Conference Paper for MAFIOK 2016.
Óbuda University Alba Regia Technical Faculty, Hungary, Székesfehérvár

Néhány geometriai egyenlőtlenség vizsgálata

Dr. Horváth Gábor
BGE PSZK, Budapest, Magyarország
Horvath.Gabor@uni-bge.hu

Kulcsszavak: geometria, egyenlőtlenség, háromszög

***Kivonat*—Háromszöggel kapcsolatos, mások által korábban már publikált egyenlőtlenségeket fogunk igazolni az ismert bizonyításoktól valamelyest eltérő módon. Szó lesz az Erdős–Mordell-egyenlőtlenségről, az Oppenheim-egyenlőtlenségről és a Hadwiger–Finsler-egyenlőtlenségről is.**

***Abstract*—We will prove some known inequalities concerning triangles such that the proofs will differ somewhat from the proofs published by other authors. We will discuss the Erdős–Mordell inequality, Oppenheim's inequality and Hadwiger–Finsler's inequality.**

1 JELÖLÉSEK

Legyen P egy ABC háromszög tetszőleges belső pontja, amelynek a BC, CA és AB oldalegyenesektől mért távolságai x, y és z; az A, B és C csúcsoktól mért távolságai pedig rendre p, q és r. Legyen továbbá $a=\overline{BC}$, $b=\overline{CA}$, $c=\overline{AB}$; valamint K, L és M a P pontnak a BC, CA és AB oldalegyenesekre vett merőleges vetületei. Jelölje k, l és m a P pontnak a KLM háromszög LM, MK és KL oldalegyeneseitől mért távolságait. Legyenek α, β és γ az ABC háromszög A, B és C csúcsánál lévő szögei, T a háromszög területe, $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ a háromszög kerületének fele.

2 AZ ERDŐS–MORDELL-EGYENLŐTLENSÉG

Erdős Pál az egyik cikkében [1] azt a sejtését publikálta, hogy $p+q+r \geq 2(x+y+z)$. Nem sokkal később L. J. Mordell ezt bebizonyította [5]:

1. Tétel (Erdős–Mordell-egyenlőtlenség): $p+q+r \geq 2(x+y+z)$.

Bizonyítás: Az ABC háromszög területe egyenlő a BCP, CAP és ABP háromszögek területeinek összegével, ezért ha m_a jelöli az ABC háromszög A csúcsához tartozó magasságát, akkor az ABC háromszög területének kétszerese:

$$a \cdot m_a = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z.$$

Mivel $m_a \leq p+x$, azért

$a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z=a\cdot m_a\le a\cdot p+a\cdot x,$
vagyis

$$p\ge \frac{b}{a}\cdot y+\frac{c}{a}\cdot z. \qquad (1)$$

Hasonló egyenlőtlenséget fogunk felírni a KLM háromszögben is. Az AP szakasz Thalész-körén rajta van az L és az M pont, így az LMA háromszög körülírt körének sugara $\frac{\overline{AP}}{2}=\frac{p}{2}$, ezért

$$\overline{LM}=2\cdot\frac{p}{2}\cdot\sin\alpha=p\cdot\sin\alpha.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy $\overline{MK}=q\cdot\sin\beta$ és $\overline{KL}=r\cdot\sin\gamma$. A KLM háromszög területe egyenlő a PLM, PMK és PKL háromszögek területeinek összegével, továbbá a KLM háromszög K csúcsához tartozó magassága nem nagyobb, mint $x+k$, így

$$(x+k)\cdot p\cdot\sin\alpha\ge k\cdot p\cdot\sin\alpha+$$
$$+l\cdot q\cdot\sin\beta+m\cdot r\cdot\sin\gamma,$$

azaz

$$p\ge\frac{l\cdot q}{x}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+\frac{m\cdot r}{x}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

A szinusztételt alkalmazva az ABC háromszögben, az előző egyenlőtlenséget a következőképpen is írhatjuk:

$$p\ge\frac{l\cdot q}{x}\cdot\frac{b}{a}+\frac{m\cdot r}{x}\cdot\frac{c}{a}. \qquad (2)$$

Mivel a $PLAM$ négyszög húrnégyszög, azért $MAP\measuredangle=MLP\measuredangle$, így

$$\frac{z}{p}=\sin MAP\measuredangle=\sin MLP\measuredangle=\frac{k}{y},$$

vagyis $k\cdot p=y\cdot z$. Hasonlóan látható be, hogy $l\cdot q=x\cdot z$ és $m\cdot r=x\cdot y$, tehát (2) szerint

$$p\ge z\cdot\frac{b}{a}+y\cdot\frac{c}{a}. \qquad (3)$$

Hasonlóan adódnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$q\ge\frac{a}{b}\cdot z+\frac{c}{b}\cdot x \text{ és } r\ge\frac{b}{c}\cdot x+\frac{a}{c}\cdot y. \qquad (4)$$

Összeadva (3) és (4) egyenlőtlenségeit:

$$p+q+r\ge$$
$$\ge\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\cdot x+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\cdot y+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cdot z,$$

ahol

$$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=\left(\sqrt{\frac{b}{c}}-\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2+2\cdot\sqrt{\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{b}}\ge$$
$$\ge 2\cdot\sqrt{\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{b}}=2,$$

valamint $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\ge 2$, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$ (vagyis egy pozitív számnak és a reciprokának az összege legalább 2). Tehát $p+q+r\ge 2x+2y+2z$, így a tételt igazoltuk.

3 AZ OPPENHEIM-EGYENLŐTLENSÉG

2. Tétel (A. Oppenheim, 1961):

$$pq+qr+rp\ge(x+y)(y+z)+$$
$$+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y).$$

J. Liu [3] egy rövid bizonyítást adott erre a tételre (egyúttal finomítva is az egyenlőtlenséget) a következő lemmát használva:

Lemma (Liu, 2012):

$$p(q+r-2x) \geq (y+z)^2. \qquad (5)$$

A lemma bizonyítása: A (4) egyenlőtlenségek miatt

$$q+r-2x \geq \frac{a}{b}\cdot z+\frac{c}{b}\cdot x+\frac{b}{c}\cdot x+$$
$$+\frac{a}{c}\cdot y-2x \geq \frac{a}{b}\cdot z+\frac{a}{c}\cdot y,$$

ugyanis $\frac{c}{b}+\frac{b}{c} \geq 2$; így (3) és a Cauchy-egyenlőtlenség alapján kapjuk a lemmát:

$$p(q+r-2x) \geq p\left(\frac{a}{b}\cdot z+\frac{a}{c}\cdot y\right) \geq$$
$$\geq \left(\frac{b}{a}\cdot z+\frac{c}{a}\cdot y\right)\left(\frac{a}{b}\cdot z+\frac{a}{c}\cdot y\right) \geq$$
$$\geq \left(\sqrt{\frac{b}{a}\cdot z}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}\cdot z}+\sqrt{\frac{c}{a}\cdot y}\cdot\sqrt{\frac{a}{c}\cdot y}\right)^2 =$$
$$=(z+y)^2.$$

A 2. Tétel bizonyítása: Az (5) egyenlőtlenség és (1) szerint

$$p(q+r) \geq (y+z)^2+2px \geq$$
$$\geq (y+z)^2+2\left(\frac{b}{a}\cdot xy+\frac{c}{a}\cdot xz\right), \qquad (6)$$

továbbá ehhez hasonlóan adódik, hogy

$$q(r+p) \geq (z+x)^2+$$
$$+2\left(\frac{a}{b}\cdot xy+\frac{c}{b}\cdot yz\right) \qquad (7)$$

és

$$r(p+q) \geq (x+y)^2+$$
$$+2\left(\frac{a}{c}\cdot xz+\frac{b}{c}\cdot yz\right). \qquad (8)$$

A (6), (7) és (8) egyenlőtlenségeket összeadva:

$$2(pq+qr+rp) \geq (x+y)^2+$$
$$+(y+z)^2+(z+x)^2+2xy\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+$$
$$+2yz\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+2zx\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) \geq$$
$$\geq (x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2+$$
$$+4(xy+yz+zx)=2\left(x^2+y^2+z^2\right)+$$
$$+6(xy+yz+zx)=$$
$$=2\big((x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+$$
$$+(z+x)(x+y)\big),$$

vagyis igazoltuk a 2. Tételt.

Az 1. és a 2. Tétel bizonyításából könnyen meggondolható, hogy ezeknél pontosan akkor van egyenlőség, ha az ABC háromszög szabályos és P a középpontja.

Liu [3] több sejtést is megfogalmazott, ezek közül kettőt említünk meg (a 3.4. és a 3.12. sejtést).

1. Sejtés (Liu, 2012):

$$\frac{a^2}{(y+z)^2}-\frac{(y+z)^2}{p^2} \geq \frac{4x}{p}.$$

2. Sejtés (Liu, 2012):

$$\frac{q+r}{y+z}-\frac{2x}{p} \geq 1.$$

4 A HADWIGER–FINSLER-EGYENLŐTLENSÉG

1937-ben H. Hadwiger és P. Finsler [2] belátták a következő tételt:

3. Tétel (Hadwiger–Finsler-egyenlőtlenség):

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\cdot\sqrt{3}\cdot T+ \\ +(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

Továbbá igazolták az alábbi eredményt is:

4. Tétel (Hadwiger, Finsler):

$$a^2+b^2+c^2 \leq 4\cdot\sqrt{3}\cdot T+ \\ +3(a-b)^2+3(b-c)^2+3(c-a)^2.$$

A 3. Tétel bizonyítása: A Hérón-képlet felhasználásával a bizonyítandó egyenlőtlenséget a következő alakban írhatjuk:

$$\left(a^2-(b-c)^2\right)+\left(b^2-(c-a)^2\right)+ \\ +\left(c^2-(a-b)^2\right)\geq \\ 4\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

azaz

$$(a+b-c)(a+c-b)+ \\ +(b+c-a)(b+a-c)+ \\ +(c+a-b)(c+b-a)\geq \\ \geq 4\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

vagyis az

$$a+b-c=2s-2c=2(s-c)$$

$$b+c-a=2(s-a) \text{ és}$$

$$c+a-b=2(s-b) \qquad (9)$$

összefüggések alapján azt kell belátni, hogy

$$(s-c)(s-b)+(s-a)(s-c)+ \\ +(s-b)(s-a)\geq \\ \geq\sqrt{3}\cdot\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \qquad (10)$$

Mivel $s=s-a+s-b+s-c$, azért (10)-ben a négyzetgyök alatti szorzat:

$$\big((s-a)+(s-b)+(s-c)\big)(s-a)\cdot \\ \cdot(s-b)(s-c)= \\ =(s-a)^2(s-b)(s-c)+ \\ +(s-a)(s-b)^2(s-c)+ \\ +(s-a)(s-b)(s-c)^2. \qquad (11)$$

Legyen ekkor $f=(s-b)(s-c)$, $g=(s-c)(s-a)$, $h=(s-a)(s-b)$, így (10) és (11) miatt azt kell igazolni, hogy

$$f+g+h\geq\sqrt{3}\cdot\sqrt{gh+hf+fg},$$

azaz

$$f^2+g^2+h^2+2fg+2gh+2hf\geq \\ \geq 3gh+3hf+3fg,$$

ami

$$f^2+g^2+h^2-gh-hf-fg= \\ =\frac{1}{2}\left((f-g)^2+(g-h)^2+(h-f)^2\right)\geq 0$$

miatt valóban teljesül, vagyis bebizonyítottuk a 3. Tételt.

Ehhez hasonló bizonyítás jelent meg 2012-ben [4]-ben, ahol a szerzők a 4. Tételt is röviden igazolták, amelyre egy másik bizonyítást adunk.

A 4. Tétel bizonyítása: Azt kell megmutatni, hogy

$$\left(a^2-(b-c)^2\right)+\left(b^2-(c-a)^2\right)+ \\ +\left(c^2-(a-b)^2\right)\leq$$

$$\le 4\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}+$$
$$+2(a-b)^2+2(b-c)^2+2(c-a)^2,$$

azaz

$$(a+b-c)(a+c-b)+(b+c-a)\cdot$$
$$\cdot(b+a-c)+(c+a-b)(c+b-a)\le$$
$$\le 4\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}+$$
$$+2\big((s-b)-(s-a)\big)^2+$$
$$+2\big((s-c)-(s-b)\big)^2+$$
$$+2\big((s-a)-(s-c)\big)^2. \quad (12)$$

Legyen $\kappa=3\cdot\dfrac{s-a}{s}$, $\lambda=3\cdot\dfrac{s-b}{s}$ és $\mu=3\cdot\dfrac{s-c}{s}$,

ekkor $\kappa>0$, $\lambda>0$, $\mu>0$ és

$$\kappa+\lambda+\mu=$$
$$=3\cdot\frac{s-a+s-b+s-c}{s}=3, \quad (13)$$

továbbá (9) miatt

$$a+b-c=2(s-c)=\frac{2\mu s}{3},$$
$$b+c-a=2(s-a)=\frac{2\kappa s}{3},$$
$$c+a-b=2(s-b)=\frac{2\lambda s}{3},$$

ezért (12) így is írható:

$$\frac{2\mu s}{3}\cdot\frac{2\lambda s}{3}+\frac{2\kappa s}{3}\cdot\frac{2\mu s}{3}+\frac{2\lambda s}{3}\cdot\frac{2\kappa s}{3}\le$$
$$\le 4\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{s\cdot\frac{\kappa s}{3}\cdot\frac{\lambda s}{3}\cdot\frac{\mu s}{3}}+$$
$$+2\left(\frac{\lambda s}{3}-\frac{\kappa s}{3}\right)^2+2\left(\frac{\mu s}{3}-\frac{\lambda s}{3}\right)^2+$$
$$+2\left(\frac{\kappa s}{3}-\frac{\mu s}{3}\right)^2,$$

vagyis azt kell belátni, hogy

$$\mu\lambda+\kappa\mu+\lambda\kappa\le 3\cdot\sqrt{\kappa\lambda\mu}+\frac{1}{2}(\kappa-\lambda)^2+$$
$$+\frac{1}{2}(\lambda-\mu)^2+\frac{1}{2}(\mu-\kappa)^2. \quad (14)$$

Mivel (13) szerint

$$\mu\lambda+\kappa\mu+\lambda\kappa-3\cdot\sqrt{\kappa\lambda\mu}=$$
$$=\frac{(\mu\lambda+\kappa\mu+\lambda\kappa)^2-9\kappa\lambda\mu}{\mu\lambda+\kappa\mu+\lambda\kappa+3\cdot\sqrt{\kappa\lambda\mu}}=$$
$$=\frac{(\mu\lambda+\kappa\mu+\lambda\kappa)^2-3\kappa\lambda\mu(\kappa+\lambda+\mu)}{\mu\lambda+\kappa\mu+\lambda\kappa+3\cdot\sqrt{\kappa\lambda\mu}},$$

ahol a számláló

$$(\kappa\lambda)^2+(\lambda\mu)^2+(\mu\kappa)^2-(\kappa\lambda)\cdot$$
$$\cdot(\lambda\mu)-(\lambda\mu)\cdot(\mu\kappa)-(\mu\kappa)\cdot(\kappa\lambda)=$$
$$=\frac{1}{2}(\kappa\lambda-\lambda\mu)^2+\frac{1}{2}(\lambda\mu-\mu\kappa)^2+$$
$$+\frac{1}{2}(\mu\kappa-\kappa\lambda)^2=\frac{1}{2}\Big(\kappa^2(\lambda-\mu)^2+$$
$$+\lambda^2(\mu-\kappa)^2+\mu^2(\kappa-\lambda)^2\Big)$$

alakban is írható, így (14) alapján azt kell bebizonyítani, hogy

$$\frac{\kappa^2(\lambda-\mu)^2+\lambda^2(\mu-\kappa)^2+\mu^2(\kappa-\lambda)^2}{2\left(\mu\lambda+\kappa\mu+\lambda\kappa+3\cdot\sqrt{\kappa\lambda\mu}\right)}\le$$
$$\le\frac{(\kappa-\lambda)^2+(\lambda-\mu)^2+(\mu-\kappa)^2}{2}. \quad (15)$$

Megmutatjuk, hogy igaz az alábbi állítás, amelyből nyilvánvalóan következik (15).

5. Tétel: Ha κ, λ és μ tetszőleges pozitív számok, akkor

$$\frac{\kappa^2(\lambda-\mu)^2+\lambda^2(\mu-\kappa)^2+\mu^2(\kappa-\lambda)^2}{\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa}\le$$
$$\le(\kappa-\lambda)^2+(\lambda-\mu)^2+(\mu-\kappa)^2. \quad (16)$$

Bizonyítás: Azt kell igazolni, hogy

$$0\le(\kappa-\lambda)^2\left(\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa-\mu^2\right)+$$
$$+(\lambda-\mu)^2\left(\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa-\kappa^2\right)+$$
$$+(\mu-\kappa)^2\left(\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa-\lambda^2\right). \quad (17)$$

Mivel

$$\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa-\mu^2=2\kappa\lambda-(\kappa-\mu)(\lambda-\mu),$$
$$\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa-\kappa^2=2\lambda\mu-(\lambda-\kappa)(\mu-\kappa),$$
$$\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa-\lambda^2=2\mu\kappa-(\mu-\lambda)(\kappa-\lambda),$$

azért (17) jobb oldalát így is írhatjuk:

$$(\kappa-\lambda)^2\cdot 2\kappa\lambda+(\lambda-\mu)^2\cdot 2\lambda\mu+$$
$$+(\mu-\kappa)^2\cdot 2\mu\kappa+(\kappa-\lambda)^2(\lambda-\mu)\cdot$$
$$\cdot(\mu-\kappa)+(\lambda-\mu)^2(\mu-\kappa)(\kappa-\lambda)+$$
$$+(\mu-\kappa)^2(\kappa-\lambda)(\lambda-\mu)=$$
$$=(\kappa-\lambda)^2\cdot 2\kappa\lambda+(\lambda-\mu)^2\cdot 2\lambda\mu+$$
$$+(\mu-\kappa)^2\cdot 2\mu\kappa+(\kappa-\lambda)(\lambda-\mu)\cdot$$
$$\cdot(\mu-\kappa)(\kappa-\lambda+\lambda-\mu+\mu-\kappa)=$$
$$=(\kappa-\lambda)^2\cdot 2\kappa\lambda+(\lambda-\mu)^2\cdot 2\lambda\mu+$$
$$+(\mu-\kappa)^2\cdot 2\mu\kappa,$$

ami nem lehet negatív, tehát bebizonyítottuk az 5. Tételt is.

A 3. és a 4. Tétel bizonyításából könnyen látható, hogy ezeknél pontosan akkor fordul elő egyenlőség, ha az ABC háromszög szabályos. A (16) egyenlőtlenségben akkor és csak akkor van egyenlőség, ha $\kappa=\lambda=\mu$.

IRODALOM

[1] P. Erdős, “Problem 3740”, *Amer. Math. Monthly*, vol. 42, p. 396, 1935.

[2] P. Finsler, and H. Hadwiger, “Einige Relationen im Dreieck”, *Comment. Math. Helv.*, vol. 10(1), pp. 316-326, 1937.

[3] J. Liu, “On a geometric inequality of Oppenheim”, *Journal of Science and Arts*, vol. 18(1), pp. 5-12, 2012.

[4] D. Ş. Marinescu, M. Monea, M. Opincariu, and M. Stroe, “Note on Hadwiger–Finsler’s inequalities”. *Journal of Mathematical Inequalities,* vol. 6(1), pp. 57-64, 2012.

[5] L. J. Mordell, “Solution of Problem 3740”, *Amer. Math. Monthly*, vol. 44(4), pp. 252-254, 1937.