tanuló (F. M.) és (S. B.) teljesítményével összehasonlítva leírom.

(F. M.) csak a 8. a) feladatrészben vétett hibát. Az utolsó lépésben szorzás helyett osztott. Az 1. feladatot 13 tanulóból 11 hiba nélkül oldotta meg. A két hibát az okozta, hogy az egyik tanuló 4 jegyű számokat képzett, a másik pedig abból ered, hogy az ismétlődéseket nem zárta ki a tanuló. (S. B.) hibátlan.

A 2. fel-adatnál 13-ból 11 jó. (S. B.) hibátlan.

A 3. feladatnál (S. B.) a végeredmény felével számol. A jó végeredmény dupláját kapja. Nem veszi észre, hogy van olyan, amit már felsorolt. A csoportban 13-ból 12 jó.

A 4. feladatot (S. B.) hibátlanul oldja meg. A csoportban 3-an hibáznak. Szisztematikus felsorolást alkalmaznak és kimaradnak esetek.

(S. B.) 5. feladata jó, a csoportban 9-en jól válaszolnak. A többi 4 ember hibája abból adódik, hogy a sorrendet is számításba veszik a tanulók.

A 6. feladatnál (S. B.) kombinációra gondol, de nem veszi észre, hogy az ismétléses. A csoportból a többi tanuló megoldásának a fele jó. A többiek a 4-es feladatot a hatos feladattal egyenértékűnek gondolják. A 2. részben a 7-es feladatnál (S. B.) kihagyta a legalább szót és azt, hogy a számok 0-val nem kezdődhetnek. A munkamemóriájában már nem volt elegendő hely az adatok, összefüggések megtartására. A csoportból 4-en válaszoltak helyesen. A többiek is a legalább szót hagyták ki és így csak részmegoldást adtak. (S. B.) a 8-as ás 9-es feladatoknál már csak részeredményeket adott. A 8-as és 9-es feladatra is 2 tanuló adott hibátlan választ.

A kísérlet alapján a hipotézist igazoltnak látom. A tanulók szívesen foglalkoznak kombinatorika feladatokkal. (F.M.) elmondja, hogy versenyeken is szívesen választja a kombinatorika feladatokat és általában jól oldja meg azokat. (S. B.) közelebb jutott a feladatok megoldásához. Munkámat tovább szeretném folytatni a hibák elemzésével.

Irodalom

[1] V. Balogh [et al.], Szerkesztette B. Pelle, *Így tanítjuk a matematikát,* 2. kiadás, II. kötet, Tankönyvkiadó, 1982, pp.205–249.

[2] A. Ambrus, *Bevezetés a matematika didaktikába*, Egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös kiadó, Budapest, 2004, pp. 38-39.

[3] P. A. Kirschner, J. Sweller and R. E. Clark, *Why Minimal Guidance During Instruction Does Not, Work: An Analysis of the Failure of Constructivist, Discovery, Problem-Based, Experiential, and Inquiry-Based Teaching,* Educational Psychologist, vol. 41 (2), pp. 75–86, 2006.

[4] E. Árokszállási presentation, ProMath 2015 Conference, September 03rd to September 05th, 2015 University of Halle-Wittenberg, Faculty of Educational Sciences

J. Sweller et al., *Cognitive Load Theory,* Explorations in the Learning Sciences, Instructional Systems and Performance Technologies 1, pp. 55-57, 2011.