Conference Paper for MAFIOK 2016.
Óbuda University Alba Regia Technical Faculty, Hungary, Székesfehérvár

A természet mintázatainak matematikai modellezéséről

Klincsik Mihály*

* Pécsi Tudományegyetem, Műszaki és Informatikai Kar, Rendszer és Szoftver Technológia Tanszék, Pécs, Hungary
klincsik@mik.pte.hu

Kulcsszavak: reakció-diffúziós rendszer, Turing-instabilitás, a természet modellezése

***Kivonat*—A természet csodálatos változatosságot kínál az általa létrehozott mintázatokkal mind az élő, mind az élettelen területen. Ilyen mintákat figyelhetünk meg az állatok bőrén (pl. zebra csíkok, leopárd pöttyök) vagy kémiai anyagok reakciója során (Belousov−Zhabotinsky rendszer) vagy az egymás mellett élő populációknál. Alan Turing Brit matematikus az 1952-ben írt híres "The chemical basis of morphogenesis" cikkében javasolt egy reakciós-diffúziós modellt, amely leírja a különböző kémiai anyagok reakciós és diffúziós folyamatát és megmutatja, hogyan alakulhatnak ki a változatos formák vagy mintázatok. Az előadásban az alábbi alakú reakció-diffúziós rendszert**

(1)
$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \cdot \nabla^2 u + f(u,v)$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \cdot \nabla^2 v + g(u,v)$$

vizsgáljuk, melyben $u = u(x,t)$, $v = v(x,t)$ a kémiai anyagok koncentrációi az x helyen és t időpillanatban, D_u, D_v a megfelelő konstans diffúziós együttható, $f(u,v)$, $g(u,v)$ a kémiai reakciókat leíró nem-lineáris függvény. Turing megmutatta azt, hogy lehet olyan konstans stacionárius megoldása (1)-nek, amely egyrészt időben stabil, ha a diffúziós tagok hiányoznak az egyenletekből. Másrészt ez az x térben homogén megoldás inhomogén megoldássá alakulhat át, ha a rendszerbe bevezetjük a diffúziót. Vagyis az időben stabil egyensúlyi helyzet térben instabillá válik a diffúzió hatására, amely egyébként stabilizáló hatású a koncentrációkra nézve. Ezt a jelenséget nevezzük Turing-instabilitásnak. Tehát egy megoldást mintának nevezünk, ha a térbeli x változóban nem konstans, de a t idő változótól független, amely valóban foltokat eredményez, ha x kétdimenziós. Bemutatjuk a viselkedését néhány jól ismert reakció-diffúziós rendszernek számítógépes szimulációval, amelyek demonstrálják, hogy a minták létezése vagy nem-létezése függ a rendszer paramétereitől és a tartomány méretétől.

Conference Paper for MAFIOK 2016.
Óbuda University Alba Regia Technical Faculty, Hungary, Székesfehérvár

Mathematical Modeling of Natural Patterns

Klincsik Mihály*

* University of Pécs, Faculty of Engineering and Information Technology, Department of System and Software Technology, Pécs, Hungary

klincsik@mik.pte.hu

Keywords: reaction-diffusion system, Turing-instability, modelling the nature

Abstract— **The nature exhibits an amazing diversity of realized patterns in its both living and nonliving areas. Such patterns can be observed on animal skins (e.g. zebra stripes, leopard spots) or when reacting chemical substances (Belousov−Zhabotinsky system) or between populations living together. British mathematician Alan Turing proposed a reaction-diffusion model in his famous 1952 paper "The chemical basis of morphogenesis" which is modeling a reaction and diffusion processes between different chemicals and he is explaining how they can produce various patterns. In this lecture we consider the reaction-diffusion system in the form**

(1)
$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \cdot \nabla u + f(u,v)$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \cdot \nabla v + g(u,v)$$

where $u = u(x,t), v = v(x,t)$ **is the concentration of the chemical substances at spatial point** x **and moment** t, D_u, D_v **diffusion coefficients respectively,** $f(u,v)$, $g(u,v)$ **non-linear functions describing chemical reactions. Turing demonstrated that may be occur such a constant stationary solution of (1), which is stable temporally when the diffusion members are missing from the equations. However, this spatially homogeneous solution may turn into inhomogeneous in x, when the diffusion processes are introduced into the system (1). That is, a temporally stable equilibrium may become unstable in spatially due to the diffusion process which is otherwise stabilizing the concentrations. This phenomenon is called as Turing-instability. Thus, a solution is called pattern when it is not constant in spatially variable x but independent from time variable t and it is really displaying spots when x two-dimensional. We will present the behaviour of some well-known reaction-diffusion systems using computer simulations which are demonstrating that the existence or not existence of the patterns is varying from the system's parameters and the size of the domain.**