Conference Paper for MAFIOK 2016.
Óbuda University Alba Regia Technical Faculty, Hungary, Székesfehérvár

Gondolatok a matematika tanításáról, 2016

Kiss László
Óbudai Egyetem, Rejtő Sándor Könnyűipari és Környezetmérnöki Kar,
Médiatechnológai és Könnyűipari Intézet
kiss.laszlo@rkk.uni-obuda.hu

Kulcsszavak: oktatásmódszertan, matematika, gondolkodásra nevelés

***Kivonat*— Cikkem a „Gondolatok a matematika tanításáról, 2015” c. cikkem folytatása, annak egyfajta kiegészítése. Az alábbi kérdéseket, gondolatokat érintem benne.**

¬ Hogyan épüljön fel a korszerű matematikaoktatás?

¬ A matematikaoktatás és a társadalmi gondolkodás kapcsolata.

¬ A megoldások jó vagy rossz volta.

¬ A mechanikus gondolkodás elkerülése.

¬ A felesleges információk oktatásának kiküszöbölése.

¬ Kapcsolatok az egyes matematikai ismeretek között.

Cikkemben fentiekre és az említett cikkemben leírtakra konkrét példákat is bemutatok.

MOTTÓK

„… annyiba kerül, amennyibe kerül, de megéri, próbáljuk meg érdekessé tenni az iskolát.”

Karácsony Sándor [4]

„Másrészt: a tudományban nem a megoldás az érdekes (hiszen az sosem végleges, mindig újabb problémákat vet fel), hanem a problémáknak és a megoldásuk felé vezető útnak a felismerése. Kérdezni kell megtanítanunk tanítványainkat.”

Karácsony Sándor [4]

„Így minden jó fa jó gyümölcsöt terem, a rossz fa pedig rossz gyümölcsöt. Nem hozhat a jó fa rossz gyümölcsöt, sem a rossz fa jó gyümölcsöt”

Mt. 7,17-18

Minden mindennel összefügg, minden algoritmus, és minden függvény.

BEVEZETÉS

A mottók, de a később leírtak is, sokak számára kellemetlen kérdéseket boncolgatnak. Lesznek, akik úgy érzik majd, hogy őket, az oktatási módszereiket kritizálom. A célom nem ez. Biztos vagyok benne, hogy mindenki a legjobb tudása szerint ugyanazért küzd. A magyar ifjúság szellemi fejlődéséért. Amiért mégis a matematikaoktatás kérdéseit feszegetem, azt gondolom, senki sem vitathatja. Nem jönnek a remélt eredmények, és egyre jobban lemaradunk a világtól. Azt kérem tehát, hogy akit ez a téma közelről érint, feltétlenül olvassa végig a cikkemet, és mindazt, amit nem tart jónak, nyugodtan tegye félre. Ha mégis talál benne olyan gondolatot, ami őt az oktatásában segíti, akkor ez a cikk már nem született meg hiába.

HOGYAN ÉPÜLJÖN FEL A KORSZERŰ MATEMATIKAOKTATÁS

Ezt a kérdést két szempontból vizsgáljuk meg. Az oktatás mai helyzetéből kiindulva és a jövő szempontjait figyelembe véve.

A mai helyzet sok egyetemen – mint az [1], [2] és [3] cikkeimben leírtakból is kiolvasható –rendkívül kétségbeejtő.

2005-ben, mint a BMF RKK (abban az időben az Óbudai Egyetem még főiskola volt) oktatója, írtam egy levelet az akkori vezetőmnek a helyzet javítására elgondolt elképzeléseimről. Azokból semmit nem vettek figyelembe, a hallgatók tudásszintje pedig tovább romlott. Lényegében a levelemben leírtakat fejteném ki újra ebben a fejezetben, az előrelépés reményében.

A középiskolából az egyetemekre érkező hallgatók többsége – *a felkészültség szinte teljes hiányában* – a matematika előadásokat egyáltalán nem érti meg, azok nem az ő „nyelvén” szólnak, és előbb-utóbb nagy részük emiatt azokat nem is látogatja. Ha mégis jelen van, akkor is inkább – a Karácsony Sándor által adott definíció szerint – nem hallgatóként, csupán padtöltelékként. Ott van, de minek, hiszen csak az idejét vesztegeti. A gyakorlatokon mindezek következtében gondolkodtatásra kevés, csupán típusfeladatok megoldására, azaz szinte magoltatásra van idő. Mit tehetnénk azért, hogy a helyzet javulhasson?

A matematika tanítását – véleményem szerint – 4 szakaszban lenne jó megoldani.

1. Az előadás. Ez továbbra is – tartalmát tekintve – ugyanúgy történne, mint eddig, de nagy hangsúlyt fektetne arra, hogy a diákok – az előadóval kommunikálva – saját szavaikkal is megfogalmazzák a kimondott axiómákat, definíciókat és tételeket, és kérdezzenek minél többet. (Az általam nagyra becsült és tisztelt Danczkay Győző tanár úr a középiskola első matematika óráján jelképesen a szemétkosárba dobatta velünk a tankönyvet, és arra nevelt minket, hogy minden axiómát, definíciót és tételt a saját szavainkkal fogalmazzunk meg. Az osztályomból még az elégséges jegyet szerzők is végeztek olyan felsőfokú intézményben, ahol a matematika tantárgy volt. Mindenki megtanult önállóan fogalmazni, a fogalmakat értelmezni és gondolkodni.)

2. A módszertani előadás. Itt az egyes tételek alkalmazására gyakorlati példákat hoz az „előadó”, aki a diákok nyelvére „fordítja” azokat. Feladatok megoldásával az egyes gondolkodási módokra és módszerekre mutat be példákat, hangsúlyozva azok előnyeit és hátrányait. (Lásd a [3] cikkben található L'Hôpital-szabályra mutatott példát.) Itt is fontos a kommunikáció.

3. A gyakorlat. A hallgatók – az oktató által megtapasztalt tudásszintjüknek megfelelően – különböző nehézségű feladatokat kapnak. Ha a megoldásban megakadnak, a gyakorlatvezetőtől egyénenként kapnak segítséget. Közösen nem sok, azonos típusú feladatot oldanak meg, hanem inkább azt elemzik, hogy egy-egy feladat megoldásához hányféleképpen közelíthetnek, és a

megtanult ismereteiket hogyan használhatják fel. A feladatoknak csupán a megoldási elvét beszélik meg. Kérdéseket tesznek fel, és válaszokat adnak közösen.

4. Az informatikai eszközökkel támogatott gyakorlat. Itt a hallgatók a problémák megoldásához informatikai alkalmazásokat használnak, amivel a megértés és a hatékonyság nagymértékben növelhető. Ezek lehetnek szimbolikus algebrai programcsomagok, mint például a Maple, vagy egyéb más alkalmazás, mint akár az Excel.

Az itt leírt a struktúra az oktatás rendszerében természetesen plusz anyagi ráfordítást igényel, hiszen több kontaktórára van szükség. Meggyőződésem szerint hosszú távon mégis megmutatkoznának az eredmények. A hallgatók többsége nem csupán elvesztegetné az idejét az egyetemeken, és a gondolkodásmódja sokat fejlődhetne.

A matematikaoktatás átalakítása az általános és középiskola szintjén, a jövő szempontjait figyelembe véve, a további fejezetekben leírtak mentén lenne célszerű.

A MATEMATIKAOKTATÁS ÉS A TÁRSADALMI GONDOLKODÁS KAPCSOLATA

A társadalmi- vagy közgondolkodás még ma is sokszor a „Dögöljön meg a szomszéd tehene is!”. Szeretném, ha ezen változtatnánk. Jó lenne, ha olyan matematikafeladatok lennének, amelyek például az alábbiakat vésik bele a diák mindennapi gondolkodásába:

1. Az ország szellemi szintje az állampolgárok szellemi szintjének összessége

2. Az ország ideje az állampolgárok idejének összessége

3. Közösen többre megyünk, mint egyénenként.

Az első ponttal kapcsolatban jó példákat lehetne készíteni arra, hogy mennyivel jobb mindenkinek, ha okosabb emberek vannak hazánkban, mert azzal sokféle módon nőhet az ország teljesítménye, fejlettebbé válhat a gazdaság, a nemzetközi bevételek és kiadások viszonya előbbi javára javulhat, és ezek által mindenkinek jobb élete lehet. Mindez viszont azt a szemléletet követeli tőlünk, hogy segítsük egymást mindenben, így a tanulásban is, mert attól nekünk is jobb lesz.

A második ponttal kapcsolatban sok-sok különböző példával ki lehetne hangsúlyozni, hogy egy-egy meggondolatlan, hibás tettünk hogyan veheti el embertársaink idejét, amiből különböző következmények folytán az összes időveszteség már óriásivá duzzadhat, és az emiatt keletkezett közös kárunk is hatalmas lesz.

A harmadik ponttal kapcsolatban meg lehetne fogalmazni olyan feladatokat, amikor különböző számú ember készít el valamilyen munkát. Szélsőséges esetben ezek a munkák lehetnének akár olyanok is, hogy egy ember sohasem, de kettő vagy több már adott idő alatt el tudja végezni. Kérdés lehetne, hogy az emberek számától függően mennyi időre van szükség a munka elkészítésére. Ilyen munka lehetne például nehéz tárgyak mozgatása, vagy egy ház felépítése, stb.

A MEGOLDÁSOK JÓ VAGY ROSSZ VOLTA

A megoldások sokszínűségének bemutatása szintén nagyon fontos. Nem csupán a gondolkodás fejlesztése miatt, hanem azért is, mert előfordulhat, hogy egy megoldás egy másikkal szemben sokkal jobbnak tűnik, de később kiderül, hogy a jónak tűnő nem, míg a másik általánosítható. Különböző szempontokat figyelembe véve pedig a jó-rossz megállapítás akár fel is cserélődhet. Utóbbi esetet mutatom be egy könnyen érthető problémán.

Tegyük fel, hogy egy n elemű vektorban neveket találunk, és szeretnénk véletlenszerűen kiválasztani közülük k ($k<n$) különbözőt. Vizsgáljunk meg néhány megoldást.

1. Véletlenszám-generátor segítségével kiválasztunk egy számot 1 és n között, és az annyiadik nevet áttesszük egy másik vektorba az ott lévők mögé, ha még nem volt az új vektorban megtalálható.

2. Felhasználunk egy n elemű numerikus típusú segédvektort, ami kezdetben 0 elemeket tartalmaz. Az algoritmus az előbbiek szerint alakul, csak annyiban tér el, hogy ha egy adott számot generálunk, akkor a numerikus vektorban a megfelelő 0 elemet 1-re módosítjuk. Ha a megfelelő elem már 1 volt, akkor újra kell számot generálnunk, mert kétszer ugyanazt a véletlen számot, mint a név sorszáma, nyilván nem használhatjuk fel.

3. Hasonlóan a második megoldáshoz, itt is három vektort használunk, csak ha a segédvektorban a megfelelő helyen 1 érték van, akkor addig növeljük a generált indexet egyesével, ameddig abban nullát nem találunk. Ha elértük a vektor végét, akkor folytatjuk az elejéről.

4. A második megoldáshoz viszonyítva itt az a különbség, hogy az i. lépésben generált szám minden esetben nem 1 és n, hanem 1 és $n+1-i$ közé esik. Ezután megkeresve a segédvektorban az annyiadik 0-t, megkapjuk a kiválasztott név helyes indexét.

5. Ebben az esetben – a nevek kezelésére – csupán az eredeti vektort és egy segédváltozót használunk. A generált szám az i. lépésben itt is 1 és $n+1-i$ közé esik. A neki megfelelő sorszámú nevet a segédváltozó segítségével kicseréljük az ($n+1-i$). névvel. A kiválasztott nevek így a vektor végére kerülnek, és fordított sorrendben, onnan kiolvashatók.

Látható, hogy ha k elég nagy n-hez képest, akkor az első és a második megoldásokban a számgenerálást nagy valószínűséggel meg kell ismételni, és emiatt a nevek kiválasztása sokáig tarthat. Szemben a többi megoldással, amikor ez a probléma nem keletkezik, és minden generálás eredményes választáshoz vezet. Az n-hez képest kicsi k esetén viszont utóbbi algoritmusok lehetnek lassúbbak. Az ötödikkel összehasonlítva, amelyik az eredeti vektoron kívül csupán egyetlen segédváltozót használ, a második, a harmadik és a negyedik megoldásban segédvektort alkalmazunk, amivel növeljük a felhasznált munkaterületet. Az ötödik megoldásnak meg az a „hibája", hogy az eredeti vektort megváltoztatja, elveszítve a kezdeti névsorrendi információkat. A megoldások „jósága" nagymértékben függ tehát attól, hogy a kitűzött probléma megoldásán kívül még milyen egyéb követelményeket fogalmazunk meg.

Az ismert „Igazságos osztozkodás" feladatra a három vagy több résztvevőre megadott algoritmusok között nem találtam általánosítható megoldást, ezért még 2001-ben elkészítettem a két résztvevőre ismert algoritmus helyes általánosítását. Mivel az eddig még cikkben nem jelent meg, most közzéteszem. Az alapgondolat az volt, hogy amikor a két részvevős esetben a választó eldönti, hogy melyik kupacra tart igényt, ugyanakkor azt is eldönti, hogy melyikre nem. (Ez a gondolkodásmód a halmazelméletben és a logikában egy teljesen természetes módszer.)

Most lássunk egy valóban igazságos felosztást *n+1* emberre. (nyilván: *n*>0, egész)

n+1. felosztja az aranykupacot *n+1* részre. *1., 2., ...,* és *n.* kiválaszt *n* részt, aminek az *n*-ed részére igényt tart. Másként fogalmazva, megmutatja azt az egyet, amelyikből nem óhajt semmit. A választókat sorba, a kupacokat oszlopba rendezve, a kívánt kupacot 1-el, a nem kívánttat 0-val jelölve, a választásmátrix a következő, ahol minden sorban így pontosan 1 db 0 érték áll:

1. táblázat

	1.	*2.*	*3.*	...	*n.*	*n+1.*
1.	1	1	0	...	1	1
2.	1	0	1	...	1	1
3.	1	1	1	...	0	1
...	...	...	...	...	...	...
n.	1	1	1	...	1	0
Σ	k_1	k_2	k_3	...	k_n	k_{n+1}

$0<=k_i<=n$ és $k_1+k_2+...+k_{n+1}=n^2$

Három esetet különböztetünk meg.

1. Ha van olyan *i* index, hogy $k_i = 0$, akkor az *i.* kupacot megkapja az *n+1.*, és a választók osztoznak a további összeöntött *n* kupacon.

2. Ha $k_i = n$, akkor azon a választók osztoznak.

3. Ha $0<k_i<n$, jelölje $k:=k_i$. Ekkor $0<k<n$. Ezt a kupacot *k*-an választották és mindegyikük az *1/n*-ed részére tart igényt, azaz együtt a *k/n*-ed részére, s így *n+1.*-nek az *(n-k)/n*-ed része jár. Ekkor megint rábízzuk az osztást. Ő ezt a kupacot *n* részre osztja fel. Ezután mind a *k* választó *k* db kupacot jelöl meg. Ezekből mindegyikük a megjelölt kupac *1/k*-adára tart igényt. Ebben az esetben a felosztásmátrix a következő:

2. táblázat

	1.	*2.*	*3.*	...	*n.*
1.	1	1	0	...	1
2.	1	0	1	...	1
3.	1	1	1	...	0
...	...	...	...	...	...
k	1	1	1	...	1
Σ	l_1	l_2	l_3	...	l_n

$0<=l_j<=n$ és $l_1+l_2+...+l_n=k^2$

3.1. Ha van olyan *j* index, hogy $l_j=0$, akkor a *j.* kupacot megkapja az *n+1.*

3.2. Ha $l_j = k$, akkor a választók osztoznak rajta.

3.3. Ha $0<l_j<k$, jelölje $l:=l_j$. Ekkor: $0<l<k$. Ezt a kupacot *l*-en választották és mindegyikük az *1/k*-ad részére tart igényt, azaz együtt a *l/k*-ad részére, s így *n+1.*-nek az *(k-l)/k*-ad része jár. Mivel $l<k<n$, ezzel az algoritmussal a felosztás előbb-utóbb véget ér. (De mikor?...)

A MECHANIKUS GONDOLKODÁS ELKERÜLÉSE

Egy-egy ismeret elsajátítása után szinte azonnal meg kellene mutatni, hogy azt gondolkodás nélkül sohasem szabad alkalmazni. Szeretem a gyerekeknek – akik éppen megtanulták az egészszámokat egymással elosztani – feladni az alábbi feladatot.

Egy csiga beleesett egy 30 méter mély kútba. Nappal 8 métert képes felfelé mászni, éjjel azonban visszacsúszik 5 métert. Hányadik napon mászik ki a kútból?

Szinte minden gyerek azonnal kiszámolja, hogy akkor naponta 3 métert mászik felfelé, és rávágja, hogy a 10. napon. Csak lassan érti meg azt a nyilvánvaló tényt, hogy nem így kell gondolkodni, mert a már kimászott csiga nem csúszik vissza.

A Pitagorasz-tétel megismerése után, annak alkalmazására elgondolkodtató feladat a következő.

Van egy négyzet alakú mező, amelyet egy árok vesz körül, úgy, hogy vele a mezőt kiegészítve szintén négyzet alakot alkotnak. Van két lécünk, amelyek olyan szélesek, hogy problémamentesen tudunk rajtuk járni, és pont olyan hosszúak, mint a mező oldalán az árok szélessége. Hogyan tudnánk csak a lécek segítségével bejutni a mezőre?

Ugyancsak szívesen adom fel programozási feladatként a számláló ciklus megismerése után a következőt. Határozzuk meg egy megadott intervallumba eső négyzetszámok összegét!

Általában ilyenkor mindenkinek természetes az a megoldás, hogy megvizsgáljuk, növekvő sorrendben, az intervallumban az egészszámokat, hogy négyzetszámok-e, és ha igen, akkor egy kezdetben 0 értékű változóhoz hozzáadjuk őket. Így a végén megkapjuk a kérdéses összeget. Felhasználjuk közben, hogy egy egészszám pontosan akkor négyzetszám, ha a gyöke egészrészének négyzete önmaga. (1)

Nézzünk a feladatra további megoldásokat.

Felhasználva az egymást követő négyzetszámokról ismerteket, azaz ha *I* négyzetszám, akkor hozzáadva a gyökének kétszeresét és még 1-et, a következő négyzetszámhoz jutunk (másként, $p^2+2*p+1=(p+1)^2$, ahol *p* az *I* gyöke), az intervallumon, az első négyzetszám megtalálása után, gyorsabban haladhatunk végig. (2)

Majd az egyenesről a síkba helyezve a problémát, az intervallumot (jelölje: [*a*,*b*]) az *Y* tengelyen elképzelve, megkeresve az *a* utáni első, majd a b előtti első négyzetszámot, és azokból gyököt vonva az így kapott számok által az *X* tengelyen egy [*c*,*d*] intervallumhoz jutunk, és a keresett érték a [*c*,*d*] intervallumban található egészszámok négyzeteinek összege. (3)

Ez utóbbi megoldást is javíthatjuk, ha az [*a*,*b*] intervallum két határából vonunk gyököt, és ha *a* gyöke egész volt, akkor azt választjuk *c*-nek, ha nem, akkor az egyel nagyobb egészszámot. *d* természetesen *b* gyöke lesz. (4)

Végül felismerve, hogy hiszen létezik képlet az 1-től *n*-ig található számok négyzetösszegére, amit a teljes indukció megismerésénél már be is bizonyítottunk, a keresett értéket egy egyszerű képlettel is kiszámíthatjuk! Ha tehát *c*-t és *d*-t már kiszámoltuk, akkor az összeg (jelölje: *s*) meghatározható az alábbi módon:

$$s=1/6*(d*(d+1)*(2*d+1)-(c-1)*c*(2*c-1)) \quad (5)$$

A megoldásokat megismerve nyilvánvalóvá válik mindenki számára, hogy sohasem szabad mechanikusan, a megszerzett ismereteket szinte gondolkodás nélkül alkalmazni, hiszen az veszteségekhez vezethet. Míg az (1) megoldás *a* és *b* elég nagy távolsága esetén nagyon hosszú ideig eltarthat, (2) … (4) is csak valamicskét javít a futási időn, addig (5) azonnal eredményt ad.

Megemlítek néhány a fejezetcímben megadott gondolatot tartalmazó egyszerű kérdést, amelyek emlékeim szerint Grätzer József „Sicc” című könyvében találhatók.

Hogyan futhat egy nyúl „háromfelé”? Ha egy fán van három veréb, és egyet lelövünk, hány marad? Hogyan kerülhet bele egy az üveg szájánál szélesebb tök egy üvegbe? Hogyan érhetem el, hogy ha akarom, „átlátok” a falon is?

Számtalan remek logikai feladat létezik, amit itt ugyancsak fel lehetne sorolni. Most példaként csak a „Merre megy a busz?” kérdésre hívnám fel a figyelmet.

A „négy hajó a tengeren” feladat kapcsán ki lehet fejteni az egymástól azonos távolságra lévő pontok száma és a tér dimenziójának kapcsolatát. Az általában megadott megoldások mellett (tengeralattjáró és léghajó) pedig izgalmas azon is elgondolkodni, hogy egy elsüllyedt hajó képes esetleg pont megfelelő mélységben megrekedni, vagy, hogy a Föld nem lapos, és így lehet 4 olyan tengeri pont, amelyek éppen egy tetraéder csúcsaiban vannak.

Kedvenc feladataim közé tartozik még az egyenlő oldalú háromszög alakú kertben a benne lévő kútnak az oldalaktól való távolságai összegének meghatározása, illetve a két egymás felé kerékpározó orrára szálló légy által megtett út esete.

A számtani és mértani közép közötti összefüggés megtanulása után adható fel például az alábbi feladat.

Bizonyítsuk be, hogy minden *a, b > 0, a>b* és *a*b=1* esetén igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{a^2+b^2}{a-b} \geq 2\sqrt{2}$$

Miután megismerte a diák a másodfokú egyenleteket és a trigonometrikus függvényeket, jó példa lehet a következő.

$$5^{\left|y^2-4y+3\right|} = \cos(4x^2-5x+1)$$

Néhány határérték számítási feladat elvégzése után adhatjuk fel az alábbit. Az u. n. „konjugált módszer” megértésére (mely elnevezést [3]-ban helytelenítettem), elég ezután ez az egy példa is.

$$\lim_{n\to\infty} 9n^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{3n^2+\sqrt{2n^2+3n}}-\sqrt[3]{3n^2+\sqrt{2n^2-3n}}\right)$$

A $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ megismerése után oldjuk meg a következő határérték feladatot, majd mutassunk rá, hogy az *x*, *sin(x)*, *tg(x)* vagy *tan(x)*, *sh(x)* vagy *sinh(x)* és *th(x)* vagy *tanh(x)* szerepe az ilyen típusú határértékképletben, tetszőlegesen cserélhető.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\sin\left(\ldots\left(\sin(x)\right)\ldots\right)\right)}{x}\right)$$

A trigonometrikus integráloknál a *tan(x/2)* helyettesítés alkalmazása után célszerű lenne feladni például a következő integrálást. (Annak egyik megoldásban kihasználva, hogy $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$.)

$$\int \frac{\cos(x)}{2-\cos^2(x)}\,dx$$

A FELESLEGES INFORMÁCIÓK OKTATÁSÁNAK KIKÜSZÖBÖLÉSE

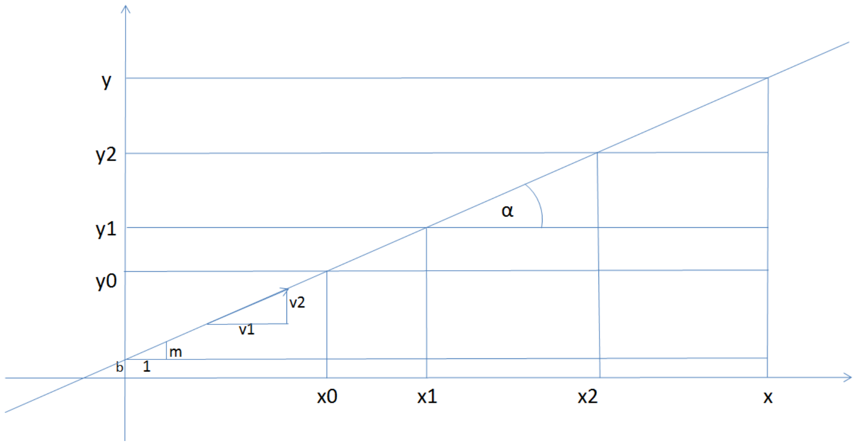
Nehéz lesz néhány olvasót meggyőzni, de példaként mégis leírom, hogy a szögek tanításánál a fok fogalmára szerintem ma már egyáltalán nincsen szükség, az csak zavart okoz. Elég lenne a szögeket az egység sugarú kör félkörívének hosszával mérni (π), és mindent szöget annak arányában megadni. A koszinusz és a szinusz definícióját – szigorúan ebben a sorrendben, azaz a tengelyekhez kapcsolódóan – az adott ív végpontjának merőleges vetületeiként kellene bevezetni. Igaz, a „kompatibilitás” miatt eleinte még elmesélhetnénk, hogy valamikor a félkörívhez tartozó szöget 180 fokosnak nevezték el.

A π tizedes törtként való kezelésével, sőt szinte minden nem véges számú tizedesjegyet tartalmazó számmal problémák adódnak. Még az egyetemre érkezők között is sok diák van, aki a $0,\dot{9}$ és az 1 egyenlőségét nem érti. Ennek az lehet az oka, hogy az egyenlőséget valójában sosem definiáltuk megfelelő módon a számukra. Ezt már a tanulás kezdeti időszakában megfogalmazhatnánk a következő módon. Két számot egyenlőnek tekintünk, ha nincs olyan kicsi szám, aminél ne lennének egymáshoz közelebb. Valószínűleg egy nem túl bonyolultra fogalmazott határérték fogalom is már jóval előbb megérthető lenne a gyerekek számára.

Talán a fejezetcímhez jobban kapcsolható, hogy az egyenesek különböző egyenleteinek megtanulása abban a formában, ahogy azt általában ma tanítják, már egyenesen kárt okoz. A vektorok fogalmának megismerése után (konkrét példákkal kihangsúlyozva, hogy a matematikában és a fizikában másként kezeljük őket), a merőleges vektorok kapcsolatát felhasználva, egy síkbeli egyenes irány- és normálvektora kapcsolatát is felírhatjuk. Hangsúlyozva a definíciójukban, hogy a hosszuk lényegtelen. Azután beszélhetünk síkban a tengelyekkel párhuzamos, illetve az azokkal nem párhuzamos egyenesek egyenletéről. Mindkét esetet egyetlen ábrán mutatjuk meg és írjuk fel, felhasználva a hasonló háromszögekre, vagy a párhuzamos szelőkre vonatkozó tételt. Utóbbiak mindegyikét egyetlen képletben jelenítjük meg, a meredekségre (m), mint változóra koncentrálva. Lásd. 1. ábra.

Fontos és szemléletfejlesztő lenne, ha az irányvektor és a normálvektor jellemzőiről elgondolkodva, az egyenes egyenlete mellett, azonnal, a vektorok skaláris szorzatával együtt, a sík egyenletét is megtanulnák. Nem kellene azzal az egyetemig várni.

A Pitagorasz-tétel megismerése után, arra néhány feladatot véve, azonnal következhetne a tananyagban a trigonometrikus függvények definiálása, és a koszinusz-tétel, hogy igen hamar találkozzon azzal az ismerettel a diák, hogy a Pitagorasz-tétel annak csak egy speciális esete. Lásson általános és speciális tételkapcsolatra példát. (Az egyetemen tanárom, Czách László tartotta fontosnak azt az elvet, hogy az általános tételből közelítsünk annak speciális esetei felé. Itt ugyan nem teljesen erről van szó, de mégis rámutathatnánk vele erre a látásmódra.)



x=x₀, y=y₀,

$$\frac{-m1}{m2} = \frac{v2}{v1} = (tg(\alpha) = \tan(\alpha)) = m = \frac{y-b}{x} = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

1.ábra

KAPCSOLATOK AZ EGYES MATEMATIKAI ISMERETEK KÖZÖTT

Ez a fejezet egyrészt arra szeretné felhívni a figyelmet, hogy érdemes egy-egy ismeretet úgy tanítani, hogy az majd később hasznos legyen, másrészt egyes tételek bizonyítására sokszor célszerű lenne felhasználni olyan matematikai ismereteket, amiknek a segítségével a magolást csökkentenénk. Az egyszerű bizonyítások bármikor elvégezhetők, ha az szükséges, és így a képletek megtanulása helyett, azok többszöri levezetésével, a tételek szinte automatikusan rögződnének.

Amikor megkérem a diákjaimat, hogy a 28-at osszák el 3-mal, úgy kezdik, hogy megvan benne 9-szer és maradt az 1. Erről Karácsony Sándor egyik története jut rögtön az eszembe, amikor hasonló helyzetben a diák megkérdezné, hogy de, tanár úr, miért pont 1 maradt. Természetesen mindenki tudja, azért, mert 9*3=27, és ha ezt kivonjuk, vagy ellenkező előjellel hozzáadjuk, akkor 1-et kapunk. De ezt a lépést az osztás tanításakor nem szabad kihagyni, és le is kell írni! Mert ha nem tesszük, akkor ne csodálkozzunk azon, hogy az egyetemen nem érti a diák a polinomok osztását. (Itt jegyzem meg, hogy a bennfoglalás fogalmát külön kezelni teljesen feleslegesnek, sőt károsnak tartom.)

A komplex számok 3 alakját a középiskolában meg kellene tanítani, és a trigonometrikus azonosságokat, mint a *sin(2*α)=2*cos(α)*sin(α)*, azok felhasználásával bizonyítani.

Ha már tanítunk kombinatorikát, annak segítségével arra lehetne a diákokat nevelni, hogy ne vegyen senki például lottót, mert úgysem nyerhet. (Tudom, hogy ezzel nem mindenki ért egyet…) Meg lehetne tanítani a Pascal-háromszöget, a hozzá szükséges tétellel együtt, és a két tag összegének hatványozását annak felhasználásával felírni. A diákok a legritkább esetben végzik el kettőnél több polinom szorzását úgy, hogy azt vizsgálnák, hogy az egyes hatványokból a szorzatban mennyi keletkezik. Általában mechanikusan először kettőt szoroznak össze, majd utána a szorzatot továbbszorozzák a többi tényezővel. Már az is haladás, ha például 4 polinom szorzatának kiszámítása esetén kettőt-kettőt szoroznak össze, majd azután a szorzatokat.

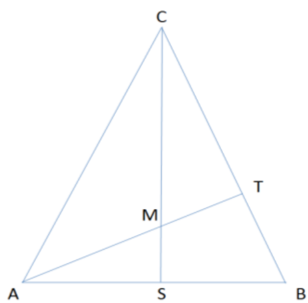
A látásmódot feltétlenül növeli, ha a lineáris egyenletrendszerek megoldásai mellett az általuk leírt térelemek közös pontjairól is beszélünk. (Például a 3 ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldásai és a nekik megfeleltethető síkok metszéspontjai.)

A TÁRGYAT FEJLESZTŐ MŰHELY (TEAM) MUNKA FONTOSSÁGA

Az általam sokra tartott Scharnitzky Viktor tanár úr által szerkesztett Egyetemi felvételi feladatok matematikából VIII. könyvet lapozgatva találtam egy geometria feladatot, aminek egyik ott leírt megoldásával sem voltam megelégedve (túl bonyolultnak találtam), ezért két tehetséges gyereknek – prémiumot beígérve, időre, mintegy versenyként – feladtam, és magam is nekiültem. Ebből elegánsabb megoldások születtek, amik közül kettőt a fejezet végén meg is mutatok. Hasonló módon lehetne a tananyagfejlesztést megvalósítani. Létre kellene hozni az oktatás minden szintjén egy vezető műhelyt. Az általános és középiskola szintjén ez a csoport megalakulhatna például azokból a tanárokból, akik a Rátz László Vándorgyűlésen feladatmegoldó szemináriumokat vezettek. Irányításukkal egy internetes felületre kerülnének a feladatok, amiknek különböző megoldásai ugyanezen a felületen jelennének meg. Ezek a megoldások lépésről lépésre tartalmaznák, hogy milyen elméleti ismereteket használtak fel, és azokból hogyan gondolkodva jutottak el a következő lépéshez. A felület, hasonlóan a Wikipédiához, a felhasznált elméleti ismeretekhez, mint kulcsszavakhoz, URL-eket rendelne. Így a megoldás értelmezése közben a szükséges elméleti ismeret azonnal tanulmányozhatóvá válna. Az elméleti ismeretek különböző megértési szinteken lennének kifejtve, mint azt például a függvény definíciójával kapcsolatban [3]-ban leírtam. A feladatokra megoldásokat beküldő személyeket díjaznák, és a nevüket a megoldásoknál meg is említenék, ezzel kedvet adva a közös munkához.

Lássuk a geometriai feladatot, aminek megoldásából a fenti ötlet megszületett.

Adott az ABC hegyesszögű háromszög, M magasságponttal. Határozzuk meg az ACB szögét, ha AB=CM!



2. ábra

1. megoldás: TC szakasz merőleges TA szakaszra, TM szakasz merőleges TB szakaszra. A CM szakasz egyenese pedig AB szakaszra. Forgassuk el a TCM háromszöget T körül úgy, hogy TC TA egyenesére kerüljön. Ekkor TM szakasz TB egyenesére kerül, és C és M pontok elforgatottjai által kapott szakasz párhuzamos lesz az AB szakasszal. Mivel azonban AB=CM, a szakaszok egybe is esnek a párhuzamos szelők tétele miatt, amiből TC=TA következik. De a TCA háromszög így egyenlőszárú derékszögű háromszög, s emiatt a C csúcsnál a szög $\pi/4$.

2. megoldás: BSC és BTA háromszögek mindegyike derékszögű, a B csúcsnál közös szöggel, így a BCS szög is megegyezik a TAB szöggel. De BCS szög azonos TCM szöggel, és így TCM és TAB háromszögek hasonlók. Mivel CM=AB, ezért e két háromszög egybevágó, és így TC=TA. Emiatt TCA háromszög egybevágó derékszögű háromszög, és a TCA szög $\pi/4$.

(Megjegyzem, hogy a feladatra – miután fenti megoldásokat a Rátz László vándorgyűlésen bemutattam – matematikus kollégák még nagyon sok, egészen izgalmas megoldást készítettek, de bevallom, azokat már elfelejtettem. Viszont ha elképzeléseim megvalósulnának, bizonyára „előkerülnének” ismét.)

NÉHÁNY SZÓ A SAKKRÓL

Mielőtt bárki azt gondolná, hogy, még aktív sakkozóként, a sakkozóvá nevelést akarom népszerűsíteni, leírom: nem magát a sakkozást tekintem elsősorban fontosnak. A csoportokban történő sakkoktatást, Erdei Nándor, egykori oktatóm arra használta, hogy a gyerekeket egymás tiszteletére és megbecsülésére nevelje. „Nem ellenségek vagyunk, hanem ketten (vagy többen) alkotunk egyet egy játszmában.” – mondogatta mindig.

Amit ki szeretnék most hangsúlyozni, az a kevésbábos végjátékok, és a tanulmányok esete. Ezek nagyszerűen fejlesztik az algoritmikusgondolkodás képességét, tehát helyük lenne az oktatásban. Igaz, a Sudoku is egy egészen jó eszköz, de másként érdekes. A sakk lehetőségeit izgalmasabbnak tartom. A chess.com honlapon adott idő alatt kell az egyes feladványokat megoldani, és ha valóban csak a naponta ingyen felajánlott ötöt oldjuk meg, akkor frissen tarthatjuk az ötletkészségünket, és még az időnket sem raboljuk el. A legutóbbi – a nekem megoldásra felajánlott – feladványok közül, mintaként, ideírom néhánynak az elérhetőségét. Jó gondolkodást!

https://www.chess.com/tactics/?id=56347,
https://www.chess.com/tactics/?id=50631,
https://www.chess.com/tactics/?id=40132,
https://www.chess.com/tactics/?id=34570,
https://www.chess.com/tactics/?id=170589),
https://www.chess.com/tactics/?id=49974

ZÁRÓ GONDOLATOK ÉS KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Természetesen nem hiszem, hogy pont én vagyok az a személy, aki megmondja, hogyan kell ma matematikát tanítani. Csupán a most már talán hosszúnak mondható oktatási, és, a gyerekeim nevelése folytán, gondolkodásra nevelési tapasztalataimat kamatoztatva osztottam meg néhány gondolatot, amivel talán sikerült hozzájárulnom a jövőbeli oktatás javításához. Köszönöm gyermekeimnek a szigorú kritikákat és a segítséget, köszönöm tanáraimnak a módszereket, amiket általuk sajátítottam el (itt említeném meg nagyszerű általános iskolai matematikatanáromnak, Schreiner Mihálynak a nevét, aki tulajdonképpen a

pályámon elindított) és köszönöm a MAFIOK konferencia szervezőinek a lehetőséget, hogy ennek a cikknek a megírását kedvesen „kikényszerítették” belőlem!

IRODALOM

[1] Kiss László: A magyar felsőoktatásról, 2010 (Gondolatok, elképzelések), http://uni-obuda.hu/e-bulletin/Kiss_1.pdf, 2010

[2] Kiss László: Gondolatok és elképzelések, nem csak a felsőoktatásról, 2013, Matematikát, fizikát és informatikát oktatók XXXVII. országos konferenciája (MAFIOK) Miskolc, 2013. augusztus 26-28. ISBN: 978-963-358-037-0, http://www.uni-miskolc.hu/~matsefi/mafiok/cikkek/MAFIOK_2013_Kiss.pdf

[3] Kiss László: Gondolatok a matematika tanításáról, 2015, Matematikát, fizikát és informatikát oktatók (MAFIOK) XXXIX. országos konferenciája Kaposvár, 2015. augusztus 24-26. ISBN: 978-615-5599-00-2, http://civilosszefogas.hu/wp-content/uploads/2016/02/Kiss-L%C3%A1szl%C3%B3_cikk_.docx

[4] Hatvany László: KARÁCSONY SÁNDOR PEDAGÓGIAI ÍRÁSAIBÓL (9 tanulmány, 1922-1946), Csökmei Kör, 1994

[5] Karácsony Sándor: A tanulás mesterfogásai, Csökmei Kör, Pécel, 1998, ISBN: 963 03 55205