

Óbudai Egyetem

Doktori (PhD) értekezés



Maradó alakváltozás modellezése egyenáram jelenlétében

Varga Péter
okleveles gépészmérnök

Témavezető:
Prof. Dr. Ruzinkó Endre, egyetemi tanár

Anyagtudományok és Technológiák Doktori Iskola

Készült:
Óbudai Egyetem
Bánki Donát Gépész és Biztonságtechnikai Mérnöki Kar

Budapest, 2020. február

Komplexvizsga-bizottság:

Réger Mihály, DSc, elnök
Dusza János, MTA külső tagja, tag
Krállics György, PhD, tag
Stirling András, DSc, tag
Vajda István, DSc, tag

Nyilvános védés teljes bizottsága:

Czinege Imre, PhD, opponens
Krállics György, PhD, opponens
Pokorádi László, PhD, elnök
Horváth Richárd, PhD, titkár
Palásti-Kovács Béla, PhD, tag
Tancsics Ferenc, PhD, tag
Telegdi Lászlóné, DSc, tag

Nyilvános védés időpontja:

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék.....	i
Kivonat	iii
Jelölések jegyzéke.....	iv
1. Bevezetés.....	1
2. Irodalmi áttekintés	3
3. Az irreverzibilis alakváltozás szintézis elmélete	16
3.1 A szintézis elmélet alapjai.....	16
3.2 Ilyusin-féle deviátor tér	18
3.3. A nem rugalmas alakváltozások számításának kétszintű megközelítése, a Batdorf-Budiansky csúszási elmélet	19
3.4 A folyási felület értelmezése, mint az érintő síkok belső burkoló felülete	20
3.5 Folyási feltétel és folyási felület a szintézis elmélettel kifejezve	26
3.6 Folyási felület az $\mathcal{S}3$ altérben. Érintő síkok, és azok nyomvonala.....	28
3.7 A keményedési felület. Mikro- és makroszintű nem rugalmas alakváltozás.....	30
3.8 A mikroszintű irreverzibilis (maradó) alakváltozás kifejezése	34
3.9 Speciális esetek.....	39
4. A szintézis elmélet kiterjesztése: szekunder kúszás, primer kúszás és képlékeny alakváltozás egyenáram jelenlétében	42
4.1 Szekunder kúszás leírása egyenáram jelenlétében	42
Következtetés (1. tézis)	52

4.2	Primer kúszás és képlékeny alakváltozás leírása egyenáram jelenlétében	53
4.2.1	<i>Primer kúszás leírása egyenáram jelenlétében.....</i>	<i>53</i>
4.2.2	<i>Képlékeny alakváltozás leírása egyenáram jelenlétében</i>	<i>59</i>
	Következtetés (2. tézis)	64
4.3.	A keményedési felület fejlődése az irreverzibilis alakváltozás során áram jelenlétében	65
4.3.1	<i>A keményedési felület fejlődése képlékeny alakváltozás során megjelenő áramimpulzus hatására.....</i>	<i>66</i>
4.3.2	<i>A keményedési felület fejlődése primer kúszás során áram jelenlétében.....</i>	<i>70</i>
4.3.3	<i>A keményedési felület fejlődése szekunder kúszás során áram jelenlétében</i>	<i>71</i>
4.3.4	<i>Az egytengelyű húzás esetén kapott eredmények általánosítása tetszőleges irányú egyszerű terhelésre</i>	<i>73</i>
4.3.5	<i>A keményedési felület programozása</i>	<i>75</i>
	Következtetés (3. tézis)	79
	Összefoglalás és jövőbeli lehetőségek	80
	Köszönetnyilvánítás	81
	Irodalomjegyzék.....	82
	Mellékletek	90

Kivonat

Jelen disszertáció az elektromos mező jelenlétében létrejövő irreverzibilis deformáció sajátosságait tárgyalja. Vizsgáltam és leírtam az átfolyó egyenáram hatását a primer- és szekunder kúszásra, valamint a képlékeny alakváltozásra. Az áram jelenléte az alakváltozás növekedését eredményezi a kúszás mind primer, mind állandósult állapotú szakaszában. Az adott mértékű alakváltozást eredményező feszültség ugrásszerűen csökken egy elektromos impulzus megjelenésekor. Az áram fent említett hatásait a szintézis elmélet használatával modelleztem. Ehhez egy új változót vezettem be a szintézis elmélet alapvető egyenleteibe, amely kifejezi az átfolyó egyenáram hatásait. Az alakváltozások analitikai leírása jó egyezést mutat a nemzetközi irodalomban található kísérleti eredményekkel.

Abstract

The thesis addresses the peculiarities of irrecoverable deformation in electrical field. The effect of direct current upon the primary and steady state creep as well as plastic deformation is studied. The action of current results in the increase of deformation in both primary and steady state portion. Further, the stress needed to maintain a given level of plastic deformation undergoes a jump-wised decrease as an electric impulse is on. The phenomena listed above have been modeled in terms of the synthetic theory by inserting into its basic formulae a term accounting for the presence of direct current. The analytical results show good agreement with experimental data.

Jelölések jegyzéke

J	Áramsűrűség, kA/cm ² ,
T	Hőmérséklet, K
σ	Mechanikai feszültség (normál feszültség), MPa
Q	Aktiválási energia, kJ/mol
n	Feszültség kitevő
t	Idő, s
\mathcal{S}^5	Ötdimenziós Ilyushin-féle feszültség deviátor tér
\mathcal{E}^5	Ötdimenziós Ilyushin-féle alakváltozás deviátor tér
$\vec{\mathcal{S}}$	Feszültségvektor
S_i	Feszültségvektor komponensei, MPa
\vec{e}	Makroszintű alakváltozás-vektor
e_i	Makroszintű alakváltozás-vektor komponensei
\vec{g}_i	\mathcal{S}^5 egységvektora
\vec{f}_i	\mathcal{E}^5 egységvektora
S_{ij}	Feszültség deviátor tenzor komponensei, MPa
e_{ij}	Alakváltozás deviátor tenzor komponensei
δ_{ij}	Kronecker delta
J_2	Feszültség deviátor tenzor második skalár invariánsa, MPa
$ \vec{\mathcal{S}} $	Feszültségvektor hossza, MPa
τ_0	Csúsztató feszültség intenzitás, MPa
\mathcal{S}^3	\mathcal{S}^5 háromdimenziós altere
\mathbb{V}	A test egy elemi térfogata (makroszint)
\mathbb{V}_0	Egy csúszási rendszer térfogata (mikroszint)
τ_{nl}	Egy csúszási rendszeren ébredő csúsztató feszültség, MPa
\vec{n}	A τ_{nl} feszültség síkjának normálvektora
n_i	\vec{n} vektor Descartes koordináta rendszerbeli iránykoszinuszai

\vec{l}	a τ_{nl} feszültség irányvektora
l_i	\vec{l} vektor Descartes koordináta rendszerbeli iránykoszinuszai
$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$, és ω	Csúszási sík gömbi koordináta rendszerbeli szögei
τ_S	Folyáshatár (tisztá nyírás), MPa
\vec{N}	Folyási felület érintősíkjának normálvektora
N_1, \dots, N_5	\vec{N} vektor komponensei,
H_N	Folyási felület érintősíkjainak távolsága az origótól, MPa
d	normalizációs tényező
h_m	Folyási felület érintősíkjainak távolsága az origótól \mathcal{S}^3 -ban, MPa
\vec{m}	Folyási felület érintősíkjának normálvektora \mathcal{S}^3 -ban
m_i	\vec{m} vektor komponensei
λ	\vec{N} és \vec{m} normálisok közötti szög
α, β , és λ	\vec{N} vektor irányát meghatározó szögek
V	A $d\vec{N}_\alpha$, $d\vec{N}_\beta$, és $d\vec{N}_\lambda$ vektorok által leírt paralelepipedon térfogata
F_0	Elsőfajú nem teljes elliptikus integrál
E_0	Másodfajú nem teljes elliptikus integrál
φ_N	Irreverzibilis alakváltozás intenzitás
ψ_N	Hibaintenzitás, MPa, MPa ²
I_N	Sebesség-integrál, MPa, MPa ²
S_P	A kúszásfelület sugara, MPa
σ_P	Kúszáshatár egytengelyű húzás esetére, MPa
τ_P	Kúszáshatár tiszta nyírás esetére, MPa
S_S	A folyási felület sugara, MPa
B	Modell állandó
p	Modell állandó, s ⁻¹
t_M	Aktív terhelés időtartama, s
r	Modell állandó, MPa, MPa ²
Θ	Homológ hőmérséklet, K
K	A csúsztatófeszültség-intenzitás (τ_0) és a homológ hőmérséklet (Θ) függvénye, s ⁻¹
φ_N^0	Az állandósult kúszás előtt felhalmozódott alakváltozás intenzitás
K_1	K függvénynek hőmérséklet-függését kifejező tagja
K_2	K függvény csúsztatófeszültség-intenzitástól (τ_0) való függését kifejező tag, s ⁻¹
c	Modell állandó

k	Modell állandó
C	A szintézis elméletben az egyenáram hatását leíró függvény
U	C függvénynek áramsűrűségtől való függését kifejező tagja
W	C függvényben az átfolyó áram Joule-hevítésének hatását leíró tag
u_k, w_l	Modell állandók, 4.2 táblázat
$\dot{\epsilon}$	Alakváltozás-sebesség, s^{-1}
σ_c	Kúszáshatár az átfolyó áram jelenlétében, MPa
$\dot{\epsilon}_1$	Egytengelyű húzás szekunder kúszássebesség vektor komponense
$\dot{\epsilon}_1^C$	Egytengelyű húzás szekunder kúszássebesség vektor komponense áram jelenlétében
β_{1C}	Határsík állása egytengelyű húzás esetén, áram jelenlétében
α_1, λ_{1C}	\vec{N} vektor irányát meghatározó szögek egytengelyű húzás esetén, áram jelenlétében
I_N^C	Sebesség-integrál átfolyó áram esetén, MPa, MPa ²
B_C	Modell állandó átfolyó áram esetén
p_C	Modell állandó átfolyó áram esetén, s^{-1}
$C_i, B_i,$ és p_i	Modell állandók, 4.3 táblázat
e^C	Primer kúszás alakváltozás vektor átfolyó áram esetére
σ_c	Adott mértékű képlékeny alakváltozás fenntartásához szükséges feszültség átfolyó áram jelenlétében, MPa
$\Delta\sigma_\alpha$	Hőtágulásból eredő feszültség csökkenés, MPa
$\sigma_{c,\alpha}$	Adott mértékű alakváltozás fenntartásához szükséges feszültség, az átfolyó áram és a hőtágulás hatását együttesen figyelembe véve, MPa
E	Rugalmassági modulusz, MPa
α	Hőtágulási együttható, K^{-1}
Δ_m	Húzófeszültség csökkenésének mértéke, %
k_g	Szakítógéppel merevsége, kN/mm
k_p	Próbatest merevsége, kN/mm
k_δ	Szakítógéppel-próbatest rendszereredő merevsége, kN/mm
ΔL_α	Hőtágulásból eredő hosszváltozás, mm
φ_{NC}	Irreverzibilis alakváltozás intenzitás áramimpulzus esetén
H_{NC}	Keményedési felület érintősíkainak távolsága az origótól áramimpulzus esetén, MPa
σ_S	Folyáshatár egytengelyű húzás esetére, MPa
σ_{SCm}	Folyáshatár egytengelyű húzás esetére áramimpulzus esetén, MPa

S'_i	Feszültségvektor komponensei, ha S'_1 iránya megegyezik \vec{S} vektorával, MPa
$e_{1'}$	Makroszintű alakváltozás-vektor komponense S'_i koordináta rendszerből meghatározva
θ_k	$S_i \rightarrow S'_i$ koordináta transzformáció szögeinek iránykoszinuszai
e_k	Alakváltozás-vektor komponensei az eredeti, S_i koordináta rendszerből meghatározva
e_{kC}	e_k átfolyó áram esetére

1. Bevezetés

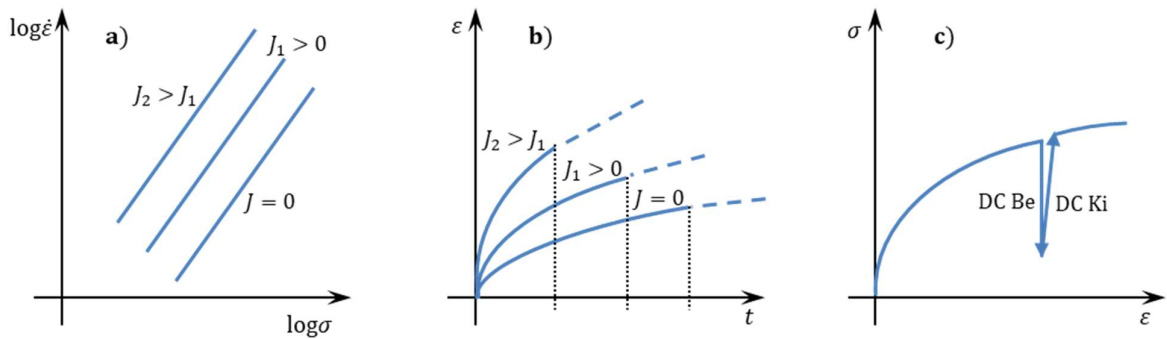
A mai összetett elektronikai eszközökben több ezer kapcsolat található egyetlen nyomtatott áramkörben. Az elektronikus komponensek méretcsökkenésének következményeként jelentősen növekvő áramsűrűség miatt egyre nagyobb figyelmet kell fordítani az elektromigráció által okozott tönkremenetekre. Az elektronikai kapcsolatok elektromechanikai viselkedése nagy jelentőséggel bír az elektronikai eszközök megbízhatóságának és minőségének szempontjából. Az eszközökben alkalmazott nyomtatott áramkörök kapcsolataiban, az elektronikai komponensek és a hordozó lemez közötti hőmérséklet különbség hatására, mechanikai feszültségek ébrednek, azokban kúszási alakváltozást okozva, amit még fokoz a rajtuk átfolyó áram. Ebből kifolyólag a gyakorlat számára döntő jelentősége van a forrasztanyagok irreverzibilis (képlékeny és/vagy kúszási) alakváltozási mechanizmusának és viselkedésének megismerésében.

Az elektronszél a fémek mechanikai tulajdonságaira gyakorolt hatását olyan technológiák kidolgozásának céljával vizsgálják, amelyek alkalmazásával az alakításra fordított mechanikai munka csökkenthető a darab hőmérsékletének jelentős növelése nélkül. Manapság mind az akadémiai, mind az ipari érdeklődés számottevően nőtt az elektromosan támogatott alakító technológiák iránt. Az elektromos mező csökkenti a folyási feszültséget és növeli az alakváltozó képességet, aminek eredményeképp csökken az alakítás fajlagos energiaigénye és a költségek.

Ebből kifolyólag a kutatási célom egy olyan modell kidolgozása a szintézis elméletének keretében, amely a következő jelenségek (effektusok) leírására alkalmas.

- (i) A szekunder kúszás sebességének növekedése az áram jelenlétében (1.1.a ábra).
- (ii) A primer kúszási alakváltozás növekedése, a primer kúszási szakasz időtartamának csökkenése az áram jelenlétében (1.1.b ábra).
- (iii) Az áramimpulzus hatására megjelenő ugrásszerű feszültség csökkenés képlékeny alakváltozás esetén (1.1.c ábra).

(iv) A fenti pontokban felsorolt alakváltozások során kialakuló keményedési felület evolúciója.



1.1. ábra A disszertációban tárgyalt jelenségek: **a)** szekunder kúszás sebessége, **b)** primer kúszás mértéke és időtartama, **c)** feszültség csökkenés egytengelyű húzóvizsgálat során (J - áramsűrűség)

A modell kidolgozásához és alátámasztásához nagyban hozzájárul, ha saját kísérleti eredményekre lehet támaszkodni. Azonban a szükséges vizsgálatok sajátos követelményei – az átfolyó áram jelenlétének következtében – megakadályozták ilyen kísérleteket megvalósulását a rendelkezésre álló időben. Így a fentebb felsorolt célok eléréséhez a nemzetközi kutatások rendelkezésre álló eredményeire támaszkodtam.

2. Irodalmi áttekintés

Egyre több tudományos munka foglalkozik az elektromos áramnak az alacsony olvadáspontú fémek alakváltozására gyakorolt – Joule-hevítéstől különböző – hatásának vizsgálatával.

Chen és Yang (2008, 2010) kísérleteik során ón, ón-ólom ötvözet és ólom anyagú próbatestek indentációs kúszásvizsgálatát végezte el. A vizsgálatok eredményeképp megmutatták, hogy a növekvő áramerősséggel nő az állandósult állapotú kúszássebesség. Úgy találták, hogy a mozgó elektronok és a fémrács atomjai közötti impulzus átadás csökkenti az atomok elmozdulásához szükséges energiát, és növeli azok elmozdulásának sebességét. Kinney et al. (2009) nyíró feszültséggel terhelt Sn-Ag-Cu ötvözet kúszását vizsgálta elektromos áram jelenlétében, és a kúszássebesség növekedését tapasztalták növekvő áramsűrűség mellett. Ám eredményeik szerint a kúszássebesség növekedéséért a megnövekedett hőmérséklet volt a felelős, és az elektromos áram az állandósult kúszássebesség csökkenését okozhatja. Kumar és Dutta (2011) szintén nyíró feszültség hatására bekövetkező kúszást vizsgáltak Si-Pb-Si szendvicsszerkezetű próbatestekkel. Megfigyelték, hogy a határfelületek elmozdulásának sebessége az elektronok áramlásának és az alkalmazott feszültségnek egymáshoz képesti – a határfelület fémes oldalán – irányától függ. Zhao et al. (2012) réz szalagok elektromechanikai viselkedését vizsgálta. Shao et al. (2012) polikristályos fémek diffúziós kúszásának vizsgálatokor mutatta ki az elektromos áram kúszást elősegítő hatását.

A mikroelektronikai komponensek összekötő elemein áthaladó elektromos áram a hőmérséklet helyi emelkedését okozza a Joule-hevítés hatására, illetve a mozgó elektronok és a fémrács atomjai közötti impulzus átadásnak köszönhetően a diffúzió intenzitásának növekedéséhez vezet. Ezt támasztják alá a Zhao és munkatársai (2014) által végzett kísérletek, amelyek az átfolyó áramnak az elektromos összekötő elemek időfüggő képlékeny alakváltozására kifejtett hatásának jellemzését célozzák.

Az ón próbatestek kúszásvizsgálata során a mechanikai terheléssel egy időben egyenáram folyt a darabokon keresztül. A kúszásvizsgálatok 323 – 423 K hőmérséklet intervallumban, 1,93 - 13,89 MPa közötti terhelő feszültséggel zajlottak, miközben az ón próbatesteken

0 - 3,78 kA/cm² áramsűrűségű egyenáram haladt át. A próbatestek felszíni hőmérsékletének alakulását az idő és az áramsűrűség függvényében termoelemek rögzítették.

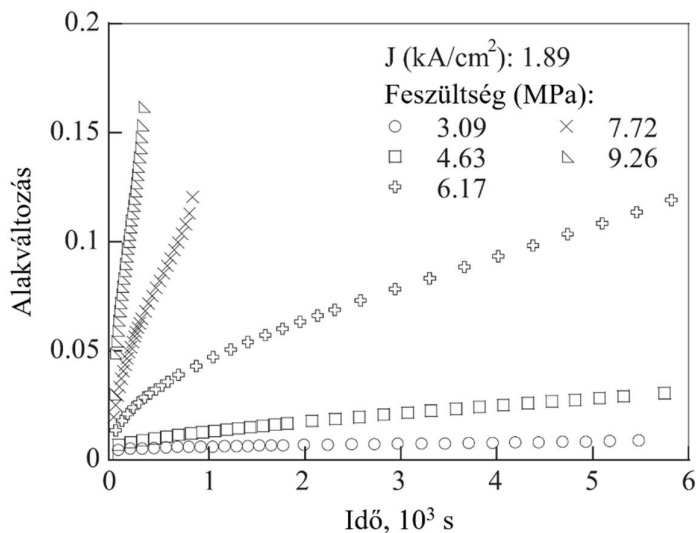
A 2.1. ábra a kúszási alakváltozást ábrázolja az idő függvényében különböző húzó feszültségek és 1,89 kA/cm² áramsűrűség esetén. A kemence hőmérséklet 373 K, míg a próbatest közepének hőmérséklete 393 K. A kúszási görbék alakja a húzófeszültség hatására bekövetkező kúszás tipikus jellegzetességeit mutatja. Rövid átmeneti szakaszt követően a kúszás az állandósult állapotba kerül. A szekunder kúszás során a nyúlás lineáris függvénye az időnek, amiből a kúszássebesség számolható. A kúszássebesség növekszik a mechanikai feszültség emelkedésével azonos áramsűrűség és kemence hőmérséklet mellett. Hasonló jelenség figyelhető meg a 2.2 ábrán, ahol az időbeli alakváltozás látható 4,63 MPa feszültségen, változó áramsűrűség mellett. 2,52 kA/cm² áramsűrűség és 348 K kemencehőmérséklet mellett az átfolyó áram által okozott hevítésnek köszönhetően a próbatest hőmérséklete 376 K-re emelkedett. Az ekkor mért kúszássebesség, 3,09 MPa húzófeszültség esetén, nagyjából háromszorosa volt az áram hatása nélküli vizsgálathoz képest, ahol a próbatestet kizárólag a kemence hevítette. Ez az eredmény igazolja – az adott vizsgálati paraméterek esetén –, hogy az egyenáram hatása a kúszás folyamatára nem kizárólag a Joule-hevítésben nyilvánul meg. Vizsgálataik során megállapították, hogy a szekunder kúszássebesség nő a növekvő áramsűrűség hatására (2.3. ábra), mégpedig lineárisan nő az áramsűrűség négyzetével (2.4. ábra). A kísérletek paraméter tartományában (hőmérséklet, feszültség) a kúszási folyamatot irányító meghatározó mechanizmus a diszlokációk mászása. A mozgó elektronok és a fémrács atomjai közötti impulzus átadás növeli az atomok diffúziójának sebességét, ami elősegíti a diszlokációk mászását. Az állandósult kúszás aktiválási energiája az 55,70 - 74,03 kJ/mol, a feszültség kitevő a 4,04 - 6,18 tartományba esik, így az elektromos áramnak nincs jelentős hatása azokra. Az ön próbatesteken átfolyó áram nem változtatja meg a kúszási mechanizmust, ami meghatározza a kúszási alakváltozást.

Chen és Yang (2010) ön indentációs kúszásvizsgálata során szintén arra a megállapításra jutott, hogy a kúszássebesség az áramsűrűség négyzetével lineárisan nő. Az állandósult kúszás aktiválási energiája viszont az áramsűrűség négyzetével lineárisan csökken. Ugyanezen kutatók ólom indentációs kúszásvizsgálatának eredményeiből arra a következtetésre jutottak, hogy az átfolyó áram hatása az aktiválási energia értékére nagymértékben függ a feszültségtől (Chen és Yang, 2011). Magas feszültség szinten lineárisan csökken az áramsűrűség négyzetével, ugyanakkor alacsony feszültség szinten nem változik jelentősen (2.5. ábra).

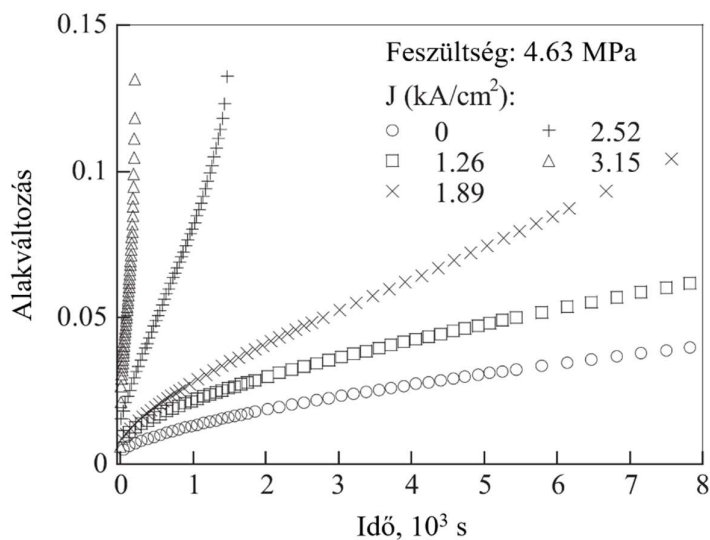
Sn – 3.8 Ag – 0.7 Cu ólommentes forrasanyag egytengelyű húzó kúszásvizsgálatának eredményeképp Su et al. (2012) talált egy olyan áramsűrűség határértéket, amely alatt az átfolyó áramnak nincs jelentős hatása a szekunder kúszássebességre. A határérték felett a kúszássebesség

lineárisan nő az áramsűrűség függvényében. A vizsgálat során a domináns kúszási mechanizmus a vakanciák szemcsén belüli és szemcsehatár menti diffúziója volt (Herring-Nabarro, illetve Cobble kúszás).

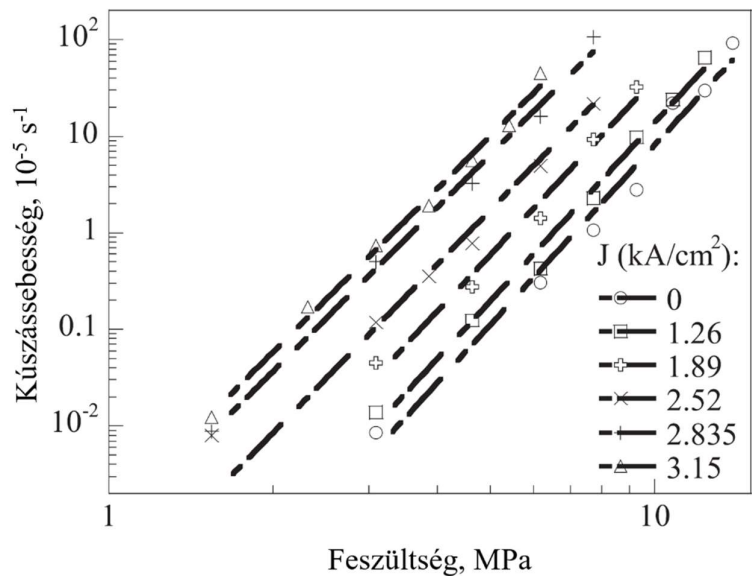
A kutatások eredményei egyeznek abban, hogy az átfolyó egyenáram hatására a primer kúszás mértéke nő, az időtartama pedig csökken (Chen és Yang, 2010; Zhao et al., 2014; Xuan et al., 2011).



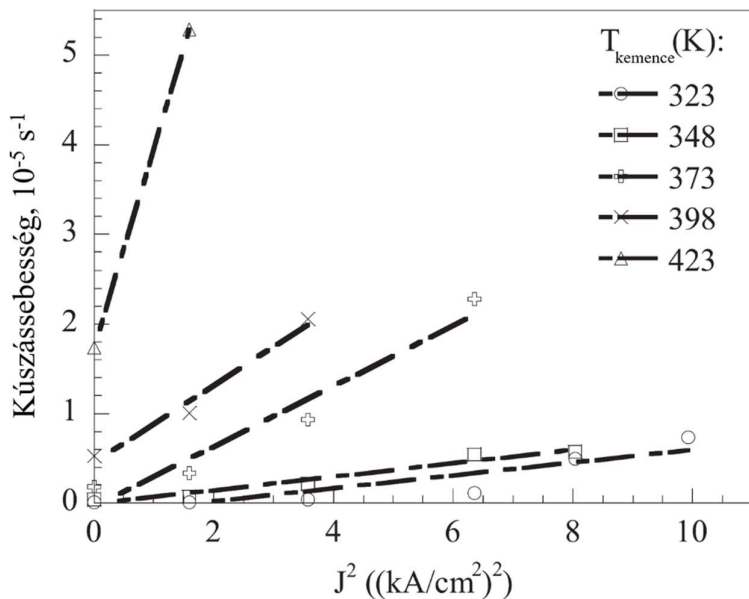
2.1. ábra Az ön kúszási diagramjai különböző húzófeszültségeken, egy adott áramsűrűség (J) esetén (Zhao et al., 2014)



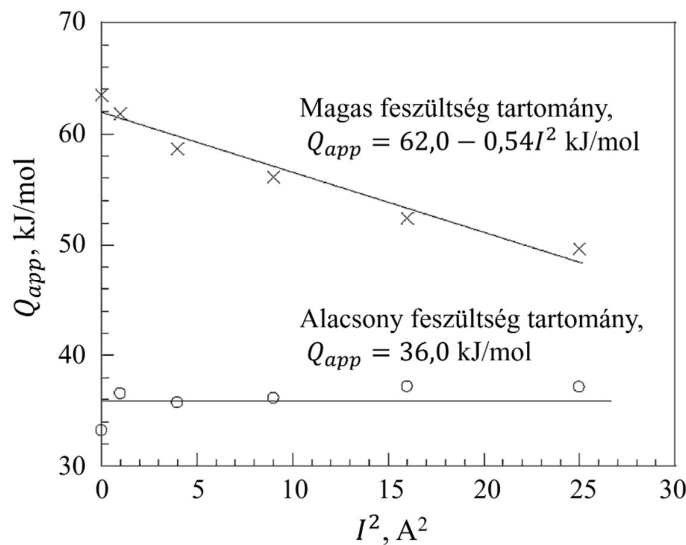
2.2. ábra Az ön kúszási diagramjai különböző áramsűrűségek (J) mellett, egy adott húzófeszültségen (Zhao et al., 2014)



2.3. ábra Polikristályos ón szekunder kúszássebessége a húzófeszültség függvényében különböző áramsűrűségek (J) mellett (Zhao et al., 2014)



2.4. ábra Polikristályos ón szekunder kúszássebessége az áramsűrűség négyzetének függvényében különböző hőmérsékleteken (Zhao et al., 2014)



2.5. ábra Polikristályos ólom állandósult kúszásának aktiválási energiája az áramerősség négyzetének függvényében (Chen és Yang, 2011)

Összességében megállapítható, hogy az átfolyó áram hatással van az anyagok primer- és szekunder kúszási jellemzőire. Az összefüggések azonban nagyon erősen függenek a vizsgálat paramétereitől: a feszültség-, illetve a hőmérséklet tartománytól. A válasz a kúszási folyamatot meghatározó domináns mechanizmusban keresendő. Zhao et al. (2014) összevetette a szekunder kúszás aktiválási energiájára vonatkozó irodalmi adatokat. A diszlokációs mászással megvalósuló kúszás aktiválási energiája megközelítően a fele a diffúziós kúszásénak. Az eddigi kutatásokban igen széleskörű a vizsgált anyagok köre, a vizsgálati módszerek és a vizsgálati paramétertartomány (feszültség, hőmérséklet, áramsűrűség), így nehéz összehasonlítani az azokban található eredményeket. Ráadásul sok jelenség eredete nem tisztázott, a publikációkban gyakran előfordul, hogy a jelenség magyarázata további vizsgálatokat igényel.

Emiatt munkám során egy adott paraméter tartományra összpontosítottam. Egy olyan hőmérséklet és mechanikai feszültség intervallumban írtam le az egyenáram hatását a kúszási folyamatra, ahol a kúszást meghatározó domináns fémtani folyamat a diszlokációk mászása. A diszlokációk mászása a vakanciák diffúziója segítségével valósul meg. Az átfolyó áram hatására növekszik a diffúziós folyamatok sebessége. Ebben a tartományban az állandósult állapotú kúszássebesség feszültségtől

való függésének leírására általánosan használt és elfogadott modell az Arrhenius típusú hatványfüggvényes megközelítés (Nabarro, 2004):

$$\dot{\epsilon} = A\sigma^n \exp\left(\frac{-Q}{RT}\right), \quad (2.1)$$

ahol $\dot{\epsilon}$ a kúszássebesség, A anyagtól függő állandó, σ a terhelő feszültség, n a feszültség kitevő, Q az aktiválási energia, R az univerzális gázállandó, T a hőmérséklet.

Az eddigi kutatások eredményei alapján az egyenáram hatása a következő okokra vezethető vissza:

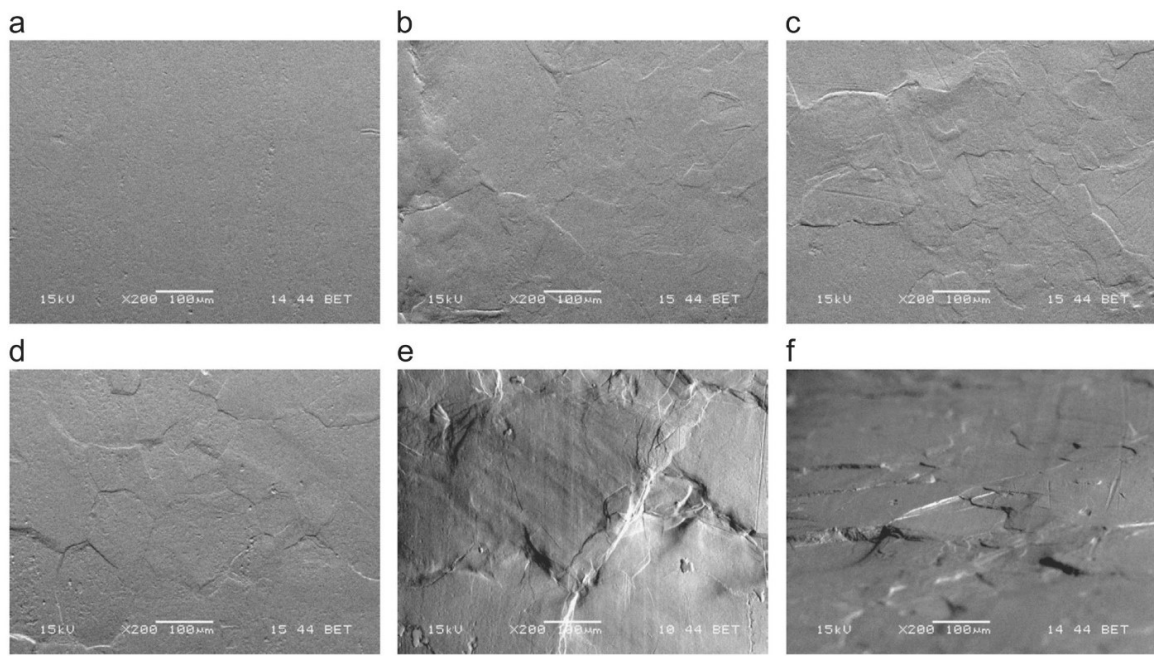
- (i) Az egyenáram okozta Joule-hevítés a hőmérséklet helyi növekedéséhez, és így időfüggő képlékeny alakváltozáshoz vezet.
- (ii) A mozgó elektronok és a fémrács atomjai közötti impulzus átadás csökkenti az atomok elmozdulásához szükséges energiát, és növeli az atomok diffúziójának sebességét.
- (iii) Az áram mező elősegíti a diszlokációs csúszás sebességének és a diffúziós kúszás intenzitásának növekedését.

Összefoglalva a következő megállapítások tehetők a döntően diszlokációk mászásával megvalósuló kúszási folyamatra:

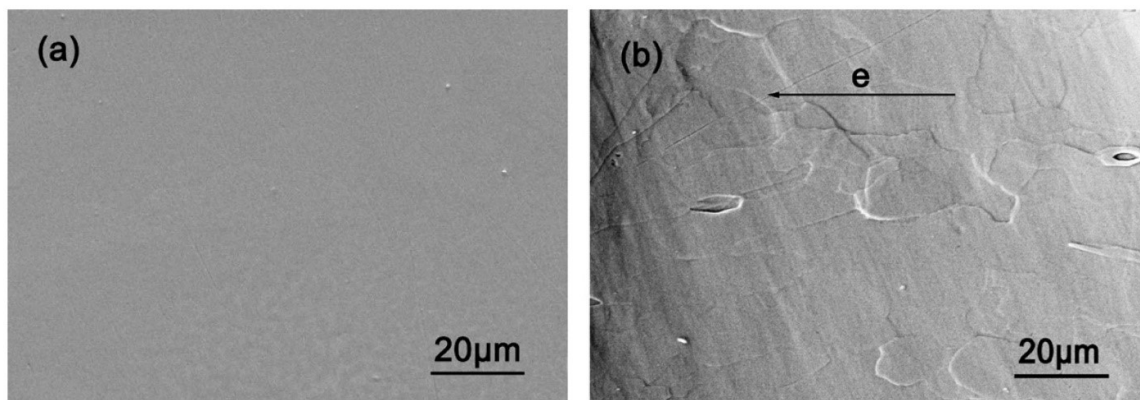
- (i) A szekunder kúszássebesség nő a növekvő áramsűrűség hatására.
- (ii) A szekunder kúszássebesség lineárisan nő az áramsűrűség négyzetével.
- (iii) A szekunder kúszássebesség mechanikai feszültségtől való függését hatványfüggvény írja le.
- (iv) Az elektromos áramnak nincs jelentős hatása az aktiválási energiára és a feszültség kitevőre. Az ön próbatesteken átfolyó áram nem változtatja meg a kúszási mechanizmust, ami meghatározza a kúszási alakváltozást.
- (v) Az elektromos mezőben a primer kúszás mértéke nő, az időtartama pedig csökken.

Az 2.6. ábra a polikristályos ón próbatestek tipikus pásztázó elektronmikroszkópi képét mutatja három különböző elektromechanikai hatás esetén, kb. 4,7 óra eltelte után (Zhao et al., 2014). A 2.6.a ábrán az ón szalagok felületének kiinduló morfológiája figyelhető meg, a hőkezelések és elektromechanikai terhelés előtti állapotban. A felület sima, eltérések vagy szemcsehatárok nem figyelhetők meg azon. A felület morfológiájának változása látszik a 2.6.b ábrán, ami kizárólag a szalagok hőmérsékletének 348 K-re emelésének eredménye. A szemcsehatárokon néhol barázdák megjelenése, és a szemcsék elfordulása figyelhető meg. Az átlagos szemcseméret 60 μm körüli. A 2.52 kA/cm² áramsűrűségű átfolyó egyenáram hatására a próbatestek hőmérséklete a kezdeti 348 K kemence hőmérsékletéről 376 K-re emelkedett. A 2.6.c ábra mutatja, hogy ekkor a szemcsehatármenti barázdák erőteljesebbek lettek. A 3,08 MPa húzófeszültség hatására, 348 K kemencehőmérsékleten a próbatestek kúszási alakváltozást szenvedtek. Ekkor megfigyelhető a szemcsék elfordulása, és a határok mentén való elcsúszása (2.6.d ábra), viszont a 2.6.c ábrán látható állapottal összehasonlítva nem látható jelentős változás a mikroszerkezetben. Az elektromos áram és mechanikai feszültség egyidejű hatására a próbatestek felülete szabálytalanná válik, ahogy azt a 2.6.e és f (80°-ban döntött) ábrák mutatják. Az elektromos és mechanikai együttes hatás nagyobb mértékű volt, mint azokat külön-külön alkalmazva, ami a szemcsehatármenti elcsúszás és a szemcsék elfordulásának további fokozódásában nyilvánul meg. A felület torzulásának intenzitása függ a mechanikai feszültségtől, az áramsűrűségtől, Joule hevítéstől és az időtől. Tehát azonos mechanikai feszültség és időtartam esetén az átfolyó áram erőteljesebbé teszi a felületen található torzulásokat.

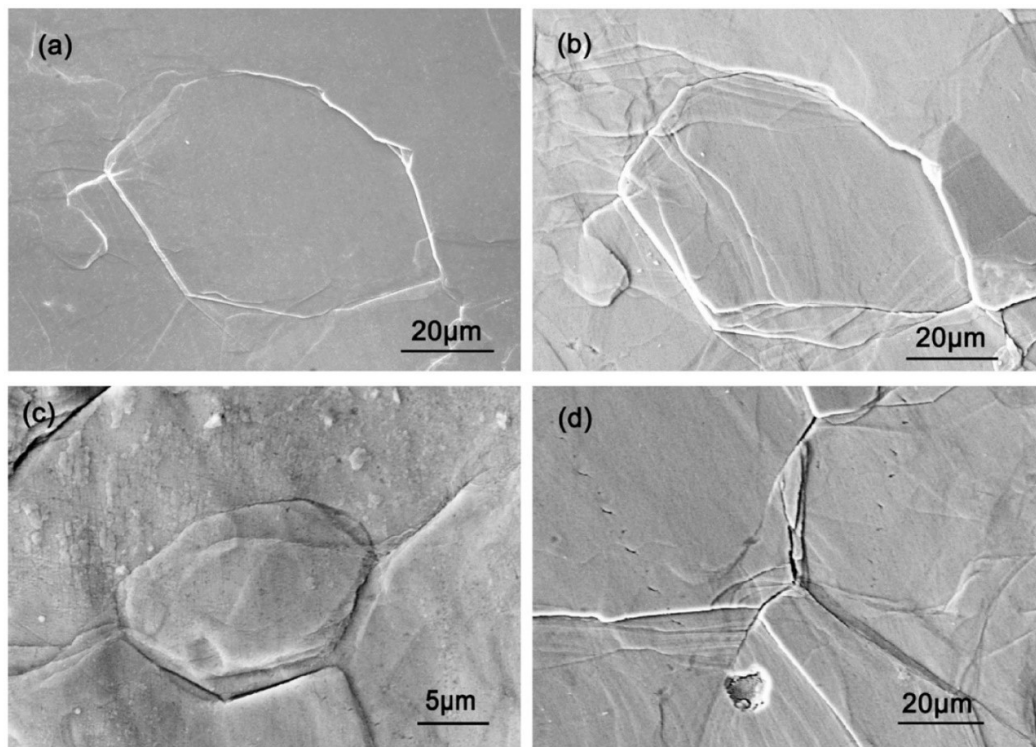
Forrasztott kötések felületének az áram bekapcsolása előtti és utáni morfológiáját mutatja a 2.7. ábra. A forrasztott kötés felületének simasága látható a 2.7.a ábrán, ami 100 órán át fenntartott átfolyó áram hatására barázdált lett (2.7.b ábra). Jól megfigyelhetők a szemcsehatáron lévő barázdák, amik a szemcse elfordulásának vagy elcsúszásának eredményeképp keletkeztek. A 2.8.a ábrán jól látszik a szemcsehatáron keletkezett barázda elektromechanikai terhelés hatására, 130 óra után. A szemcsehatár lesüllyedése a jobb felső oldalon, és felemelkedése a bal alsó oldalon, a szemcse elfordulását szemlélteti. Újabb 50 órás terhelés után a barázdák tovább mélyültek a szemcsehatáron (2.8.b ábra). A próbatest más részein is megfigyelhetők voltak a barázdák kialakulásai, például más szemcsehatárokon (2.8.c ábra) és a szemcsehatárok hármascsomópontjában (2.8.d ábra). A hármascsomópontban keletkezett barázda mélyebb, és a felületen interkristallin repedés kialakulásához vezetett.



2.6. ábra Polikristályos ón próbatetek felületi morfológiájának alakulása termikus, mechanikai és elektromos hatások, valamint azok kombinációja esetén ($t \sim 4.7$ h; a) $J = 0$ A/cm², $\sigma = 0$ Mpa, $T = 273$ K; b) $J = 0$ A/cm², $\sigma = 0$ Mpa, $T = 348$ K; c) $J = 0$ A/cm², $\sigma = 0$ Mpa, $T = 376$ K; d) $J = 0$ A/cm², $\sigma = 3,08$ Mpa, $T = 348$ K; e) $J = 2,52$ kA/cm², $\sigma = 3,08$ Mpa, $T = 348$ K; f) mint e), 80 –os szögben megdöntve) (Zhao et al., 2014)



2.7. ábra Polikristályos ón forrasztott kötés felületi morfológiája (a) elektromechanikai hatás előtt, és (b) 100 órás elektromechanikai terhelés után (Liu et al., 2011)

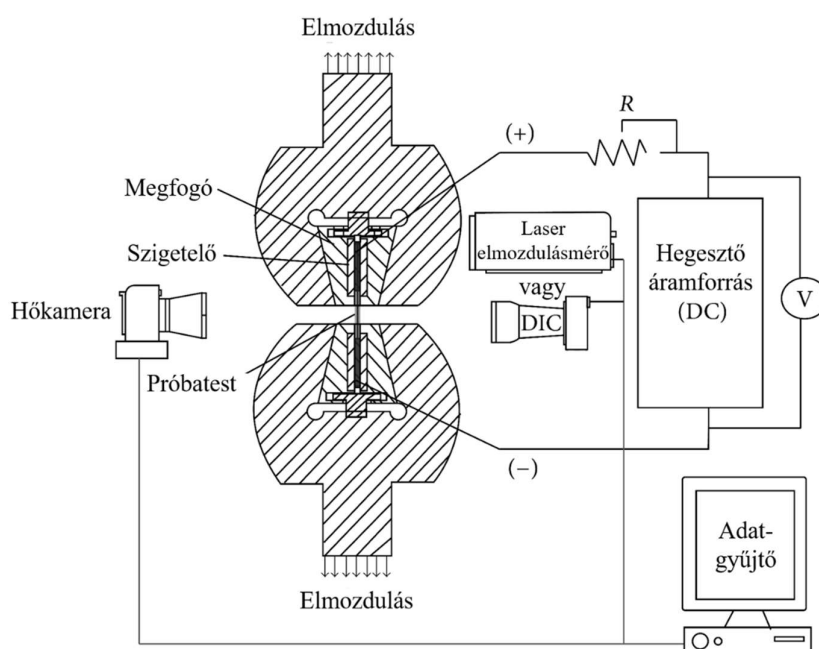


2.8. ábra Polikristályos ón forrasztott kötés felületén látható szemcsehatármenti barázdák (a) 130 órás elektromechanikai terhelés után, (b), (c) további 50 órás terhelés után, és (c) hármass csomópontban (Liu et al., 2011)

Ren et al. (2006) eutektikus 95.5Sn–3.8Ag– 0.7Cu forrasztott kötések szívós-rideg átmenetét vizsgálta húzó igénybevétel során. A vizsgálat előtt a kötésen nagy áramsűrűségű elektromos áram folyt 96 órán keresztül, 145 °C hőmérsékleten. Zang és Zhao (2010) és Zhao et al. (2012) nanoindentációs vizsgálattal megállapították, hogy a növekvő áramsűrűséggel csökken az érintkezési modulus szin ón és réz próbatestek esetén. A feszültség relaxáció sebességének jelentős növekedését tapasztalta Liu et al. (2011) ón forrasztott kötések együttes mechanikus és elektromos terhelése esetén.

Nguyen et al. (2016) szakítóvizsgálat során bekapcsolt áramimpulzus hatását vizsgálta a pillanatnyi húzófeszültségre (2.9. ábra). A kísérletekhez használt AZ31 magnézium-ötvényzet próbatestek vastagsága 1 mm, szélessége 10 mm, jeltávolsága 50mm volt. Az ASTM-E08 szabvány szerint elkészített próbatestek a hengerlés irányában lettek kimunkálva. A kvázistatikus húzóvizsgálat során egyszeri elektromos impulzus haladt át a próbatesten meghatározott nyúlás elérésekor. Történt kontroll vizsgálat is, átfolyó áram nélkül. A húzófeszültség - nyúlás diagramból jól látható az áramimpulzus bekapcsolásakor a húzófeszültség ugrásszerű csökkenése (2.10. ábra). A feszültség

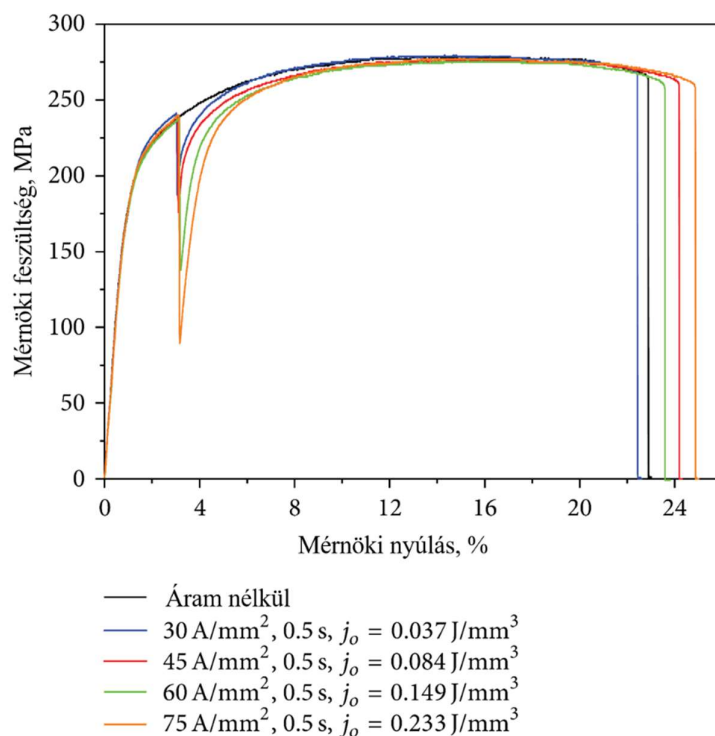
csökkenésének mértéke érzékenyen reagált az áramimpulzus áramsűrűségének változtatására. A 2.11. ábrából látható, hogy az elektromos energiasűrűség növelésével a feszültségesés közel lineárisan nő. Az ábrán a feszültségesés az áramimpulzus bekapcsolásának pillanata előtt fellépő húzófeszültség százalékos arányában van megadva. Az áramimpulzus megszűnése után a húzófeszültség ismét növekedni kezdett a magnézium-ötvözet alakítási keményedésének megfelelően. Az egyszeri áramimpulzus hatására bekövetkező szinte azonnali feszültségesés, majd az azt követő alakítási keményedés jelensége összhangban van az 5052 alumínium-ötvözetten és korszerű nagyszilárdságú acélon végzett kísérletek eredményeivel hasonló vizsgálati körülmények között (Roh et al., 2014., Kim et al., 2014).



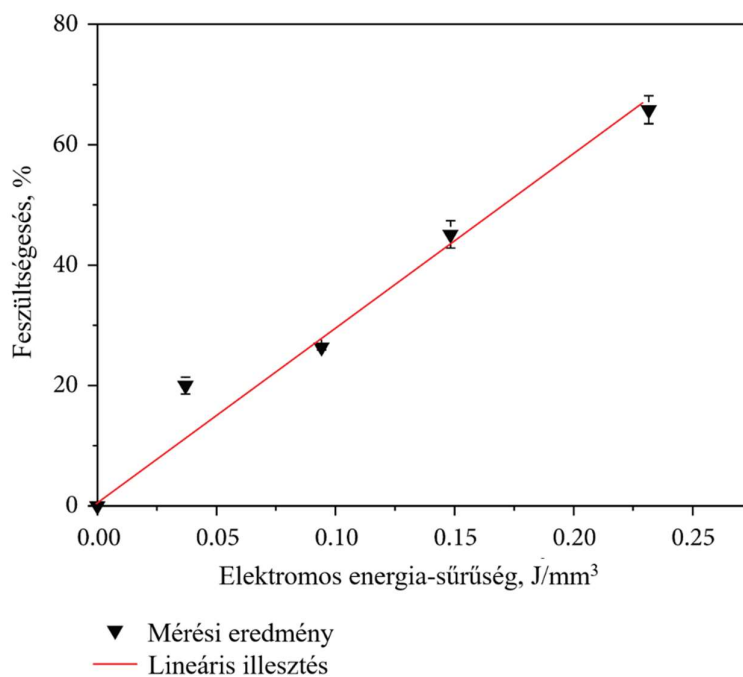
2.9. ábra AZ31 magnézium-ötvözet húzóvizsgálat elrendezésének vázlata (Nguyen et al., 2016)

Az, hogy az alakváltozás fenntartásához szükséges feszültség csökken az áramerősség növekedésével, két okra vezethető vissza:

- (i) A növekvő áramerősséggel erőteljesebbé váló Joule-hevítés hatására emelkedik a hőmérséklet.
- (ii) Az elektromos áram elősegíti a diszlokációk csúszását és mászását, és a diszlokáció sűrűség és a diszlokációk keletkezési sebességének csökkenése elősegíti az alakváltozás fenntartásához szükséges feszültség csökkenését.

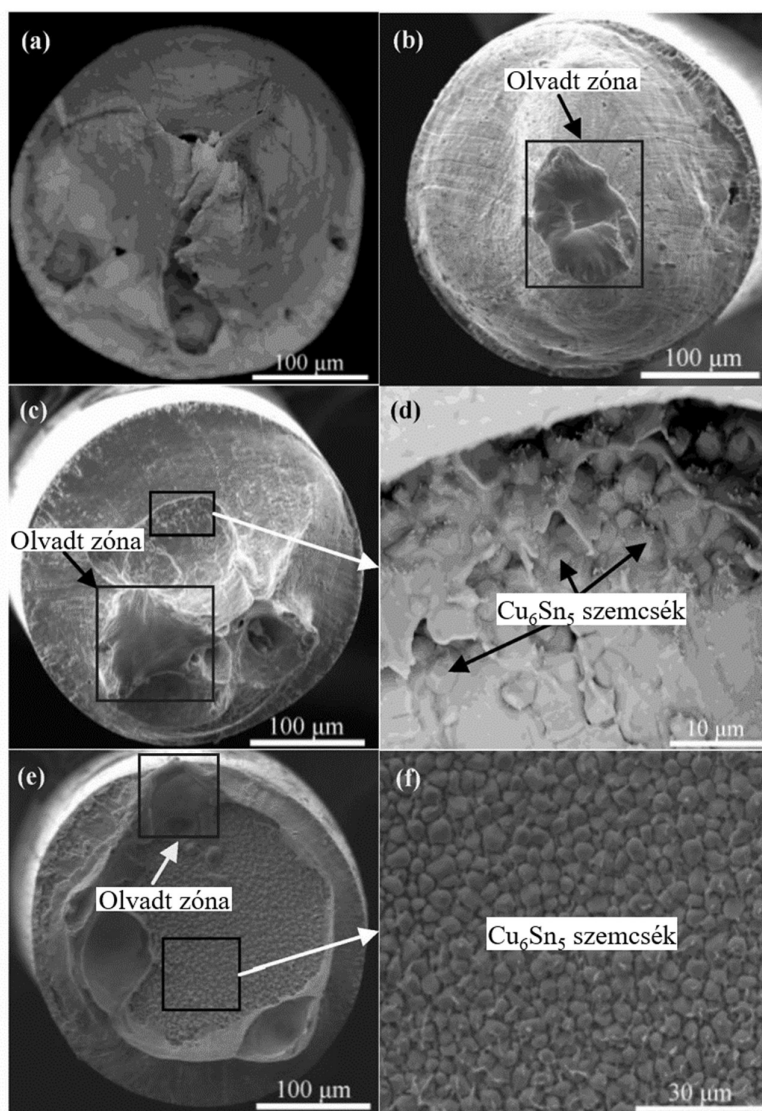


2.10. ábra AZ31 magnézium-ötvözet húzófeszültség – nyúlás diagramja áram hatása nélkül, és különböző áramsűrűségű ($J = 30, 45, 60, 75 \text{ A/mm}^2$) áramimpulzusok ($t = 0,5 \text{ s}$) esetén (Nguyen et al., 2016)



2.11. ábra AZ31 magnézium-ötvözet húzóvizsgálata során az áramimpulzus hatására bekövetkező feszültségesés mértéke az áramimpulzus energiasűrűségének (J/mm^3) függvényében (Nguyen et al., 2016)

A forrasztott kötés törési jellegének megváltozása különböző vastagságok esetén, árammal kombinált húzófeszültség hatására, előrevetíti, hogy a kúszás mechanizmusa változhat a kötés vastagságának függvényében (2.12. ábra) (Li et al., 2015).



2.12. ábra 300 μm átmérőjű, különböző vastagságú forrasztott kötések töretfelületei morfológiájának változása különböző terhelések esetén ((a) forrasz vastagság: 200 μm, terhelés: húzófeszültség; (b) forrasz vastagság: 200 μm, terhelés: húzófeszültség és átfolyó áram, áramsűrűség: $1,0 \times 10^4$ A/cm²; (c) forrasz vastagság: 75 μm, terhelés: húzófeszültség és átfolyó áram, áramsűrűség: $1,0 \times 10^4$ A/cm²; (d) a (c) ábra jelölt részének nagy nagyítású képe; (e) forrasz vastagság: 50 μm, terhelés: húzófeszültség és átfolyó áram, áramsűrűség: $1,0 \times 10^4$ A/cm²; (f) az (e) ábra jelölt részének nagy nagyítású képe) (Li et al., 2015)

Ahogy látható az átfolyó áramnak jelentős hatása van a képlékeny, illetve kúszási alakváltozásra, viszont a rugalmassági modulusz értékét nem befolyásolja (Andrawes et al., 2007).

Fémek alakításakor a képlékeny alakváltozás fenntartásához szükséges erő a technológia sok lényeges paraméterét befolyásolja – például a szerszám szilárdsága, az alakító gép mérete, az alakításhoz szükséges energia, stb. –, így jelentős hatással van a termék költségére. Ez az erő szorosan függ a diszlokációk elmozdulásától és sokszorozódásától, az anyagban lévő hibák – szemcsehatárok, fázishatárok, kiválások, diszlokációk és idegen atomok – növelik értékét (Ross et al., 2007). A hibák számának növekedésével a diszlokáció mozgás fenntartásához szükséges feszültség értéke is emelkedik, tehát egyre növekszik a technológia alakítóerő igénye is. A diszlokáció mozgások valamiféle elősegítése tehát az erőigény, és így a költségek csökkenését eredményezné. A diszlokáció mozgások elősegítésének egy már régóta alkalmazott módja a hőmérséklet emelése. Ennek azonban számos nem kívánt hatása is van: nő a súrlódás a szerszám és a darab között, csökken a kenőanyag hatékonysága, romlik a méretpontosság, és termikus feszültségek ébrednek a szerszámban. Mindezen okok miatt kap egyre nagyobb figyelmet az alakítóerő csökkentésének egy alternatív megoldása, az átfolyó elektromos áram. A diszlokáció mozgáshoz hasonlóan az elektronok áramlását is akadályozzák a különböző anyagszerkezeti hibák. Ezekben a hibákban szóródva az elektronok energiájuk egy részét átadják azoknak, ami a Joule-hevítésben, kinetikus energiaként és a maradó feszültség-alakváltozás mező energiájaként nyilvánul meg. A Joule-hevítés hatása a hőmérséklet növelésében jelenik meg, azonban az átfolyó áram hatásának igazi jelentősége a másik két energia átadásban van. A kinetikus energia „lökést ad” a diszlokációknak, míg a visszamaradó energia kedvez a diszlokációk keletkezésének és elmozdulásának. Mindezekből következően az várható, hogy az alakító művelet során alkalmazott elektromos áram jelentősen csökkenti a művelet energiaigényét és költségét. Troitskii (1969) a fémek, elektromos impulzusok hatására bekövetkező, átmeneti folyáshatár csökkenéséről számol be. Azóta Xu et al. (1988), Chen et al. (1998), és Conrad (2000, 2002) tanulmányai is rámutattak az elektromos áram és az anyagtulajdonságok megváltozása közötti kapcsolatra. Andrawes et al. (2007) 6061 alumínium ötvözet alakítása során átfolyó egyenáram jelenlétében a folyási feszültség jelentős csökkenését tapasztalta, a munkadarab hőmérsékletének számottevő emelkedése nélkül. Az alumínium mikroszerkezetét vizsgálva Heigel et al. (2000). megmutatta, hogy a kismértékű mikroszerkezeti változások nem okozhatták az áram jelenlétében, az alumínium mechanikai viselkedésében bekövetkező jelentős változásokat. Továbbá Perkins et al. (2007) igazolta, hogy az elektromos áram okozta hatások jelentősebbek annál, minthogy azokat a Joule-hevítéssel magyarázni lehetne.

3. Az irreverzibilis alakváltozás szintézis elmélete

Az irreverzibilis alakváltozást leíró szintézis elmélet egyesíti magában a Budiansky-féle csúszási és a Sanders-féle folyási elméletet. A szintézis elmélet az alakítás hatására keményedő viselkedést leíró anyagmodellek csoportjába tartozik és alkalmazható a polikristályos anyagok kis képlékeny, illetve kúszási alakváltozásának leírására (Rusinko, A., & Rusinko, K., 2009,2011).

3.1 A szintézis elmélet alapjai

I. A szintézis elmélet mind matematikai, mind fizikai modellként alkalmazható. Az elmélet matematikai modellje teljes mértékben összhangban van a képlékeny alakváltozás alapvető törvényeivel, és megfelel pl. a Drucker posztulátum, a deviátor arányosságának törvénye, valamint az izotrópia posztulátum követelményeinek.

A szintézis elmélet – mint fizikai modell – a mikro- és makroszintű képlékeny alakváltozás leírásán, és a fémek mikroszerkezet (rácshibák létrejötte, szaporodása és életútja) hatásainak figyelembe vételén alapszik. Létrehozását a képlékenységtan klasszikus elméleteinek (például az izotróp- vagy kinematikus keményedési elmélet) hiányosságai inspirálták. A deformációk leírása során ugyanis a klasszikus elméletek figyelmen kívül hagyják a képlékeny alakváltozás és a mikroszerkezet megváltozása közötti összefüggést.

A szintézis elmélet kétszintű modelljében – a kristályok alakváltozási elméleteihez hasonlóan (Asaro, 1983, Hutchinson, 2000, Nemat-Nasser, & Okinaka, 1996) –, kulcskérdés az alakváltozás és az annak során lezajló szerkezetváltozás kapcsolata. A kérdés tehát, hogy képlékeny, illetve kúszási alakváltozást létrehozó mechanizmusok közül melyik vehető figyelembe, illetve a mikroszintű irreverzibilis alakváltozások hogyan köthetők a kristályrács hibáihoz? Tekintsük egy kristály két felének egymáshoz képesti elcsúszását az irreverzibilis alakváltozás alapvető mechanizmusának. A mikroszintű alakváltozások és hibák közötti összefüggés leírásában így kizárólag a kristályhibák és a

képlékeny/kúszási alakváltozás közötti kölcsönhatás lényegi és jól ismert folyamataira koncentrálunk. Ez a megközelítés lehetővé teszi a viszonyok relatíve egyszerű mikroszintű leírását úgy, hogy közben a modell az anyag valós viselkedését reprezentálja. Az alakváltozást kísérő, azt kiváltó mechanizmusok túlzóan részletes megfogalmazása és leírása nehézkesen használható formalizmushoz vezetne, mely elfedné a valóban meghatározó folyamatokat.

Összefoglalva, a szintézis elmélet a folyamatok valóság-hű leírása és az egyszerű használhatóság közötti kompromisszummal a műszaki gyakorlatnak szeretne megfelelő eszközt nyújtani.

II. Vezessük be az alakváltozás típusától (képlékeny alakváltozás, vagy kúszási alakváltozás) független fogalmat: az irreverzibilis (visszafordíthatatlan) alakváltozást. Ebben az esetben az alakváltozást nem bontjuk fel azonnali (képlékeny) és a kúszási (viszkózus) alakváltozás összegére (Rusinko, A., 2008, 2009). Az azonnali és kúszási alakváltozás létrejötte, illetve egymáshoz való viszonya az egyedi terhelés-hőmérséklet rendszer függvénye. Az azonnali, illetve időfüggő alakváltozás hasonló természetéből következik az irreverzibilis alakváltozás egységes használatának indokltsága, hiszen a meghatározó mechanizmus mindkét esetben azonos (egy szemcse egyes részeinek egymáshoz képesti elcsúszása). Ez a csúszás főképp a diszlokációk elmozdulásának következménye. A diszlokációmozgással együtt jár, illetve kölcsönhatásban van a kristályrács egyéb hibáival (pl. vakanciák, intersztíciós atomok, stb.). Természetesen a hibák kialakulásának hajtóereje és okai a terhelés körülményeitől függenek. Annak ellenére, hogy a különböző terhelések hatására eltérő fémtani folyamatok játszódhatnak le, számos kísérleti eredmény mutatja, hogy mindegyikben szerepet játszik a diszlokációk mozgása. Több tény is utal az azonnali és időfüggő képlékeny alakváltozás természetének hasonlóságára, például:

- (i) a hidrosztatikus feszültségállapot nincs hatással a kúszási alakváltozásra,
- (ii) a feszültség és a kúszási alakváltozás sebesség főtengelei egybeesnek,
- (iii) a térfogat állandó a kúszási alakváltozás során (Betten, 2005).

Ezek az eredmények érvényesek az azonnali képlékeny alakváltozás esetére is [Chen, & Han (2007), Chakrabarty (2000)].

III. Követve a maradó alakváltozások egységes leírásának tendenciáját (pl. Chaboche et al., 1996, 1997), a nem rugalmas alakváltozások teljes spektrumának leírására alkalmas konstitutív egyenletrendszer került kidolgozásra. A szintézis elmélet esetében a rendszer általános alkalmazhatósága a következőkön alapszik:

- (i) Egyetlen egyenlet teremt kapcsolatot a mikroszintű alakváltozás, az alakváltozás hatására a kristályos szerkezetben keletkező hibák, illetve az idő között. A mikro- és makroszintű alakváltozások közötti kapcsolat is egyértelmű, tekintve, hogy az irreverzibilis mikro-alakváltozások összege adja a makro-alakváltozás mértékét.
- (ii) A keményedés szabályát oly módon írja le, hogy a keményedési felület speciális szabályszerűség szerint viselkedik. Továbbá a keményedési felület megváltozásának kinetikája nem előre definiált, azt a terhelési út határozza meg.

A folyási elméletek folytonos keményedési felületeivel ellentétben a szintézis elmélet, mivel a csúszási elmélet utódjának tekinthető (Rusinko, K., 1981, 1986), előre vetíti egy csúcspont megjelenését a keményedési felületben. Ezáltal képes leírni a képlékeny alakváltozás különleges esetét egy járulékos ortogonális terhelés környezetében. Ugyanakkor a csúszási elméletnek van egy komoly hiányossága (Joshimure, 1958), ami abban áll, hogy a modell állandók értéke a terhelési esettől nem függetlenek. Következésképp sem a folyási elméletek, sem a Batdorf-Budiansky csúszási elmélet nem elégíti ki maradéktalanul a képlékenységtan elméleteivel szemben támasztott főbb követelményeket. Így kijelenthető, hogy szükség lenne egy hatékonyabb matematikai modellre.

Összefoglalva, a szintézis elmélet alkalmas mind az azonnali, mind a kúszási képlékeny alakváltozás egyidejű figyelembe vételére. Számos nem klasszikus probléma – mint például a negatív előjelű és inverz kúszás, megelőző mechanikus-, termikus- és ultrahangos kezelések hatása a kúszásra, stb. – kezelése is megoldható a szintézis elmélet alapján. Ezen esetekben az azonnali és kúszási képlékeny alakváltozás hatással van egymásra, így azok leírása nem lehetséges különálló modellek alkalmazásával.

3.2 Ilyusin-féle deviátor tér

Legyen az Ilyusin-féle feszültség- és alakváltozás deviátor tér, \mathcal{S}^5 és \mathcal{E}^5 , (Ilyushin, 1963, BÉDA et al., 1995). A feszültség- és alakváltozás-vektor komponensei $\vec{S} = S_i \vec{g}_i$ és $\vec{e} = e_i \vec{f}_i$ (\vec{g}_i és \vec{f}_i vektorok rendre \mathcal{S}^5 és \mathcal{E}^5 egységvektorai; egytengelyűek, de mértékük eltérő) a következőképp definiálhatók:

$$S_1 = \sqrt{3/2} S_{xx}, \quad S_2 = S_{xx}/\sqrt{2} + \sqrt{2} S_{yy}, \quad S_3 = \sqrt{2} S_{xz}, \quad S_4 = \sqrt{2} S_{xy}, \quad S_5 = \sqrt{2} S_{yz}, \quad (3.2.1)$$

$$e_1 = \sqrt{3/2} e_{xx}, \quad e_2 = e_{xx}/\sqrt{2} + \sqrt{2} e_{yy}, \quad e_3 = \sqrt{2} e_{xz}, \quad e_4 = \sqrt{2} e_{xy}, \quad e_5 = \sqrt{2} e_{yz}, \quad (3.2.2)$$

ahol S_{ij} és e_{ij} ($i, j = x, y, z$) jelöli a feszültség- és alakváltozás deviátor tenzor komponenseit. Ezek:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad (3.2.3)$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}, \quad (3.2.4)$$

ahol δ_{ij} a Kronecker delta,

$$\sigma = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk}, \quad (3.2.5)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}. \quad (3.2.6)$$

Az \vec{S} vektor hosszát a feszültség deviátor tenzor második skalár invariánsa J_2 adja:

$$|\vec{S}| = 2\sqrt{3}J_2. \quad (3.2.7)$$

Emellett $|\vec{S}|$ az úgynevezett csúsztató feszültség intenzitásból, τ_0 , származtatható:

$$|\vec{S}| = \sqrt{2/3} \tau_0. \quad (3.2.8)$$

A szintézis elméletben az alakváltozás-feszültség, illetve az alakváltozás-idő függvények meghatározása \mathcal{S}^5 három dimenziós alterében (\mathcal{S}^3) történik.

3.3. A nem rugalmas alakváltozások számításának kétszintű megközelítése, a Batdorf-Budiansky csúszási elmélet

A Batdorf-Budiansky csúszási elmélet fő megállapításai (Batdorf, & Budiansky, 1949):

- (i) A képlékeny alakváltozás két szinten, mikro- és makroszinten kerül meghatározásra. Makroszintként a test egy V elemi térfogatát vesszük, amely matematikai értelemben egy pontként definiálható. Ez a térfogat sok mikroszintű, V_0 térfogatot tartalmaz, melyek mindegyike folytonos, illetve terhelés hatására alakváltozásra képes. A mikro-térfogat a test egy szemcséjeként értelmezhető.

- (ii) A feszültségeloszlás homogénnek feltételezett a V_0 térfogatokban, tehát ha például a test egy pontja síkbeli feszültségállapotban van, a pont minden V_0 térfogata is síkbeli feszültségállapotban lesz.
- (iii) A képlékeny alakváltozás a V_0 mikro-térfogaton belül a térfogat két részének egymáshoz képesti elcsúszásaként értelmezhető. Ennek következtében a V_0 mikro-térfogatban, a feszültség egyenletes eloszlásától eltérően, a képlékeny alakváltozás (vagy képlékeny csúszás) erősen függ a csúszási rendszer terhelő erőhöz képesti orientációjától. Megfelelően nagy számú V_0 térfogatot feltételezve (elméletileg végtelenhez tart), V térfogaton belül az összes lehetséges csúszási rendszer megtalálható.
- (iv) V , térfogat összes alakváltozása (tehát a test egy pontjának alakváltozása) a V_0 térfogatokban keletkező alakváltozási komponensek összegeként kerül leírásra.

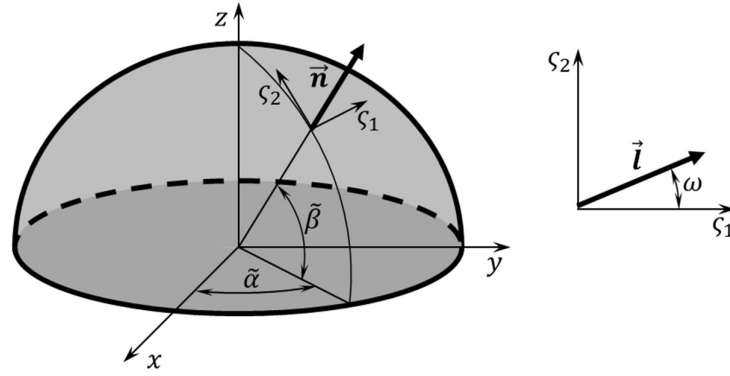
3.4 A folyási felület értelmezése, mint az érintő síkok belső burkoló felülete

Kiindulási pontként tekintünk Tresca folyási feltételét. Sanders (1954) nyomán a folyási felület helyett a folyási felületre érintőleges síkok bevezetését javasoljuk. Ennek eredményeképp a folyási felület az érintő síkok belső burkoló felületeként értelmezhető.

A test egy pontjában ébredő τ_{nl} csúsztató feszültség a S_i feszültségvektor komponenseivel kifejezve:

$$\tau_{nl} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{3}l_x n_x S_1 + (l_y n_y - l_z n_z) S_2 + (l_x n_z + l_z n_x) S_3 + (l_x n_y + l_y n_x) S_4 + (l_y n_z + l_z n_y) S_5], \quad (3.4.1)$$

ahol n_i és l_i ($i = x, y, z$) az ortonormális \vec{n} és \vec{l} vektorok Descartes koordináta rendszerbeli iránykoszinuszai a test egy pontjában (3.1 ábra). Az \vec{n} normálvektor a τ_{nl} feszültség síkját, míg az ebben a síkban fekvő \vec{l} vektor a feszültség irányát adja meg. Az \vec{n} és \vec{l} vektorok egy csúszási rendszert alkotnak. Az n_i és l_i koszinuszok kifejezhetők gömbi koordináta rendszer $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, és ω szögeivel (Rusinko, K., 1981). A (3.4.1) egyenletből látható, hogy $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, és ω minden értékéhez egy sík rendelhető az S^5 térben. Fizikai értelemben így minden, a (3.4.1) egyenletből származtatható sík a test egy pontjához tartozó egy-egy csúszási rendszert fejez ki.



3.1. ábra Csúszási sík gömbi koordinátái ($\tilde{\alpha}$ és $\tilde{\beta}$) egységnyi sugarú félgömbön; a csúszási irányt a síkon a $\zeta_1 - \zeta_2$ koordináta rendszer ω szöge adja meg

A Tresca folyási feltétel kimondja, hogy a képlékeny csúszás azon a csúszási rendszeren indul meg, ahol a csúsztató feszültség először éri el a τ_S folyáshatárt. Ez analitikusan a következőképpen fejezhető ki:

$$\frac{\partial \tau_{nl}}{\partial \tilde{\alpha}} = \frac{\partial \tau_{nl}}{\partial \tilde{\beta}} = \frac{\partial \tau_{nl}}{\partial \omega} = 0, \quad (3.4.2)$$

$$\tau_{nl} = \tau_S. \quad (3.4.3)$$

Másrésről a (3.4.2) és (3.4.3) egyenletek által alkotott egyenletrendszerből $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ és ω kijtésével megalkotható a síkok burkoló felülete (3.4.3). Így arra a következtetésre jutunk, hogy a Tresca folyási felület burkoló felülete lesz a síkok következő rendszerének:

$$\sqrt{3}l_x n_x S_1 + (l_y n_y - l_z n_z) S_2 + (l_x n_z + l_z n_x) S_3 + (l_x n_y + l_y n_x) S_4 + (l_y n_z + l_z n_y) S_5 - \sqrt{2} \tau_S = 0. \quad (3.4.4)$$

Mivel a (3.4.4) egyenletből következően egy sík orientációja ötdimenziós térben egyértelműen meghatározható három paraméterrel, az $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ és ω szögekkel, felmerül a kérdés, vajon a (3.4.4) egyenlet által meghatározott síkok rendszere tartalmazza-e a Tresca folyási felület összes érintő síkját?

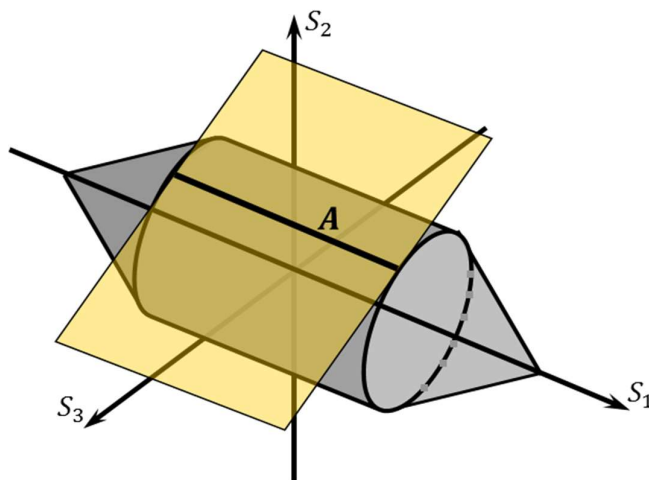
A válasz igen, mivel a (3.4.2)-(3.4.3) egyenletrendszerből (négy egyenlet, öt változó) következik, hogy a Tresca folyási felület, illetve annak érintő síkjai közötti érintkezés, általános esetben, olyan görbe mentén történik, mely az ötödik változó szerepét tölti be. Az eset egyszerű szemléltetéséhez

vegyük a Tresca folyási felületet síkbeli feszültségállapot esetén a három dimenziós \mathcal{S}^3 altérben. A 3.2 ábrán látható, hogy a Tresca folyási felület és az érintő sík érintkezési pontjai az A vonalat jelölik ki.

Az \vec{N} vektor (3.4.4) síkra normális irányú komponensei (N_1, \dots, N_5) az alábbi módon számolhatók:

$$\begin{aligned} N_1 &= \sqrt{3}l_x n_x, & N_2 &= l_y n_y - l_z n_z, & N_3 &= l_x n_z + l_z n_x, \\ N_4 &= l_x n_y + l_y n_x, & N_5 &= l_y n_z + l_z n_y. \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Könnyen belátható, hogy \vec{N} vektor egységvektor. Így a (3.4.4) egyenlet által leírt síkok egyenlő távolságra helyezkednek el az origótól: $H_N = \sqrt{2}\tau_s$ (az 'N' index az \vec{N} normálvektort jelöli). Kihangsúlyozandó, hogy az előző megállapításokból nem következik, hogy a (3.4.4) egyenlet által leírt síkok belső burkoló felülete gömböt adna \mathcal{S}^3 -ban. A 3.2. ábrán szereplő példa azt mutatja, hogy síkbeli feszültségállapot esetén a Tresca folyási felületet egy henger és az ahhoz kapcsolódó két kúp alkotja.



3.2. ábra A Tresca folyási felület, és egy síkbeli feszültségállapotot jellemző érintő sík érintkezésének (A vonal) helyzete \mathcal{S}^3 -ban

Az \mathcal{S}^3 ($S_4 = 0, S_5 = 0$) háromdimenziós altérben a (3.4.4) egyenlet a következőképp alakul:

$$\sqrt{3}l_x n_x S_1 + (l_y n_y - l_z n_z) S_2 + (l_x n_z + l_z n_x) S_3 - \sqrt{2}\tau_S = 0. \quad (3.4.6)$$

A (3.4.6) egyenlet a (3.4.4) ötdimenziós sík nyomvonalát adja az \mathcal{S}^3 háromdimenziós altérben. A (3.4.6) sík d normalizációs tényezője:

$$d = \sqrt{1 - l_y^2 - n_y^2 + 4l_y^2 n_y^2}. \quad (3.4.7)$$

A (3.4.6) egyenlet síkjai megadhatók az origótól való távolságuk (\mathcal{S}^3 -ban (h_m)), és normálvektoraik, $\vec{m}(m_1, m_2, m_3)$, segítségével:

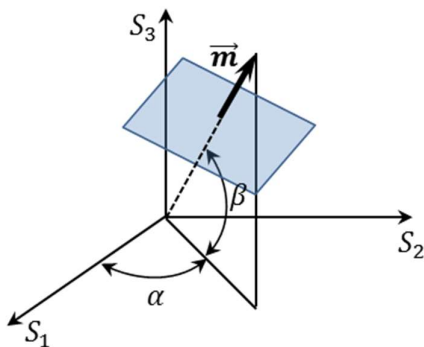
$$m_1 S_1 + m_2 S_2 + m_3 S_3 = h_m, \quad (3.4.8)$$

ahol m_i ($i = 1, 2, 3$) (3.3. ábra):

$$m_1 = \cos \alpha \cos \beta, \quad m_2 = \sin \alpha \cos \beta, \quad m_3 = \sin \beta. \quad (3.4.9)$$

Az \vec{N} és \vec{m} normálisok közötti λ szöget bevezetve kapjuk, hogy

$$\cos \lambda = \vec{N} \cdot \vec{m}. \quad (3.4.10)$$



3.3. ábra \vec{m} normális orientációja \mathcal{S}^3 -ban

A h_m és H_N közötti összefüggés a λ szöggel kifejezve (Rusinko, K., & Andrusik, 1993):

$$H_N = h_m \cos \lambda. \quad (3.4.11)$$

A fenti összefüggést a 3.4. ábra szemlélteti, ahol a megjeleníthetőség érdekében az 1 felület jelképezi az S^5 -beli folyási felületet, 2 annak érintő síkját, és 3 a sík nyomvonalát a 4 síkon. $OM_1 = H_N = \sqrt{2}\tau_S$ a 2 sík távolsága, illetve $OM_2 = h_m = H_N/\cos \lambda$ a 3 nyomvonal távolsága. Abból, hogy a (3.4.6) és (3.4.8) egyenletek ugyanazt a síkot írják le következik, hogy

$$m_1 = \sqrt{3}l_x n_x / d, \quad m_2 = (l_y n_y - l_z n_z) / d, \quad m_3 = (l_x n_z + l_z n_x) / d, \quad (3.4.12)$$

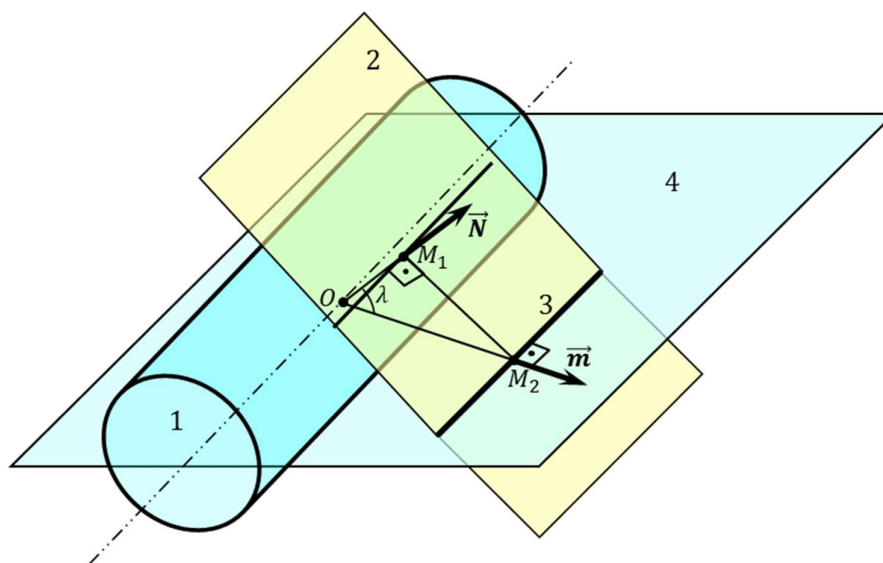
$$h_m = \sqrt{2}\tau_S / d.$$

A (3.4.6), (3.4.8) és (3.4.11) egyenletekből következik, hogy $d = \cos \lambda$. Ezzel a (3.4.12) egyenlet a

$$\sqrt{3}l_x n_x = m_1 \cos \lambda, \quad l_y n_y - l_z n_z = m_2 \cos \lambda, \quad l_x n_z + l_z n_x = m_3 \cos \lambda, \quad (3.4.13)$$

formát ölti. (3.4.5) és (3.4.13) egyenletekből:

$$N_k = m_k \cos \lambda \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.4.14)$$



3.4. ábra Egy sík és nyomvonala közötti távolság szemléltetése

Mivel \vec{l} és \vec{n} , vektorok ortonormálisak, írható, hogy

$$l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 1, \quad n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1, \quad l_x n_x + l_y n_y + l_z n_z = 0. \quad (3.4.15)$$

A hat egyenletet és hat változót (l_x, \dots, n_z) tartalmazó (3.4.13) és (3.4.15) egyenletrendszer megoldásával kapjuk, hogy

$$l_x n_y + l_y n_x = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 \lambda}{2} + \chi}, \quad l_z n_y + l_y n_z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 \lambda}{2} - \chi}, \quad (3.4.16)$$

ahol

$$\chi = \frac{(\bar{m}_1 - m_2)(3\bar{m}_1 + m_2)\{1 - [3 - 2(\bar{m}_1 - m_2)^2 \cos^2 \lambda]\} - 4m_3 \sqrt{1 - (\bar{m}_1 - m_2)^2} \sqrt{D}}{2[4 - 3(\bar{m}_1 - m_2)^2]}, \quad (3.4.17)$$

$$D = 1 - [2 - (\bar{m}_1 - m_2)^2] \cos^2 \lambda + [1 - (\bar{m}_1 - m_2)^2]^2, \quad \bar{m}_1 = m_1 / \sqrt{3}.$$

(3.4.16) egyenlet (3.4.4) egyenletbe helyettesítésével megkapjuk az érintő sík egyenletét:

$$\begin{aligned} S_1 m_1 \cos \lambda + S_2 m_2 \cos \lambda + S_3 m_3 \cos \lambda + S_4 \left(\pm \sqrt{\frac{\sin^2 \lambda}{2} + \chi} \right) + S_5 \left(\pm \sqrt{\frac{\sin^2 \lambda}{2} - \chi} \right) \\ = \sqrt{2} \tau_S. \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Fentiek alapján a (3.4.4) és (3.4.18) egyenletek ugyanazt a Tresca folyási felületre érintőleges síkot írják le. Az egyetlen különbség a két egyenletben S_i komponensek együtthatóinak kifejezésében található. (3.4.4) egyenlet a Budiansky-féle csúszási elmélet alapján $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, és ω , szögekkel fejezi ki az együtthatókat, míg a (3.4.18) egyenlet az Ilyushin-féle feszültség deviátor térben α , β , és λ szögekkel adja meg azokat. Másképp fogalmazva, hasonlóan a csúszási elmülethez, a Tresca folyási felület S^5 -beli érintő síkjának orientációját α , β , és λ szögek teljesen meghatározzák.

A (3.4.17) egyenlet alapján m_i és λ bizonyos értékei esetén D negatív értéket vehet fel (például: $m_1 = m_3 = 1$, $m_2 = 0$, $\lambda = 0$). Ebből adódik, hogy χ függvény értéke komplex szám is lehet, így léteznek olyan síkok (irányok), melyek burkoló felülete nem értelmezhető.

3.5 Folyási feltétel és folyási felület a szintézis elmélettel kifejezve

A fő ötlet a Tresca folyási felület (mely a (3.4.18)-ban meghatározott síkok belső burkoló felülete) helyettesítése egy olyan felülettel, mely a belső burkoló felületét adja az alábbi síkoknak (Rusinko, A., & Rusinko, K., 2009):

$$S_1 m_1 \cos \lambda + S_2 m_2 \cos \lambda + S_3 m_3 \cos \lambda + S_4 \left(\pm \sqrt{\frac{\sin^2 \lambda}{2} + \chi_0(\lambda)} \right) + S_5 \left(\pm \sqrt{\frac{\sin^2 \lambda}{2} - \chi_0(\lambda)} \right) = \sqrt{2} \tau_s. \quad (3.5.1)$$

A (3.5.1) egyenletben a (3.4.18)-hez képest a $\chi(\alpha, \beta, \lambda)$ függvényt az $\chi_0(\lambda)$ függvény váltja fel, mely kizárólag egy parameter, λ függvénye. Ez esetben az $\vec{N} = N_i \vec{g}_i$ (ahol \vec{g}_i elemei egységvektorok az S^5 térben) normálvektor komponensei a következőképp alakulnak:

$$N_1 = m_1 \cos \lambda, \quad N_2 = m_2 \cos \lambda, \quad N_3 = m_3 \cos \lambda, \\ N_4 = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 \lambda}{2} + \chi_0(\lambda)}, \quad N_5 = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 \lambda}{2} - \chi_0(\lambda)} \quad (3.5.2)$$

Természetesen \vec{N} növekményeit is kifejezhetjük α , β és λ növekményeinek függvényében:

$$d\vec{N}_\alpha = \frac{\partial N_i}{\partial \alpha} \vec{g}_i d\alpha, \quad d\vec{N}_\beta = \frac{\partial N_i}{\partial \beta} \vec{g}_i d\beta, \quad d\vec{N}_\lambda = \frac{\partial N_i}{\partial \lambda} \vec{g}_i d\lambda. \quad (3.5.3)$$

A $d\vec{N}_\alpha$, $d\vec{N}_\beta$, és $d\vec{N}_\lambda$ vektorok által leírt paralelepipedon V térfogata a Gram determináns segítségével számolható:

$$(dV)^2 = \begin{vmatrix} d\vec{N}_\lambda \cdot d\vec{N}_\lambda & d\vec{N}_\lambda \cdot d\vec{N}_\alpha & d\vec{N}_\lambda \cdot d\vec{N}_\beta \\ d\vec{N}_\alpha \cdot d\vec{N}_\lambda & d\vec{N}_\alpha \cdot d\vec{N}_\alpha & d\vec{N}_\alpha \cdot d\vec{N}_\beta \\ d\vec{N}_\beta \cdot d\vec{N}_\lambda & d\vec{N}_\beta \cdot d\vec{N}_\alpha & d\vec{N}_\beta \cdot d\vec{N}_\beta \end{vmatrix}. \quad (3.5.4)$$

A determináns egyszerűsíthető (3.5.2) egyenlet normálvektor komponenseinek felhasználásával:

$$(dV)^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \vec{N}}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial \lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \beta \cos^2 \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2 \lambda \end{vmatrix} (d\alpha d\beta d\lambda)^2 = \frac{\partial \vec{N}}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial \lambda} \cos^2 \beta \cos^4 \lambda (d\alpha d\beta d\lambda)^2. \quad (3.5.5)$$

Ha megköveteljük, hogy dV térfogat az alábbi formulával legyen definiálva

$$dV = \cos \beta d\alpha d\beta d\lambda, \quad (3.5.6)$$

továbbá a χ_0 függvény csak a λ változótól függjön, ezzel biztosítható a folyási felület regularitása a (3.5.1) egyenlettel leírt normális síkokra vonatkozóan. (3.5.5) és (3.5.6) egyenletekből következik, hogy

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial \lambda} = \frac{1}{\cos^4 \lambda}. \quad (3.5.7)$$

A (3.5.2) összefüggés alapján a fenti formula a következő differenciális alakot ölti:

$$\left(\frac{d\chi_0}{d\lambda}\right)^2 - 4 \cot \lambda \cdot \chi_0 \cdot \frac{d\chi_0}{d\lambda} + 4 \left(\frac{1}{\cos^4 \lambda \sin^2 \lambda} - 1\right) \chi_0^2 - \tan^2 \lambda (\tan^2 \lambda + \sin^2 \lambda) = 0. \quad (3.5.8)$$

Ennek megoldásával kapjuk, hogy

$$\chi_0(\lambda) = \frac{1}{2} \sin^2 \lambda \sin y_0, \quad (3.5.9)$$

$$y_0 = 2\sqrt{2} \left[F_0 \left(\lambda, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - E_0 \left(\lambda, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \lambda} \tan \lambda \right],$$

ahol F_0 és E_0 első- és másodfajú nem teljes elliptikus integrálok:

$$F_0 \left(\lambda, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \lambda}}, \quad E_0 \left(\lambda, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \int_0^\lambda \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \lambda} d\lambda. \quad (3.5.10)$$

A $\chi(\alpha, \beta, \lambda)$ függvénnyel ellentétben $\chi_0(\lambda)$ függvény a λ szög semmilyen értékére nem vesz fel komplex értéket. Mivel a $\chi(\alpha, \beta, \lambda)$ függvény komplex értékei csúcspontokat fejeznek ki a Tresca

folyási felületen (ahol derivált nem értelmezhető) az, hogy a $\chi_0(\lambda)$ függvény valós értéket vesz fel λ szög bármely értékénél, elégséges feltétele a (3.5.1) érintő síkjaival meghatározott felület regularitásának. Ezáltal lehetővé válik a (3.5.1) síkok burkoló felületének leírása a szokásos matematikai eszköztár alkalmazásával.

3.6 Folyási felület az \mathcal{S}^3 altérben. Érintő síkok, és azok nyomvonala

A további vizsgálódásokat korlátozzuk a háromdimenziós \mathcal{S}^3 altérre, ahol a (3.5.1) sík nyomvonala a következő alakot ölti:

$$S_1 m_1 \cos \lambda + S_2 m_2 \cos \lambda + S_3 m_3 \cos \lambda = \sqrt{2} \tau_S. \quad (3.6.1)$$

A (3.6.1) síkok burkoló felületének egyenlete a (3.6.1), illetve az alábbi egyenletekből alkotott egyenletrendszerből származtatható:

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = \frac{d\tau}{d\beta} = \frac{d\tau}{d\lambda} = 0, \quad (3.6.2)$$

ahol τ (3.6.1) bal oldala. (3.6.1) és (3.6.2) egyenletekből következik, hogy

$$\tan \alpha = \frac{S_2}{S_1}, \quad \tan \beta = \frac{S_3}{S_1 \cos \alpha + S_2 \sin \alpha}, \quad \lambda = 0. \quad (3.6.3)$$

A fenti összefüggések of α , β , és λ értékeit (3.6.1)-be helyettesítve a folyási felület következő alakú egyenletéhez jutunk:

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 2\tau_S^2. \quad (3.6.4)$$

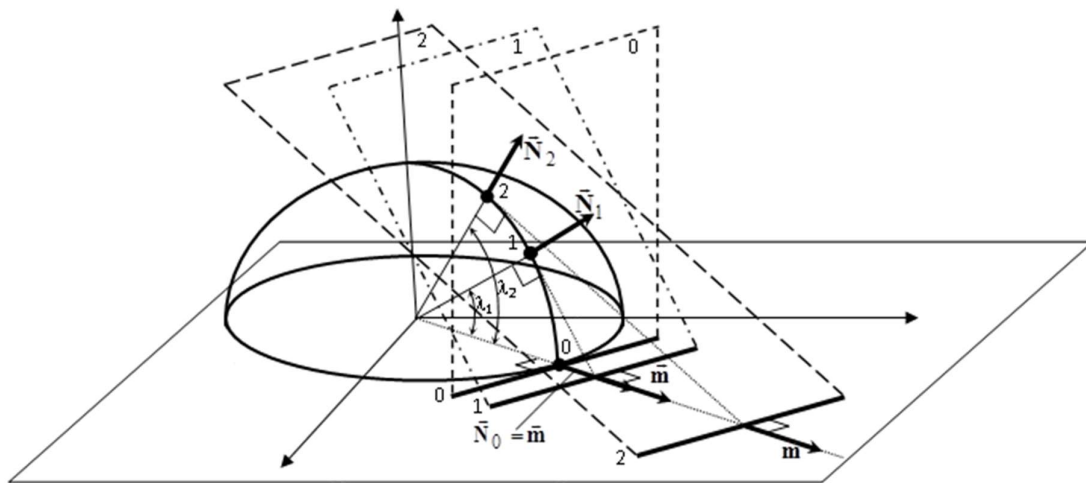
A folyási felület tehát gömb lesz \mathcal{S}^3 -ban, így az kielégíti a von Mises feltételt. Sanders szerint terheletlen állapotban a (3.6.4) gömb úgy is elképzelhető, mint minden irányban elhelyezkedő, egyenlő távolságra lévő $H_N(\lambda = 0) = h_m = \sqrt{2}\tau_S$ síkok belső burkoló felülete. Azonban nagyon fontos leszögezni, hogy ez a gömb egy olyan ötdimenziós folyási felület háromdimenziós lenyomata, amely nem tekinthető sem Tresca- (a (3.5.1) egyenletben eszközölt változtatások miatt), sem von Mises folyási felületnek.

A szintézis elmélet egyik kulcspontja, hogy egy \mathcal{S}^5 -beli érintő sík elhelyezkedése leírható annak \mathcal{S}^3 -beli lenyomatának segítségével. A (3.4.11) egyenletből látható, hogy h_m az alábbi értékeket veheti fel:

$$\sqrt{2}\tau_S < h_m < \infty. \quad (3.6.5)$$

Ebből adódóan a (3.6.1) egyenlet érintő sík lenyomatai a (3.6.4) gömbön túl a teljes \mathcal{S}^3 teret kitöltik. Más megközelítésben, a (3.6.4) gömbön kívül elhelyezkedő bármely sík az \mathcal{S}^5 -beli folyási felület egy érintő síkjának lenyomataként értelmezhető.

A 3.5 ábra olyan esetet ábrázol, ahol \mathcal{S}^5 -beli, különböző normálvektorú (\vec{N}_0 , \vec{N}_1 és \vec{N}_2) érintő síkok (0, 1 és 2) \mathcal{S}^3 -beli lenyomatainak \vec{m} normálvektorai azonos orientációjúak. A 3.5 ábra és a (3.4.11) egyenlet illusztrálja, hogyan lehet a λ szög segítségével megkülönböztetni az ilyen azonos orientációjú \mathcal{S}^3 -beli síkokat (melyek a 3.5. ábrán 0, 1 és 2 jelű nyomvonalként vannak ábrázolva) az \mathcal{S}^5 -beli síkok lenyomataiként. Nevezetesen két azonos orientációjú sík \mathcal{S}^3 -ban párhuzamos egymással (α és β szögek megegyezők, ám λ szögük különböző), viszont h_m távolságuk eltérő. Továbbá (3.4.11) szerint $\lambda = 0$ esetén $H_N = h_m$, amely esetben az \mathcal{S}^5 -beli folyási felületre érintőleges síknak (a 0 jelű sík a 3.5. ábrán) egyben lenyomata is érintőleges lesz az \mathcal{S}^3 -beli (3.6.4) gömbre.



3.5. ábra Érintő síkok és lenyomataik (a megjeleníthetőség érdekében az \mathcal{S}^5 -beli folyási felületet félgömb jelképezi, míg a kör szemlélteti a folyási felület \mathcal{S}^3 -beli képét)

Általánosságban elmondható, hogy bármely \mathcal{S}^3 -beli sík végtelen számú \mathcal{S}^5 -beli síknak a lenyomata lehet. Azok közül viszont csak egy lesz érintője az \mathcal{S}^5 -beli folyási felületnek. A folyási felületre nem érintőleges síkokat nem vesszük figyelembe.

3.7 A keményedési felület. Mikro- és makroszintű nem rugalmas alakváltozás

Sanders (1954) kiterjesztette a folyási felületnek, mint érintősíkok belső burkoló felületeként történő értelmezését a terhelés alatti állapotra is. Terhelés során az \vec{S} vektor végpontjával (támadáspont) kimozdítja kezdeti pozíciójából az avval érintkező síkokat. A síkok elmozdulása kizárólag translációs, orientációjuk változatlan marad. Az \vec{S} vektor végpontjával nem érintkező síkok mozdulatlanok maradnak. Egy sík elmozdulása szimbolizálja egy csúszási rendszer képlékeny mikroalakváltozását.

Egy sík elmozdulásának feltételeként írható, hogy

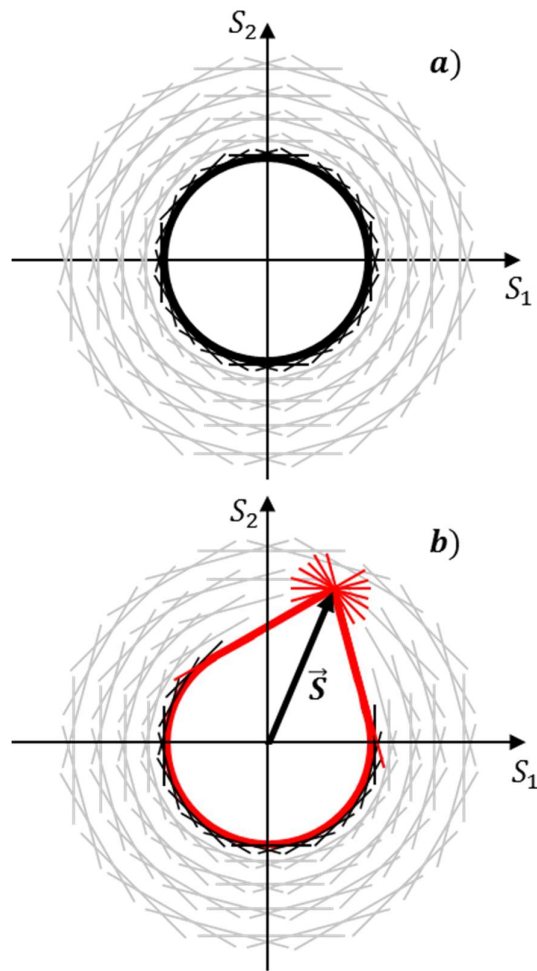
$$H_N = \vec{S} \cdot \vec{N}. \quad (3.7.1)$$

Ebből eredeztethetően az érintő síkok belső burkoló görbéjeként értelmezett keményedési felület alakját a terhelési út, vagyis a síkok pillanatnyi pozíciója határozza meg.

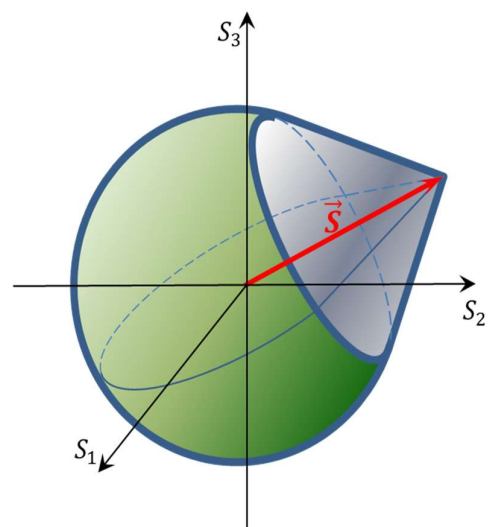
A 3.6.a ábra mutatja a síkok helyzetét és belső burkoló felületüket ((3.6.4) szerinti gömb) terheletlen állapotban. Az \vec{S} vektor által elmozdított síkok helyzete, és az ennek hatására kialakuló keményedési felület a 3.6.b és 3.7 ábrákon figyelhető meg. Látható, hogy a keményedési felület két különálló részből áll:

- (i) a helyben maradó síkok ($H_N = \sqrt{2}\tau_S$), belső burkolójaként előállított gömb (3.6.4), és
- (ii) az \vec{S} vektor hatására elmozdult síkok által alkotott kúp.

A kúp csúcsában található a terhelés során \vec{S} vektor által elmozdított síkok. Könnyen belátható, hogy a támadáspontban egy csúcspont jön létre a keményedési felületen. Ez a csúcspont nagy jelentőséggel bír, különösen a görbe pályájú terhelések hatására létrejövő nem rugalmas alakváltozások meghatározásakor (Rusinko, & Fenyvesi, 2014, Rusinko, 2014).



3.6. ábra A folyási- és keményedési felület értelmezése Sanders szerint



3.7. ábra A keményedési felület ábrázolása \mathcal{S}^3 -ban (a síkok nincsenek ábrázolva)

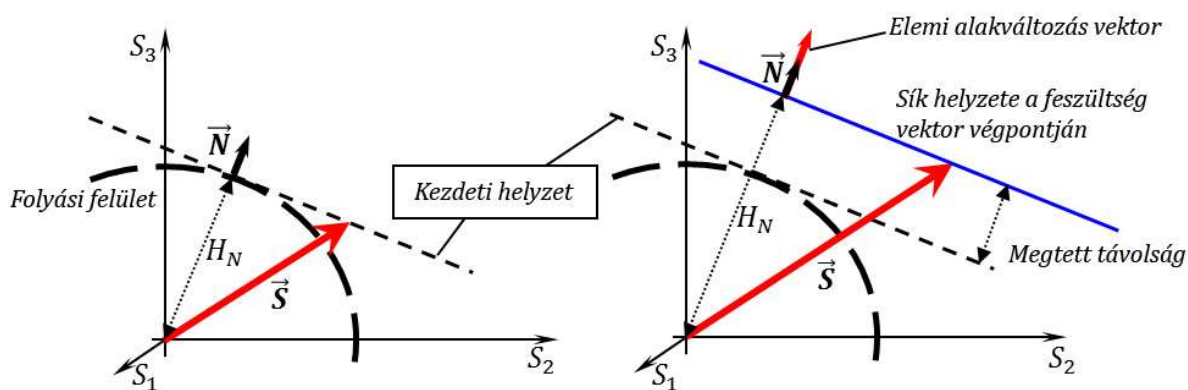
Más elméletekkel ellentétben (például az izotróp- vagy kinematikus keményedés elmélete), a szintézis elméletben a keményedési felület fejlődése nincs előre meghatározva, azt teljes mértékben a feszültségvektor hodográfja határozza meg.

A 3.6 és 3.7 ábrák mutatják, hogy az anyag terheletlen állapotban izotróp, míg képlékeny alakváltozás hatására erős anizotrópiát mutat.

Mivel minden érintő sík egy-egy csúszási rendszert jelképez, az \vec{S} vektor által elmozdított síkok az irreverzibilis alakváltozás egy-egy elemi részét képviselik az adott csúszási síkon. Így az érintő síkok elmozdulása megfeleltethető a képlékeny alakváltozást kísérő fizikai folyamatokkal. A $d\vec{e}$, elemi irreverzibilis alakváltozás-vektor a sík normálisának irányába esik és arányos a (3.5.6) egyenletben meghatározott dV térfogattal (3.8. ábra). Kifejezhető a

$$d\vec{e} = \varphi_N \vec{N} dV \quad (3.7.2)$$

összefüggéssel, ahol φ_N az irreverzibilis alakváltozás intenzitás, az 'N' index az \vec{N} normálvektorra utal. Az irreverzibilis alakváltozás intenzitás skaláris mennyiség, mely egy csúszási rendszeren létrejövő képlékeny csúszás átlagos mértékét fejezi ki. φ_N viszonya a többi mennyiséggel a 3.8 fejezetben kerül tárgyalásra.



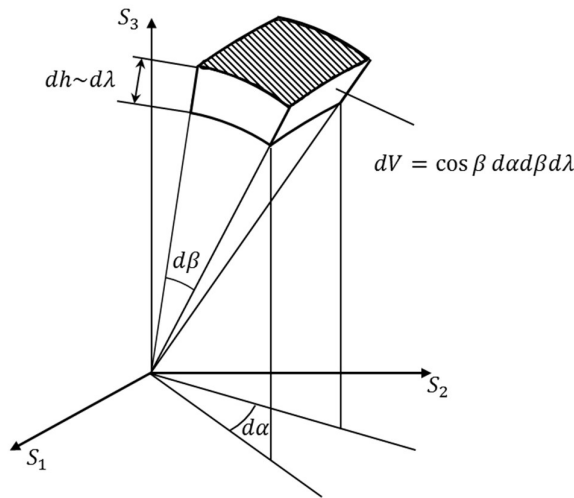
3.8. ábra Érintő sík elmozdulása a feszültségvektor csúcsában

Az irreverzibilis alakváltozás vektor (\vec{e}) a síkok elmozdulásából adódó mikro-deformációk összegeként fejezhető ki:

$$\vec{e} = \iiint_V \varphi_N \vec{N} dV, \quad (3.7.3)$$

$$e_k = \int_{\alpha} \int_{\beta} \int_{\lambda} \varphi_N m_k \cos \lambda \cos \beta d\alpha d\beta d\lambda \quad k = 1,2,3. \quad (3.7.4)$$

A dV térfogat a $\cos \beta d\alpha d\beta$ felületen (a 3.9. ábra vonalkázott felülete) elhelyezkedő síkok elemi halmazát foglalja magában, melyek távolságai a $d\lambda$ -val arányos dh értéken belül esnek. Megemlítendő, hogy a (3.7.3) egyenlet kizárólag abban az esetben alkalmazható, ha $\vec{S} \in \mathcal{S}^3$ ($S_i \neq 0, i = 1,2,3; S_4 = S_5 = 0$), tudniillik a szintézis elmélet nem alkalmas a képlékeny alakváltozás leírására abban az esetben, mikor $\vec{S} \in \mathcal{S}^5$ ($S_i \neq 0, i = 1 \dots 5$).



3.9. ábra Síkok elemi térfogata az α , β és λ szögekkel kifejezve

Fontos megjegyezni, hogy a folyási elméletek szerint az alakváltozás az ötdimenziós keményedési felülettel hozható kapcsolatba, függetlenül a feszültség deviátor vektor komponenseinek értékétől. Ebből következően, annak ellenére, hogy $\vec{S} \in \mathcal{S}^3$, a képlékeny alakváltozás alakulását bármely sík elmozdulása szimbolizálja, nem csak azoké, melyek érintői a (3.6.4) gömbnek. Ezért szükséges az \mathcal{S}^3 -beli (3.6.4) gömbön kívül eső összes sík elmozdulását vizsgálni. Másrésztől \mathcal{S}^3 -ban a keményedési felület alakulását a $\lambda = 0$ paraméterű érintő síkok határozzák meg, hiszen az a síkok belső burkoló felületeként van definiálva.

3.8 A mikroszintű irreverzibilis (maradó) alakváltozás kifejezése

Az irreverzibilis alakváltozás vektor komponenseinek (3.7.4) szerinti számításához φ_N -el való kapcsolatuk meghatározása szükséges. φ_N fejezi ki az egy csúszási rendszeren bekövetkező nem rugalmas alakváltozás mértékét.

E célból

- (i) bevezetünk egy **folyási feltételt** és definiálunk egy **keményedési szabályt**, mégpedig a H_N sík távolság újonnan bevezetett mennyiségekkel való kifejezésével, melyek a **hibaintenzitás** (ψ_N) és a **sebesség-integrál** (I_N),
- (ii) megalkotunk egy **konstitutív egyenletet**, mely összefüggést teremt az irreverzibilis alakváltozás intenzitás (φ_N), a hibaintenzitás (ψ_N) és az idő között.

(i) Nyilvánvaló, hogy a H_N távolság az anyag keményedésének mértékét fejezi ki, hiszen minél nagyobb egy sík távolsága az origótól, annál nagyobb feszültségvektor szükséges ahhoz, hogy a síkot elérve és eltolva megindítsa a képlékeny alakváltozást. A $H_N = H_N(\psi_N, I_N)$ összefüggés felírható lineáris

$$H_N = S_p + \psi_N + I_N, \quad (3.8.1a)$$

illetve kvadratikus alakban is:

$$H_N = \sqrt{S_p^2 + \psi_N + I_N^2}. \quad (3.8.1b)$$

A fenti összefüggésben S_p az irreverzibilis alakváltozás létrehozásához szükséges feszültségvektor nullához tartó terhelési sebesség esetén, amely kifejezhető az $S_p = \sqrt{2/3} \sigma_p = \sqrt{2} \tau_p$ összefüggéssel, ahol σ_p és τ_p a kúszáshatár egytengelyű húzás és tiszta nyírás esetére.

A folyási felületként használt S_p sugarú gömb – **von Mises kritérium** – egyenlete¹:

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S_p^2. \quad (3.8.2)$$

¹ A $\sqrt{2}\tau_s$ sugarú (3.6.4) gömb kizárólag képlékeny alakváltozás esetén használható.

Ez a terheletlen állapotra jellemző gömb a (3.8.1) egyenletből $\psi_N = 0$ és $I_N = 0$ behelyettesítéssel származtatható. A $H_N = S_P$ összefüggés az origótól egyenlő távolságú síkokat ad, melyek belső burkoló felülete gömb.

Az S_S (folyáshatár) és S_P (kúszáshatár) közötti különbséget a sebesség-integrál határozza meg. Ezért az anyag kezdeti szilárdságát az adott hőmérsékleten vett kúszáshatárral fejezzük ki.

A hibaintenzitás a valós anyagokban lévő kristályhibák (diszlokációk, vakanciák, interszticiós atomok, stb.) átlagos mennyiségét jellemzi. Az irreverzibilis alakváltozás során a hibák keletkezésének és szaporodásának következményeként bekövetkező keményedést ψ_N írja le a (3.8.1) egyenletben. Így az alakváltozás szempontjából folytonosnak tekintett test keményedését folytonos függvény (ψ_N) írja le. Terheletlen állapotban a hibaintenzitás zérusnak tekintett.

A kristályhibák – a nem rugalmas alakváltozás során keletkezett kristályhibák, melyek a további alakváltozást gátolják – szándékosan nincsenek konkretizálva, és hatásaik külön-külön figyelembe véve, ugyanis a hibaintenzitás (ψ_N) kizárólag azt a számos kísérlettel bizonyított tényt fejezi ki, hogy a maradó alakváltozás az említett hibák létrejöttéhez, illetve számuk növekedéséhez vezet.

Mivel $H_N = H_N(\alpha, \beta, \lambda)$, a (3.8.1) egyenletből következik, hogy ψ_N szintén függvénye α , β , és λ szögeknek. Ezért megállapítható, hogy ψ_N az egy csúszási rendszeren keletkező hibák számát jellemzi. Továbbá, mivel $I_N = I_N(\alpha, \beta, \lambda, t)$ (lásd alább a (3.8.4) egyenletet), így ψ_N időtől is függő mennyiség. Tehát írható, hogy $\psi_N = \psi_N(\alpha, \beta, \lambda, t)$.

Mivel a szintézis elmélet szerint a nem rugalmas alakváltozás modellezése a feszültségvektor végpontjával eltolt síkok elmozdulásának leírásával történik, a (3.8.1) egyenlet a következő alakban írható:

$$\psi_N = \begin{cases} H_N - I_N - S_P & \vec{S} \text{ végpontja által elért síkokra, vagyis } H_N = \vec{S} \cdot \vec{N} \\ 0 & \vec{S} \text{ végpontja által el nem ért síkokra, vagyis } H_N > \vec{S} \cdot \vec{N} \end{cases} \quad (3.8.3a)$$

vagy

$$\psi_N = \begin{cases} H_N^2 - I_N^2 - S_P^2 & \vec{S} \text{ végpontja által elért síkokra, vagyis } H_N = \vec{S} \cdot \vec{N} \\ 0 & \vec{S} \text{ végpontja által el nem ért síkokra, vagyis } H_N > \vec{S} \cdot \vec{N} \end{cases} \quad (3.8.3b)$$

A fenti összefüggés, valamint a 3.8 ábra egyértelműen mutatja, hogy a sík által megtett távolság növekedtével nő a hibák száma, következésképp az alakváltozás.

A sebesség-integrál alábbi összefüggése

$$I_N(t) = B \int_0^t \frac{d\vec{S}}{ds} \cdot \vec{N} \exp(-p(t-s)) ds, \quad (3.8.4)$$

($0 < B < 1$ és p modell állandók) a feszültség és alakváltozás szemcsén belüli eloszlása statisztikai elemzésének eredményeképp jött létre (Rusinko, A., & Rusinko, K., 2009, Rusinko, A., 2010). Az alakítási sebesség növekedésének hatására a feszültség és alakváltozás eloszlása egyre inkább egyenlőtlené válik (Kuksa et al., 1986). Tehát I_N a helyi feszültségcsúcsok átlagos értékét adja a következő gondolatmenet alapján.

A nem rugalmas alakváltozás a diszlokációk felhalmozódását, egymáson való megakadását, stb. eredményezi. Az alakváltozás során felhalmozódó energia lényegében ezekben a lokális térfogatokban tárolódik, ami a feszültség és alakváltozás egyenlőtlen eloszlását eredményezi a kristályban, ami a rács torzulásához vezet. Kuska (1986) színtémek rugalmas és képlékeny alakításából származó eredményei arra utalnak, hogy az ébredő másod- és harmadrendű mikro-feszültségek eltérnek középértéküktől, és jelentős helyi feszültségcsúcsok alakulnak ki. Megjegyzendő, hogy a kristályrács torzulása rugalmas alakváltozás során is megfigyelhető.

Az egyenlőtlen feszültség eloszlás hatására a fémes szerkezet metastabilissá válik. Amint a feltételek lehetővé teszik (például a kúszásvizsgálat során fellépő állandó feszültség), megindul a rácshibák megújulásának, relaxációjának folyamata. A megújuláshoz szükséges energiát a lokális- és az átlagfeszültség közötti különbség szolgáltatja. Más szóval a képlékeny alakváltozás során felhalmozódó energia felszabadulása okoz átmeneti alakváltozást (például primer kúszás során). A folyamat a kristályokban bekövetkező spontán elcsúszásokban nyilvánul meg. A mozgásukban akadályozott diszlokációk és maguk az akadályok termikus aktiváció hatására mozgásképesé válnak, elmozdulásukkal létrehozva az alakváltozást.

Asaro, & Rice (1977) és Peirce et al. (1983) kutatásai a következő jellemzőit tárták fel a rácstorzulások környezetében kialakuló feszültségeknek (lokális mikro-feszültség csúcsok):

- a) Azok közvetlenül függenek a diszlokáció sűrűségétől, így az anyag keményedését okozzák.
- b) Az alakítás sebességének növekedése növeli a lokális feszültségeket.
- c) Metastabilisak, megfelelő körülmények megjelenésének esetén mennyiségük idővel csökken.

Egyrészt tehát a lokális mikro-feszültségek az anyag keményedését okozzák terhelés hatására, másrészt a feszültségek leépülhetnek, ami az anyagszerkezet megújulásához vezet. A két ellentétes értelmű folyamat egyidejű lejátszódása vezet az anyagok időfüggő makro-alakváltozásához.

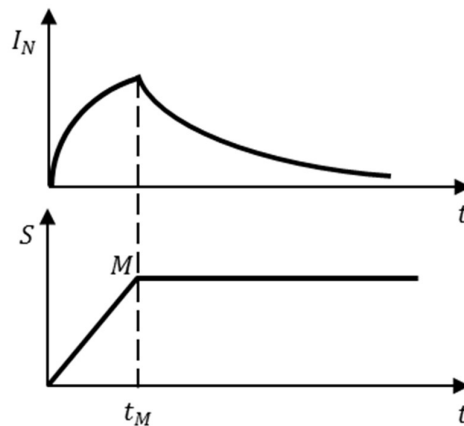
(3.8.4) integrálásával az $I_N \sim t$ függvényhez jutunk (3.10. ábra), mely az alábbi formát ölti abban az esetben, ha a terhelés jellegére igaz, hogy $t \in [0, t_M]$ esetén $\dot{\vec{S}} \geq 0$, illetve $t > t_M$ esetén $\dot{\vec{S}} = 0$:

$$I_N = \frac{B}{p} (\dot{\vec{S}} \cdot \vec{N}) [1 - \exp(-pt)], \quad t \in [0, t_M] \quad (3.8.5)$$

$$I_N = \frac{B}{p} (\dot{\vec{S}} \cdot \vec{N}) [\exp(pt_M) - 1] \exp(-pt), \quad t \geq t_M \quad (3.8.6)$$

A fenti összefüggésekből kitűnik, hogy a sebesség-integrál a lokális feszültségcsúcsokhoz hasonlóan viselkedik, mégpedig:

- I_N értéke növekszik gyors (aktív) terhelés hatására, jelképezve az anyag keményedését (a mozgásképtelen diszlokációk száma monoton nő, a folyamat intenzitása az alakítás sebességével arányos).
- I_N értéke csökken állandó feszültség esetén (a kialakuló körülmények elősegítik a diszlokációk leszakadását az akadályokról, azok újra mozgásképesé válnak, bekövetkezik az anyagszerkezet megújulása). A $t > t_M$ tartományban megfigyelhető $I_N \rightarrow 0$ feltétel esetén $H_N(t) = \text{áll}$ a (3.8.3) egyenletekben. Ez esetben a keményedés és megújulás egyensúlyban van, ami tipikus jellemzője az állandósult kúszásnak, így $I_N \rightarrow 0$ a primer és szekunder kúszás közötti átmenetként értelmezhető.



3.10. ábra I_N alakulása az idő függvényében (S a feszültségvektor hosszát mutatja)

Összefoglalva, az anyag keményedése, a (3.8.1) egyenletbeli H_N síktávolság két mennyiség, a hibaintenzitás (ψ_N) és a sebesség-integrál (I_N) függvénye.

Az anyag mikroszintű alakváltozás sebességének leírásához az alakváltozás intenzitás (φ_N) hibaintenzitástól (ψ_N) és időtől való függésének meghatározása szükséges.

(ii) Jelölje $d\psi_N$ és $d\varphi_N$ ψ_N és φ_N dt idő alatti növekményét egy meghatározott síkon, vagyis $d\alpha = d\beta = d\lambda = 0$. Hasonlóan a csúszási elmélethez, az alakváltozás intenzitás a következő egyenlettel fejezhető ki a hibaintenzitás és idő függvényeként:

$$d\psi_N = r d\varphi_N - K\psi_N dt. \quad (3.8.7)$$

(3.8.7) szerint a hibák fejlődése két egyidejű folyamat eredménye:

- a) ψ_N nő az irreverzibilis alakváltozás növekedésével ($d\varphi_N > 0$), és
- b) ψ_N csökken az idő függvényében az alakváltozás során a ($-K\psi_N dt$) kifejezés szerint, amely a hibák megújulását (relaxációt) modellezi.

(3.8.7)-ben r anyagtól függő állandó, K a csúsztatófeszültség-intenzitás (τ_0) és a homológ hőmérséklet (Θ) függvénye (lásd később a (3.9.3) egyenletben).

A 3.1 és 3.2 táblázat foglalja össze a szintézis elmélet mennyiségeinek mértékegységeit és összefüggéseit.

3.1 táblázat A szintézis elmélet mennyiségeinek mértékegységei

Mennyiség	Mértékegység	Mennyiség	Mértékegység
H_N	MPa	r	MPa ² , (3.8.3b)
ψ_N	MPa, (3.8.3a)	K	s ⁻¹
ψ_N	MPa ² , (3.8.3b)	p	s ⁻¹
φ_N	1	B	1
r	MPa, (3.8.3a)		

3.2 táblázat A szintézis elmélet összefüggései

$S_1 = \sqrt{3/2} S_{xx}, S_2 = S_{xx}/\sqrt{2} + \sqrt{2} S_{yy}, S_3 = \sqrt{2} S_{xz}, S_4 = \sqrt{2} S_{xy}, S_5 = \sqrt{2} S_{yz}.$	(3.2.1)
$H_N = \vec{S} \cdot \vec{N}$	(3.7.1)
$I_N(t) = B \int_0^t \frac{d\vec{S}}{ds} \cdot \vec{N} \exp(-p(t-s)) ds$	(3.8.4)
$\psi_N = H_N - I_N - S_P$ vagy $\psi_N = H_N^2 - I_N^2 - S_P^2$	(3.8.3)
$d\psi_N = r d\varphi_N - K \psi_N dt$	(3.8.7)
$\vec{e} = \iiint_V \varphi_N \vec{N} dV$	(3.7.3)
$e_1 = \sqrt{3/2} e_{xx}, e_2 = e_{xx}/\sqrt{2} + \sqrt{2} e_{yy}, e_3 = \sqrt{2} e_{xz}, e_4 = \sqrt{2} e_{xy}, e_5 = \sqrt{2} e_{yz}.$	(3.2.2)

3.9 Speciális esetek

Vizsgáljuk meg a (3.8.7) összefüggés speciális eseteit.

I. Az állandósult állapotú (szekunder) kúszás során a keményedés és megújulás egyensúlyban van egymással. Ebből következően a kúszás ezen szakaszában $\psi_N(t)$ változatlan marad. Csakugyan, mivel ez esetben $\vec{S}(t) = \text{áll}$ és $I_N \rightarrow 0$, a (3.7.1) és (3.8.1) összefüggésekből $H_N(t) = \text{áll}$ és $\psi_N(t) = \text{áll}$ adódik. Következésképp $d\psi_N = 0$ és a (3.8.7) egyenlet a

$$r\dot{\varphi}_N = K\psi_N = \text{const}, \quad (3.9.1)$$

vagy

$$r\varphi_N = r\varphi_N^0 + K\psi_N t, \quad (3.9.2)$$

alakot veszi fel, ahol φ_N^0 az állandósult kúszás előtt felhalmozódott irreverzibilis alakváltozás intenzitása. Az így meghatározott φ_N alakváltozás intenzitása az időnek lineáris függvénye, és a kúszás stacionárius szakaszát jellemzi ((3.7.3) egyenlet). A (3.9.1) összefüggésből megállapítható, hogy a K függvény határozza meg az állandósult kúszás sebességét, ami rendkívül kis érték. Ebből következik,

hogy a (3.9.2) egyenlet $K\psi_N t$ tagja csak hosszú idejű terhelés és magas hőmérséklet esetén gyakorol φ_N értékére jelentős hatást. A K függvény a következőképp fejezhető ki (Rusinko, A., Rusinko, K. 2011):

$$K = K_1(T)K_2(\tau_0), \quad K_1 = \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right), \quad (3.9.3)$$

$$K_2 = \frac{9cr}{\pi^2} \tau_0^{k-1} \text{ (3.8.3a) esetre, és } K_2 = \frac{9\sqrt{3}cr}{2\sqrt{2}\pi} \tau_0^{k-2} \text{ (3.8.3b) esetre, } c \text{ és } k = \text{áll,}$$

ahol Q a kúszás aktiválási energiája, T a hőmérséklet, k értéke határozza meg a $\log \dot{\epsilon} \sim \log \sigma$ egyenes meredekségét.

II. (3.8.7) egyenlet integrálásával kapjuk, hogy

$$r\varphi_N = \psi_N + K \int_0^t \psi_N dt. \quad (3.9.4)$$

Ez a szintézis elmélet konstitutív egyenletének legáltalánosabb formája, mellyel az alakváltozás bármely formája – az azonnali képlékeny alakváltozástól a primer és szekunder kúszásig – kifejezhető. Az alakváltozás időtől való függését a (3.9.4) egyenlet jobb oldalának második tagja, valamint a ψ_N kifejezésében szereplő I_N sebesség-integrál biztosítja.

K kis értékeiből fakadóan a (3.9.4) egyenlet jobb oldala második tagjának csak hosszú terhelési idő vagy magas homológ hőmérséklet esetén lesz észrevehető hatása. Így ez a tag az időtől nem függő képlékeny alakváltozások számításakor elhagyható:

$$r\varphi_N = \psi_N. \quad (3.9.5)$$

A fenti egyenletből látható, hogy a hibák számának növekedése csak azokban a csúszási rendszerekben figyelhető meg, amelyekben irreverzibilis alakváltozás jön létre. Ez teljes összhangban van a kísérleti eredményekkel. Egy szemcse azon csúszósíkjaiban, melyek feszültséghez képesti orientációja olyan, hogy nem indul meg a csúszás – a maradó alakváltozás –, szerkezeti változás nem figyelhető meg. A (3.9.5) összefüggésben szereplő r állandó az anyag nem rugalmas alakváltozás közbeni keményedését jellemzi.

Ugyanakkor Rusinko (2015) megmutatta, hogy az alacsony olvadáspontú anyagok képlékeny alakváltozásának – például ón szobahőmérsékleten – modellezéséhez a (3.9.4) egyenlet jobb oldalának mindkét tagját figyelembe kell venni.

III. A terhelés teljes vagy részleges megszűnése után, amikor az irreverzibilis alakváltozás növekedése megszűnik, tehát $d\varphi_N = 0$, a (3.8.7) egyenlet a következő alakot ölti:

$$d\psi_N = -K\psi_N dt. \quad (3.9.6)$$

Ez az összefüggés a rácshibák relaxációját írja le, mint például az ellentétes előjelű diszlokációk megsemmisülése, a szemcsehatárok összeomlása, a diszlokációk mozgását gátló akadályok hatásosságának csökkenése, stb.

Kijelenthető tehát, hogy a (3.8.7) konstitutív egyenlet a mikroszinten képes leírni

- a) a képlékeny alakváltozást,
- b) a primer és szekunder kúszást, valamint
- c) a hibák relaxációját terhelés mentes állapotban.

Ismét szükséges kihangsúlyozni, hogy az elmélet az alakváltozást egységesen kezeli, nem tesz különbséget az azonnali és időfüggő alakváltozások között. Egyetlen fogalom, az irreverzibilis alakváltozás használatos, melynek alakulása a pillanatnyi terhelési állapot függvénye, és az anyag szerkezetének mikroszintjén lezajló folyamatok irányítják.

Az irreverzibilis alakváltozás leírásának eddigiekben ismertetett megközelítése teszi a szintézis elméletet a különböző nem klasszikus problémák modellezésének hatékony eszközévé. Számos érdekes jelenség modellezése történt meg segítségével, mint például a Haazen-Kelly hatás, a fázis átalakulás, a Feigin jelenség, negatív kúszás (Rusinko, A., 2011,2014-2016).

4. A szintézis elmélet kiterjesztése: szekunder kúszás, primer kúszás és képlékeny alakváltozás egyenáram jelenlétében

4.1 Szekunder kúszás leírása egyenáram jelenlétében

Terjesszük ki az alakváltozás-intenzitás sebességét kifejező egyenleteket egyenáram jelenlétének esetére, ami az alábbi kutatási eredményeken alapszik (ld.: 2. fejezet)

- (i) Az egyenáram okozta Joule-hevítés a hőmérséklet helyi növekedéséhez, és így időfüggő képlékeny alakváltozáshoz vezet.
- (ii) A mozgó elektronok és a fémrács atomjai közötti impulzus átadás csökkenti az atomok elmozdulásához szükséges energiát, és növeli az atomok diffúziójának sebességét.
- (iii) Az áram mező elősegíti a diszlokációs csúszás sebességének és a diffúziós kúszás intenzitásának növekedését.

Az áram intenzitását (áramsűrűséget) kifejező új tagot vezettem be: J (kA/cm²) [1,3]:

I. Az átfolyó áram hőmérsékletre gyakorolt hatásának (Joule hevítés) leírására az (3.9.3) egyenletet az alábbi módon egészítettem ki:

$$K_1(T) = \exp[-Q/R(T + 5.23J^2)], \quad (4.1.1)$$

ahol az $5,23J^2$ tagot Zhao et al. (2014) határozta meg.

II. A hibaintenzitást (ψ_N) definiáló összefüggésbe (3.8.3b) új funkciót (C) vezettem be:

$$\psi_N = H_N^2(1 + C^2) - \sigma_p^2 = (\vec{S} \cdot \vec{N})^2(1 + C^2) - \sigma_p^2. \quad (4.1.2)$$

A (3.9.1) egyenlet figyelembevételével az alakváltozás-intenzitás sebessége a következő:

$$\dot{\varphi}_N = \frac{K}{r} \left[(\vec{S} \cdot \vec{N})^2 (1 + C^2) - \sigma_p^2 \right]. \quad (4.1.3)$$

A fenti képlet egy csúszási rendszeren belüli elcsúszás egyenáram hatására bekövetkező fokozódását fejezi ki. A C funkciót két függvény szorzataként határoztam meg:

$$C = U(J) \cdot W(T). \quad (4.1.4)$$

Mind $U(J)$, mind $W(T)$ a változók hatványának függvényében definiáltam:

$$U = u_1 J^{u_2}, \quad (4.1.5)$$

$$W = (w_1 T - w_2)^{w_3} + w_4, \quad (4.1.6)$$

ahol u_k és w_l modell állandók, amelyeket úgy kell megválasztani, hogy a legjobb illeszkedést adják a kísérleti eredményekre.

Zhao et al. (2014) eredményeire támaszkodva $-\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0 + J^2 -$, az egyenáram hatását C^2 formában vezettem be. Ez azt jelenti, hogy a makroszintű fenomenologikus megközelítést mikroszinten alkalmazom. A C további pontosításához további kísérleti eredmények szükségesek, melyek feltárják az áram hatásának a mikroszintű folyamatokra.

A C függvény felbontásával $U(J) \cdot W(T)$ alakjában a kúszássebességet meghatározó K funkciót (3.9.3) követtem. Az egyenáram hatása két komponensre bomlik: (i) az elektronszél és a kristályrács közötti kölcsönhatás $U(J)$, és (ii) a hőmérséklettől függő hatás $W(T)$. A hőmérséklet növekedésének figyelembe vétele (4.1.1) egyedül nem vezet jó egyezéshez a kísérleti és analitikai eredmények között.

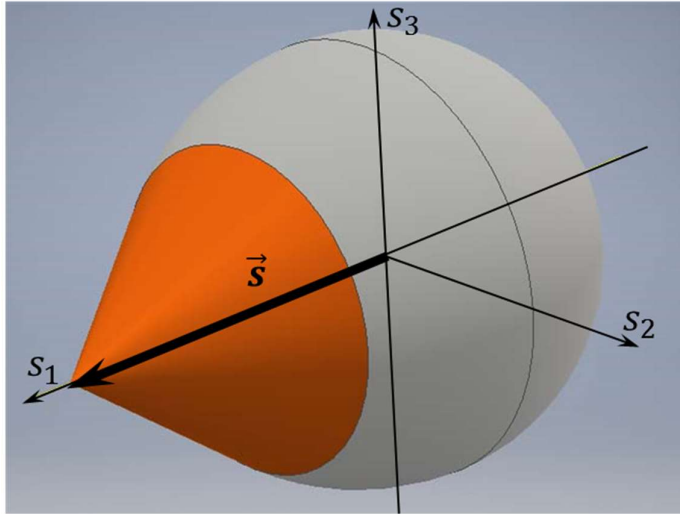
A $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(J, \sigma)|_T$ és $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(J, T)|_\sigma$ összefüggések hosszas elemzésének eredményeképpen születtek a (4.1.4) - (4.1.6) képletek, amelyek jól illeszkednek a kísérleti adatokra.

Tekintsük meg a szekunder kúszás sebességét egytengelyű húzás esetében, amelynél a feszültségvektor az alábbi komponensekkel bír:

$$\vec{S} = (S_1 = \sqrt{2/3} \sigma, 0, 0), \quad (4.1.7)$$

ahol σ a húzófeszültség.

Egytengelyű húzás esetén a keményedési felület a 4.1. ábrán látható módon alakul.



4.1. ábra Keményedési felület egytengelyű húzás esetén

A (4.1.2) képletben álló síktávolság $H_N - H_N = \vec{S} \cdot \vec{N}$ (3.7.1) – egytengelyű húzás esetén a (3.5.2) képlettel együtt a következő alakot ölti:

$$H_N = S_1 N_1 = \sqrt{2/3} \sigma \cos \alpha \cos \beta \cos \lambda. \quad (4.1.8)$$

A (4.1.3) egyenletből következik, hogy az átfolyó áram hatására az első kúszási alakváltozást okozó σ_c feszültség kisebb, mint a kúszáshatár σ_p . σ_c értékét a (4.1.2) és (4.1.8) egyenletekből kapjuk, azokkal a feltételekkel, hogy: $\psi_N = 0$, $\alpha, \beta, \lambda = 0$:

$$\sigma_c = \frac{\sigma_p}{\sqrt{(1 + C^2)}}. \quad (4.1.9)$$

Az $\alpha, \beta, \lambda = 0$ feltétel arra a síkra utal, amely merőleges az S_1 tengelyre.

A (4.1.3) egyenlet figyelembevételével a makroszintű alakváltozást definiáló (3.7.4) egyenlet az alábbi alakot veszi fel:

$$\dot{e}_1^C = \frac{2K}{3r} \int_{-\alpha_{1C}}^{\alpha_{1C}} \int_{-\beta_{1C}}^{\beta_{1C}} \int_0^{\lambda_{1C}} [(\sigma \cos \alpha \cos \beta \cos \lambda)^2 (1 + C^2) - \sigma_p^2] \cos \alpha \cos^2 \beta \cos \lambda \, d\alpha \, d\beta \, d\lambda, \quad (4.1.10)$$

ahol

$$\cos \lambda_{1C} = \frac{\sigma_P}{\sigma \sqrt{(1 + C^2)} \cos \alpha \cos \beta},$$

$$\cos \alpha_{1C} = \frac{\sigma_P}{\sigma \sqrt{(1 + C^2)} \cos \beta}, \quad (4.1.11)$$

$$\cos \beta_{1C} = \frac{\sigma_P}{\sigma \sqrt{(1 + C^2)}} < \cos \beta_1 \Rightarrow \beta_1 < \beta_{1C}.$$

Ahogy a (4.1.10) képletből látszik, az ϵ_1^C meghatározása háromszoros integrálást igényel, ami nagyon körülményes levezetéseket jelent. Az integrálási változók száma kettőre csökkenthető, ha a kúszássebesség tiszta nyíró feszültségállapotban kerül meghatározásra. Ilyushin féle izotropia posztulátumnak (Ilyushin, 1963) megfelelően a tiszta nyírással kapott eredmények (a terhelési pálya egyenes) átvehetők egytengelyű húzás esetére (a terhelési pálya szintén egyenes).

Tiszta nyírás esetében, a hibaintenzitás az alábbi alakot ölti (3.8.3b képlet):

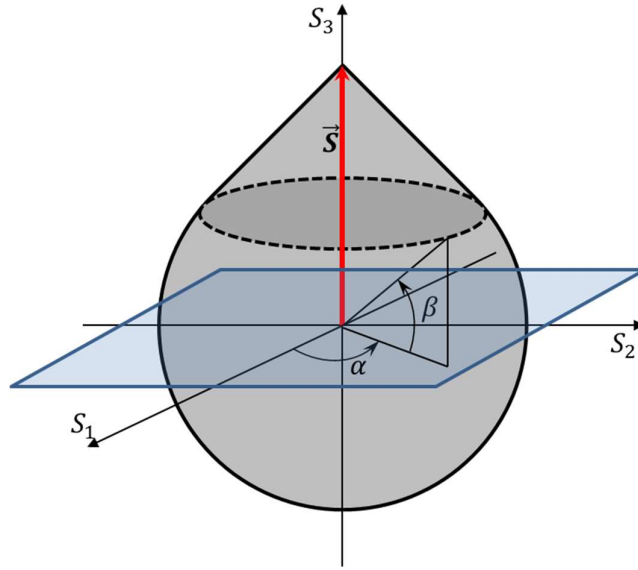
$$\psi_N = (S_3 N_3)^2 (1 + C^2) - 2\tau_P^2 = 2[(\tau \sin \beta \cos \lambda)^2 (1 + C^2) - \tau_P^2], \quad (4.1.12)$$

ahol τ a csúsztató feszültség. Latható, hogy ψ_N nem függ az α szögtől, ami integrálási egyszerűsítést jelent. A tiszta nyírásnak megfelelő keményedési felületet a 4.2. ábra szemlélteti. Könnyen látható, hogy a tiszta nyírási keményedési felület elforgatásával az egytengelyű húzásnak megfelelő keményedési felületet kapjuk meg.

A (4.1.12) képletben a hibaintenzitás nem zérus értéket vesz fel a következő szögtartományokon belül

$$0 \leq \alpha \leq 2\pi, \quad \beta_1 \leq \beta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \lambda \leq \lambda_1,$$

$$\sin \beta_1 = \frac{\tau_P}{\tau \sqrt{(1 + C^2)}} \equiv a, \quad \cos \lambda_1(\beta) = \frac{\tau_P}{\tau \sqrt{(1 + C^2)} \sin \beta} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta}. \quad (4.1.13)$$



4.2. ábra Tiszta nyírásnak megfelelő keményedési felület

A (3.7.4), (4.1.12) és (4.1.13) alapján a szekunder kúszássebesség-vektor komponense, $\dot{\epsilon}_3$ ($\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_2 = 0$) határozható meg:

$$\begin{aligned}
 \dot{\epsilon}_3^C &= \int_{\alpha} \int_{\beta} \int_{\lambda} \dot{\phi}_N N_3 dV = \frac{4\pi K}{r} \int_{\beta_1}^{\pi/2} \int_0^{\lambda_1} [(\tau \sin \beta \cos \lambda)^2 (1 + C^2) - \tau_P^2] \sin \beta \cos \lambda \cos \beta d\lambda d\beta \\
 &= \frac{4\pi K \tau_P^2}{r} \int_{\beta_1}^{\pi/2} \int_0^{\lambda_1} \left[\frac{1}{\sin^2 \beta_1} (\sin \beta \cos \lambda)^2 - 1 \right] \sin \beta \cos \lambda \cos \beta d\lambda d\beta \\
 &= \frac{4\pi K \tau_P^2}{r} \int_{\beta_1}^{\pi/2} \sin \beta \cos \beta \int_0^{\lambda_1} \left[\frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \beta_1} (1 - \sin^2 \lambda) - 1 \right] d(\sin \lambda) d\beta \\
 &= \frac{4\pi K \tau_P^2}{r} \int_{\beta_1}^{\pi/2} \sin \beta \cos \beta \left(\frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \beta_1} \sin \lambda_1 - \frac{1}{3} \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \beta_1} \sin^3 \lambda_1 - \sin \lambda_1 \right) d\beta \\
 &= \frac{4\pi K \tau_P^2}{r} \int_{\beta_1}^{\pi/2} \sin \beta \cos \beta \left(\frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \beta_1} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \beta_1}{\sin^2 \beta}} - \frac{1}{3} \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \beta_1} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \beta_1}{\sin^2 \beta}}^3 \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \beta_1}{\sin^2 \beta}} \right) d\beta \\
 &= \frac{4\pi K \tau_P^2}{r} \int_{\beta_1}^{\pi/2} \left(\frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \beta_1} \sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \beta_1} - \frac{1}{3 \sin^2 \beta_1} \sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \beta_1}^3 \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \beta_1} \right) d(\sin \beta).
 \end{aligned}$$

Új változó bevezetésével:

$$x \equiv \sin \beta. \quad (4.1.14)$$

Most

$$\begin{aligned} \dot{e}_3^C &= \frac{4\pi K \tau_P^2}{r} \int_a^1 \left(\frac{x^2}{a^2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{3a^2} \sqrt{x^2 - a^2}^3 - \sqrt{x^2 - a^2} \right) dx \\ &= \frac{4\pi K \tau_P^2}{r} \left\{ \frac{1}{a^2} \left[\frac{x}{4} \sqrt{x^2 - a^2}^3 + \frac{a^2 x}{8} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{12a^2} \left[x \sqrt{x^2 - a^2}^3 - \frac{3a^2 x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{3a^4}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left[x \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \right] \right\} \Big|_a^1 = \\ &= \frac{\pi K \tau_P^2}{3r} \left[\frac{1}{a^2} \left(2\sqrt{1 - a^2} - 5a^2 \sqrt{1 - a^2} + 3a^4 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{a} \right) \right]. \end{aligned}$$

Az izotrópia posztulátum alapján és a $\tau_P = \sigma_P / \sqrt{3}$ figyelembevételével kaptam az egytengelyű húzásra szóló képletet. Tehát az egytengelyű húzás szekunder kúszássebesség vektor komponense (\dot{e}_1^C) áram jelenlétében az alábbi formában fejezhető ki:

$$\dot{e}_1^C = a_0 F(b_C), \quad (4.1.15)$$

ahol

$$a_0 = \frac{\pi K \sigma_P^2}{9r}, \quad (4.1.16)$$

$$b_C = \cos \beta_{1C} = \frac{\sigma_P}{\sigma \sqrt{(1 + C^2)}}, \quad (4.1.17)$$

$$F(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2} \left(2\sqrt{1 - \zeta^2} - 5\zeta^2 \sqrt{1 - \zeta^2} + 3\zeta^4 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right). \quad (4.1.18)$$

Látható, hogy az átfolyó áram jelenléte a következőket eredményezi.

- (i) A (4.1.10) integranduszból látható, hogy minden csúszási rendszeren a csúszás mértéke fokozódik.
- (ii) A (4.1.11) szerint nő az integrálási tartomány, ami az aktív csúszási rendszerek számának növekedésére utal.

Az, hogy a $\cos \beta_{1C}$ kifejezésben (4.1.11) C a σ -t szorzó tagként szerepel, a különböző áramsűrűségeknek megfelelő $\log \dot{\epsilon} \sim \log \sigma$ egyenesek párhuzamos eltolását eredményezi, ami megfelel a kísérleti eredményeknek: a $\log \dot{\epsilon} \sim \log \sigma$ egyenesek meredeksége csekély mértékben változik az átfolyó áram hatására (Zhao et al., 2014).

A szintézis elmélet numerikus validálásához vizsgáljuk meg az ón (olvadási hőmérséklet: 505.08 K) kúszását áram jelenlétében. Az ón lágy, ezüstös színű fém. Az ón nehezen oxidálódik és jó korrózióálló, mivel felületén stabil oxidréteg keletkezik. Az ón csapvízzel és tengervízzel szembeni korróziós ellenállás jó, ellenben erős savaknak, alkáli elemeknek és savas hatású sóknak nem áll ellen. Az ón széleskörűen használt az élelmiszerek tartósításában a tárolóedények bevonataként. Az ón ötvözetek elterjedten használatosak az elektromos áramkörök forrasanyagaként. A nióbium-ón ötvözetből szupravezető mágnes készül, az ón-oxid kerámiákban és gáz szenzorokban használatos.

Hasonlítsuk össze a kísérleti és analitikai eredményeket a következő diagramokon (4.3. - 4.4. ábrák):

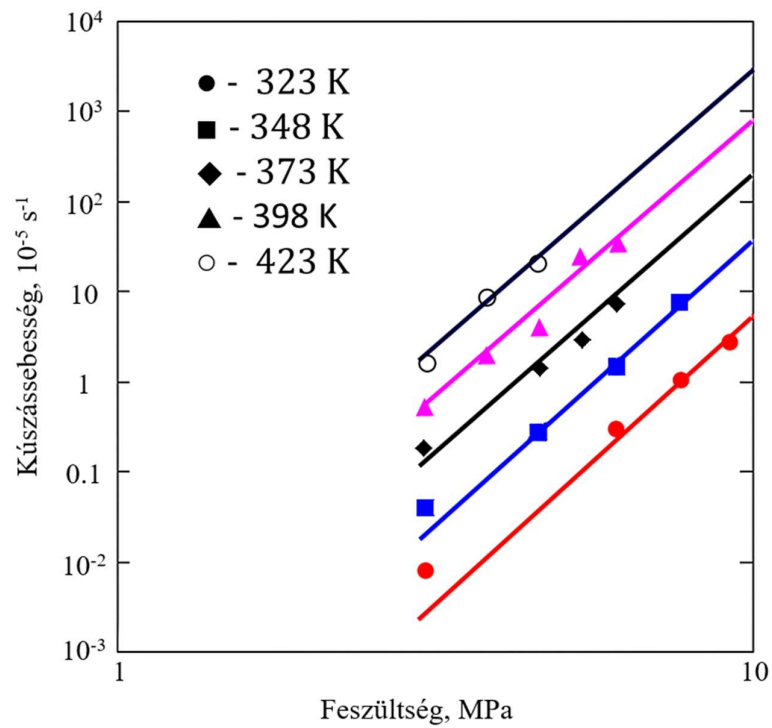
- (i) $\dot{\epsilon} \sim \sigma$ különböző hőmérsékleteken, átfolyó áram nélkül;
- (ii) $\dot{\epsilon} \sim T$ egy adott állandó feszültségen ($J = 0$);
- (iii) $\dot{\epsilon} \sim \sigma$ egy adott állandó hőmérsékleten, különböző áramsűrűség mellett;
- (iv) $\dot{\epsilon} \sim J^2$ egy adott állandó feszültségen, különböző hőmérsékleten.

Az áram hatás nélküli $\dot{\epsilon} \sim \sigma$ és $\dot{\epsilon} \sim T$ diagramok megszerkesztéséhez a c és k állandók megválasztása szükséges. A 4.3. és 4.4. ábra a (4.1.11) és (4.1.15) képletek alapján (ahol $C = 0$) kapott $\dot{\epsilon} \sim \sigma$ és $\dot{\epsilon} \sim T$ görbéket szemlélteti $k = 6$ és $c = 26$ állandókkal (az aktiválási energia $Q = 7.0 \times 10^4$ J/mol, Zhao et al. (2014)). A 4.4 ábrán látható eredmények a 4.6. ábra $J = 0$ szintről származnak.

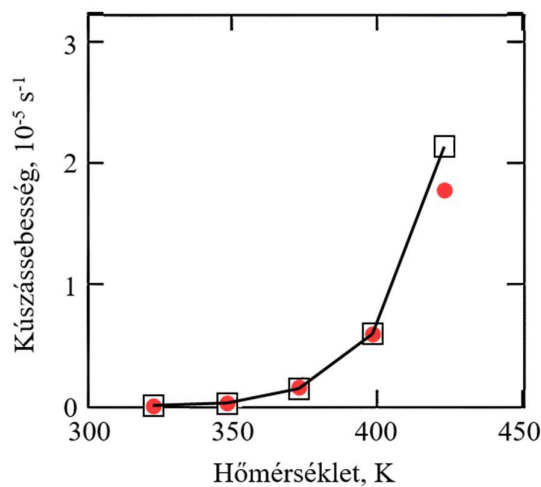
4.1. táblázat Ón kúszáshatára különböző hőmérsékleteken

	Hőmérséklet T , K	Kúszáshatár σ_p , MPa
1	323	0.887
2	348	0.674
3	373	0.445
4	398	0.307
5	423	0.239

Kúszási határon (σ_p) azt a feszültséget értjük adott hőmérsékleten, amely $10^{-8}h^{-1}$ értékű alakváltozás sebességet eredményez. Eszerint σ_p értékét a $\dot{\epsilon} \sim \sigma$ egyenesekből (4.3. ábra) úgy olvastam le, hogy azokat meghosszabbítottam a megadott sebesség értékéig, és ott leolvastam a kúszáshatár értékét. Az így meghatározott kúszáshatárokat a 4.1. táblázat tartalmazza.



4.3. ábra Az ón $\log \dot{\epsilon} \sim \log \sigma$ diagramjai ($J = 0$) (pontok – kísérlet, vonalak – modell) (Zhao et al., 2014)



4.4. ábra Az ón $\dot{\epsilon} \sim T$ diagramja ($J = 0$) (pontok – kísérlet, vonalak – modell) (Zhao et al., 2014)

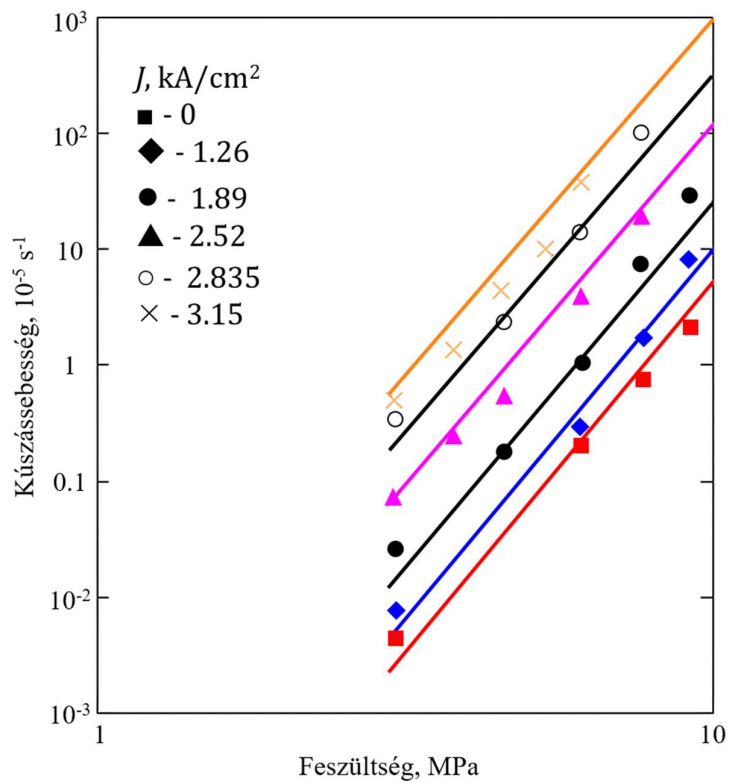
A következő lépés az $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(J, \sigma)|_T$ és $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(J, T)|_\sigma$ diagramok megalkotása különböző áramsűrűségek mellett a (4.1.1), (4.1.11) és (4.1.15) egyenletek alapján (4.5. és 4.6. ábra). Ezek a diagramok a 4.2. táblázatban szereplő modell állandókból származnak (természetesen c és k értékei megegyeznek az előzőekkel). Zhao et al. (2014) a $\dot{\varepsilon} \sim J$ viszony leírásához a $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0 + J^2$ közelítést alkalmazza. A 4.6. ábrán látható, hogy a szintézis elmélet alapján nagy görbületi sugarú görbék keletkeznek, ami jól közelíti az előző megállapítást.

4.2. táblázat Modell állandók

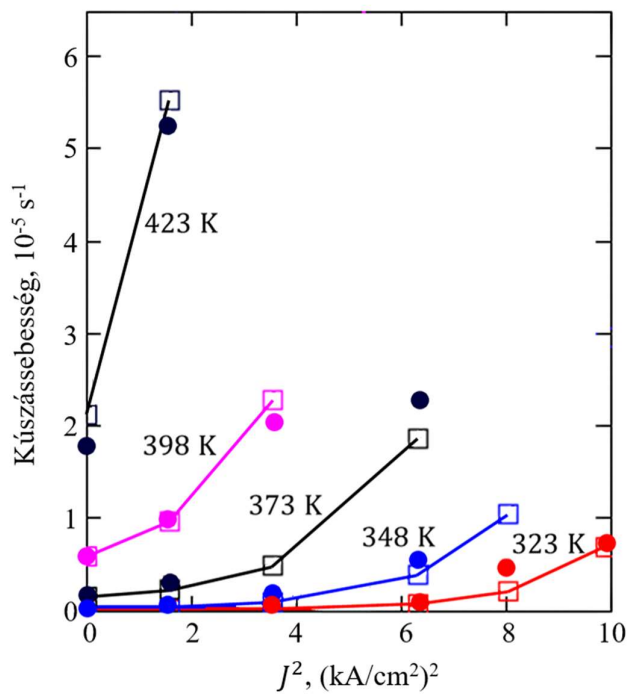
Modell állandó	Érték	Modell állandó	Érték
c	26	w_1, K^{-1}	0,012
k	6	w_2	4,102
$u_1, (cm^2/kA)^{u_2}$	0,5	w_3	6,0
u_2	3,0	w_4	0,12

A 4.5. ábra $\log \dot{\varepsilon} \sim \log \sigma$ egyeneseinek meredekségei közötti eltérés legfeljebb 3.57%, ami jól egyezik a kísérleti eredményekkel.

Továbbá látható a 4.3. - 4.6. ábrákból, hogy mind a négy esetben az analitikai eredmények jól közelítik a kísérlettel meghatározottakat. Ki kell hangsúlyozni, hogy az összes ábrában látható analitikus görbék megszerkesztéséhez használt állandók minden esetben ugyan azok voltak (k, c, u_k, w_l).



4.5. ábra Az ón $\log \dot{\epsilon} \sim \log \sigma$ diagramjai (egyenáram jelenlétében) (pontok – kísérlet, vonalak – modell) (Zhao et al., 2014)



4.6. ábra Az ón $\dot{\epsilon} \sim J^2$ diagramja (pontok – kísérlet, vonalak – modell) (Zhao et al., 2014)

Következtetés (1. tézis)

Kidolgoztam egy modellt a szintézis elmélet keretében, amely alkalmas a szekunder kúszás leírására átfolyó egyenáram jelenlétében [1,3].

A forrasanyagok kúszásával foglalkozó kutatások rámutattak, hogy az átfolyó egyenáram jelentős hatást gyakorol a kúszási viselkedésre. A szintézis elméletet, annak kiterjesztésével, sikerült olyan alakra hoznom, amellyel alkalmassá vált az egyenáram hatásának leírására. Ennek eléréséhez a szintézis elmélet konstitutív egyenleteibe bevezettem egy, az egyenáram hatását tükröző tagot. Igazoltam, hogy az új modell segítségével meghatározható

- (i) a szekunder kúszássebesség a feszültség függvényében, különböző áramsűrűség mellett,
- (ii) a szekunder kúszássebességet az áramsűrűség függvényében, különböző hőmérsékleten.

4.2 Primer kúszás és képlékeny alakváltozás leírása egyenáram jelenlétében

4.2.1 Primer kúszás leírása egyenáram jelenlétében

Az egyenáram kúszásra gyakorolt hatásának magyarázatához ismerni szükséges az anyag szerkezetében a primer kúszás során lezajló folyamatokat. Emelt hőmérsékleten terhelve a darabok mérete maradón változik a kúszási alakváltozásnak köszönhetően. Az alacsony hőmérsékleten bekövetkező alakváltozással szemben a kúszási alakváltozás időtől függő folyamat. A terhelés kezdeti szakaszában, az aktív terhelés során, azonnali rugalmas, néhány esetben képlékeny alakváltozás következik be. Ezt követően, az idő múlásával, állandó terhelés mellett is nő az alakváltozás mértéke.

Az aktív terhelés során, amikor mind rugalmas, mind képlékeny alakváltozás létrejön, az alakváltozás és feszültség eloszlása az anyag mikroszerkezetében inhomogén. Jelentős mértékű helyi feszültségcsúcsok jelennek meg, ami a kiinduló kristályos szerkezetben lévő hibákkal magyarázható (diszlokációk, szennyező atomok, szemcsehatárok, fázishatárok, rétegződési hibák, stb.). Ezek a hibák – az alakváltozási energia jórészt ezekben a térfogatokban tárolódik – fokozzák az alakváltozással szembeni ellenállást, az anyag keményedéséhez vezetnek (Kuksa et al., 1986, Callister, & Rethwisch, 2007, Hasija et al., 2003, Piazolet al., 2015, Dudko et al., 2017). Emelt hőmérsékleten a keményedés mértéke erősen függ az alakítás sebességétől, nagyobb alakítási sebesség esetén nagyobb mértékű keményedés figyelhető meg.

Az aktív terhelés során a kristályszerkezet reverzibilis (rugalmas) és irreverzibilis torzulást szenved. Míg az irreverzibilis torzulások csak hevítéssel szüntethetők meg, a rugalmas torzulások mértéke csökkenhet bizonyos körülmények esetén (relaxáció). Ilyen helyzet áll elő az aktív terhelés megszűnésével – tehát állandó feszültségen – emelt hőmérsékleten, ami az anyag kúszását okozó körülményeknek felel meg. Megújulás (relaxáció) során az időtől függő diszlokáció mozgások eredményeképp a tárolt alakváltozási energia egy része felszabadul. Az ehhez szükséges hajtóerő az átlagfeszültség és a helyi feszültségcsúcsok közötti különbségből ered. A diszlokációk nem konvencionális mozgással képesek az akadályokon túljutni. Ez a folyamat a diszlokációk mászása, mely emelt hőmérsékleten az atomok és vakanciák diffúziójának segítségével valósul meg. Továbbá, emelt hőmérsékleten, a diszlokációk kedvezőbb energiával rendelkező struktúrába rendeződnek (poligonizáció), illetve megsemmisülnek. Az említett jelenségek során felszabaduló, az aktív terhelés

közben az anyagban eltárolt energia, az emelt hőmérséklettel együtt adja a primer kúszás során zajló átmeneti folyamatok hajtóerejét. Másrészt, kúszás során az idő előrehaladtával egyre növekvő mennyiségben keletkeznek új diszlokációk, egyre nagyobb akadályt képezve elmozdulásukkal szemben, a kúszássebesség csökkenését eredményezve. A kétféle – keményedést, illetve lágyulást okozó – folyamat viszonya szabja meg a kúszási alakváltozás jellegét. Ez adja a primer kúszás átmeneti, „kimerülő” (exhaustion) jellegét (Poirier, 1977), ami a kúszássebesség időbeni csökkenésében mutatkozik meg. A kúszás szekunder szakaszában a keletkező és megsemmisülő diszlokációk száma megegyezik – tehát a keményedést, illetve lágyulást okozó jelenségek dinamikus egyensúlya áll fenn –, így a kúszássebesség állandó értékű lesz.

Az átfolyó áram felgyorsítja és felerősíti a kúszás jellegét meghatározó, fent említett folyamatokat. Ezért tapasztalható

- (i) a primer kúszás növekedése, és
- (ii) időtartamának csökkenése.

Az átfolyó áram által a primer kúszásra kifejtett hatás modellezéséhez az alábbi módosításokat vezettem be [2]:

$$\psi_N = (\vec{S} \cdot \vec{N})^2 (1 + C^2) - (I_N^C)^2 - S_P^2, \quad (4.2.1)$$

$$I_N^C = B_C \int_0^t \frac{d\vec{S}}{ds} \cdot \vec{N} \exp(-p_C(t-s)) ds, \quad (4.2.2)$$

$$C = C_1 J^{C_2}, \quad B_C = B + B_1 J^{B_2}, \quad p_C = p + p_1 J^{p_2}, \quad (4.2.3)$$

ahol J (kA/cm²) az áramsűrűség. A C tag az átfolyó áram szekunder kúszássebességre gyakorolt hatást jellemzi. Továbbá, minthogy a primer kúszás nagyságát és időtartamát rendre B és p állandók szabják meg, a (4.2.2) és (4.2.3) egyenletek szerint terjesztetem ki azokat. Hasonlóan a C funkcióhoz, hatvány függvényt használtam a B_C és p_C meghatározására is. A (4.2.3) képletben lévő C_i , B_i , és p_i állandók úgy választandók meg, hogy legjobban illeszkedjenek a kísérleti eredményekhez.

A (4.2.1) egyenletből a hibaintenzitást ψ_N a (3.8.7) egyenletbe helyettesítve és az (3.7.4) egyenlet szerinti integrálást elvégezve kapjuk a primer kúszás alakváltozás vektorát (e^C) átfolyó áram esetére:

$$e^c(t) = a_0\{F[a^c(t)] - F(b^c) + KF(c^c)t\}, \quad (4.2.4)$$

ahol

$$a^c = \cos \beta_{1c} = \frac{\sigma_p}{\sigma\sqrt{(1+C^2) - [B_c \exp(-p_c t)]^2}},$$

$$b^c = \frac{\sigma_p}{\sigma\sqrt{(1+C^2) - B_c^2}}, \quad (4.2.5)$$

$$c^c = \frac{\sigma_p}{\sigma\sqrt{(1+C^2)}} = \text{const.}$$

$$F(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2} \left(2\sqrt{1-\zeta^2} - 5\zeta^2\sqrt{1-\zeta^2} + 3\zeta^4 \ln \frac{1+\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right), \quad F(1) = F'(1) = 0. \quad (4.2.6)$$

Elemezzük a (4.2.4) kifejezés kulcs elemét, $F(a^c) - F(b^c)$ különbséget, amely a primer kúszás fejlődését szabja meg. A további számítások egyszerűsítése kedvéért közelítsük F függvényt (4.2.6) az alábbiak szerint:

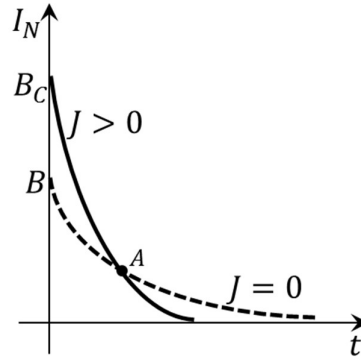
$$F \approx \left(\frac{1}{x} - 1 \right)^2, \quad F(1) = F'(1) = 0. \quad (4.2.7)$$

Így összehasonlítható a primer kúszás lefolyása áram jelenlétében, illetve anélkül:

$$F(a^c) - F(b^c) - [F(a) - F(b)] =$$

$$= G \left\{ B_c^2(1 - e^{-2p_c t}) \left[G - \frac{1}{\sqrt{H}} \right] - B^2(1 - e^{-2pt})(G - 1) \right\} > 0, \quad (4.2.8)$$

ahol $G \equiv \sigma/\sigma_p > 1$ és $H \equiv 1 + C^2 > 1$. Az a tény, hogy $(a^c) - F(b^c) > F(a) - F(b)$, azaz a kúszási alakváltozás áram jelenlétében nagyobb, mint annak hiányában, t minden értékére igaz, akkor is, ha $t > t_A$, amikor $I_N^c < I_N$ (4.7. ábra).



4.7. ábra Sebesség-integrál a $J = 0$ és $J > 0$ mellett

Kérdés, hogy vajon egyedül C jelenléte a (4.2.5) egyenletek nevezőjében (a sebesség-integrál összefüggésében (4.2.2) szereplő állandók – B_C és p_C – nélkül) elégséges-e az $e^C > e$ viszony teljesüléséhez. Annak ellenére, hogy a (4.2.8) egyenlet $B^C = B$ és $p^C = p$ mellett pozitív eredményhez vezet,

$$F(a^C) - F(b^C) - [F(a) - F(b)] = GB^2(1 - e^{-2pt}) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{H}}\right) > 0, \quad (4.2.9)$$

a (4.2.4) egyenlet a klasszikus B állandóval nyert eredmények numerikus elemzése túl alacsony értékeket mutatott a kísérleti eredményekhez képest, tehát C jelenléte önmagában nem elégíti ki az $e^C > e$ egyenlőtlenséget. Továbbá az a tény, hogy $p_C > p$ azt eredményezi, hogy a^C , a -hoz képest, rövidebb idő alatt ér el állandó értéket, azaz a kúszás az állandósult állapotba kerül.

A (4.2.4) egyenlet harmadik tagja írja le a szekunder kúszás fejlődését J függvényében, amelyet az előző fejezetben tárgyaltam.

A (4.2.4) egyenlet második tagjához újra visszatérve, a $B_C > B$ egyenlőtlenség alapján téves lenne arra a következtetésre jutni, hogy az áram jelenléte esetén a kezdeti alakváltozás kisebb lesz, mint áram nélkül. Abból a tényből azonban, hogy a (4.2.5) nevezőjében szereplő C a $b^C < b$ egyenlőtlenséget eredményezi, már következik az előbbi megállapítás.

Összegezve, B_C és p_C bevezetésével az egyenáram mező fokozó hatása modellezhető a kúszás primer szakaszában. $C(J)$, $B_C(J)$ és $p_C(J)$ együttesen modellezi az áram által okozott csúszás intenzitásának növekedését minden aktív csúszósíkon, illetve a kúszási alakváltozásban részt vevő hibák számának növekedését (Rusinko, 2016). Ezen funkciók fő feladata, hogy modellezze az átfolyó áram milyen

módon segíti elő a diszlokációk leszakadását a diszlokációs csomópontokról és egyéb, mozgásukat korlátozó konfigurációról, aminek következtében nő a primer kúszás mértéke és csökken annak időtartama.

A numerikusan meghatározott eredmények ellenőrzésének céljából ábrázoltam az ón kúszásának $\varepsilon \sim t$ diagramját a primer szakaszban egytengelyű húzás esetére. A (4.2.4) képlet felhasználásával nyert eredményeket kísérletekből származókkal hasonlítottam össze különböző áramsűrűségek esetében (Zhao et al., 2014).

A kúszás diagramok szerkesztésére egytengelyű húzásra a (4.2.4) - (4.2.6) egyenleteket használtam. A képletekben szereplő mennyiségek és állandók értékeit a 4.3. táblázat tartalmazza.

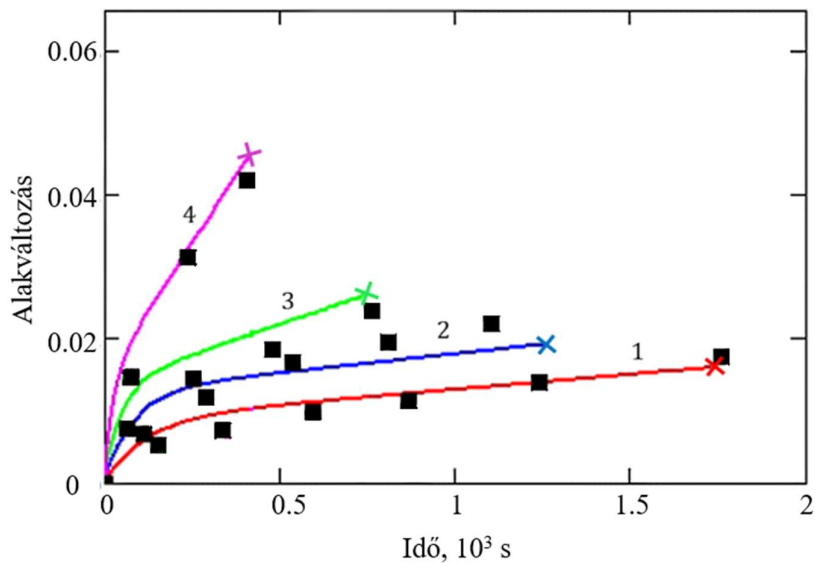
4.3. táblázat A (4.2.4) - (4.2.6) egyenletekben szereplő mennyiségek és állandók

Mennyiség	Érték	Mennyiség	Érték
c	5.98	r, MPa^2	700
k	7	B	0.755
$C_1, (\text{cm}^2/\text{kA})^{C_2}$	0.45	$B_1, (\text{cm}^2/\text{kA})^{B_2}$	0.1
C_2	3	B_2	0.5
$Q, \text{J/mol}$	7.4×10^4	p, s^{-1}	4.53×10^{-3}
σ_p, MPa	0.674	$p_1, \text{s}^{-1}(\text{cm}^2/\text{kA})^{p_2}$	9.5×10^{-4}
T, K	348	p_2	3

Az ón egytengelyű húzófeszültség hatására létrejövő primer kúszásának eredményeit $\sigma = 4.63 \text{ MPa}$ és $T = 348 \text{ K}$ esetén a 4.8. ábra és a 4.4. táblázat tartalmazza. Ezek alapján a számolt és a kísérletekből származó eredmények kielégítő egyezést mutatnak egymással.

4.4. táblázat A primer kúszás végén kialakult deformáció, és a primer kúszás időtartama

Áramsűrűség, kA/cm ²	A primer kúszás végén kialakult deformáció, %			A primer kúszás időtartama, ks		
	Teszt	Modell	Relatív hiba, %	Teszt	Modell	Relatív hiba, %
0	1.74	1.59	8.6	1.76	1.73	1.7
1.26	2.23	1.92	13.9	1.1	1.24	11.3
1.89	2.61	2.39	8.4	0.73	0.76	3.9
2.52	4.54	4.22	7.0	0.41	0.4	2.4



4.8. ábra Az ön primer kúszásának $\varepsilon \sim t$ diagramjai különböző áramsűrűségek esetére: 1 – $J = 0$, 2 – $J = 1.26$ kA/cm², 3 – $J = 1.89$ kA/cm², 4 – $J = 2.52$ kA/cm². Vonalak – modell eredmények, ■ – kísérlet; × jelöli a primer kúszás szakaszának végét. (Zhao et al., 2014)

4.2.2 Képlékeny alakváltozás leírása egyenáram jelenlétében

Az egyenáram fémek képlékeny alakváltozására gyakorolt hatása megjelenik egyrészt a képlékeny alakváltozást megindító feszültség (folyási feszültség) csökkenésében, másrészt a $\sigma \sim \varepsilon$ görbe meredekségének csökkenésében az áram hatása nélküli esethez képest (Andrawes et al., 2007, Perkins et al., 2007, Ross et al., 2007, Nguyen et al., 2016). Húzóvizsgálat során, rövid idejű áramimpulzus hatására a húzófeszültség jelentős, közel azonnali csökkenése tapasztalható. Az, hogy az alakváltozás fenntartásához szükséges feszültség csökken az áramerősség növekedésével, két okra vezethető vissza:

- (i) A hőmérséklet növekedésére, a növekvő áramerősséggel erőteljesebbé váló Joule-hevítés hatására.
- (ii) Az elektromos áram elősegíti a diszlokációk csúszását és mászását, és a diszlokáció sűrűség és a diszlokációk keletkezési sebességének csökkenése elősegíti az alakváltozás fenntartásához szükséges feszültség csökkenését.

Az átfolyó egyenáramnak az irreverzibilis alakváltozásra gyakorolt hatását leíró modellt – a (4.2.1) egyenletben látható eljárásnak megfelelően – képlékeny (időtől nem függő) alakváltozás esetére alkalmaztam [2]. A hibaintenzitást meghatározó egyenletet a (4.2.1)-ből származtattam arra az esetre, ha benne a sebesség-integrált nullával egyenlő, és a kúszáshatár helyett a folyáshatár (S_S) szerepel:

$$\psi_N = (\vec{S} \cdot \vec{N})^2 (1 + C^2) - S_S^2. \quad (4.2.10)$$

A (3.9.5) képlet alapján,

$$r\varphi_N = \psi_N,$$

a képlékeny alakváltozás intenzitás a következő:

$$\varphi_N = \frac{1}{r} [(\vec{S} \cdot \vec{N})^2 (1 + C^2) - S_S^2]. \quad (4.2.11)$$

Egytengelyű húzás sajátosságából adódik, hogy az alábbi szögtartományokon belül φ_N pozitív értéket vesz fel:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda \leq \lambda_{1C}, \\ -\alpha_{1C} &\leq \alpha \leq \alpha_{1C}, \\ -\beta_{1C} &\leq \beta \leq \beta_{1C}. \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

A fenti egyenlőtlenségekben álló határszögeket a $\varphi_N = 0$ feltételből határoztam meg:

$$\begin{aligned} \cos \lambda_{1C} &= \frac{\sigma_S}{\sigma \sqrt{(1 + C^2)} \cos \alpha \cos \beta}, \\ \cos \alpha_{1C} &= \frac{\sigma_S}{\sigma \sqrt{(1 + C^2)} \cos \beta}, \\ \cos \beta_{1C} &= \frac{\sigma_S}{\sigma \sqrt{(1 + C^2)}}. \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

A képlékeny alakváltozás-vektor komponens (e^C) a (3.7.4) integrálból meghatározható, amiben az integrandusz (4.2.11), az integrálási határok pedig (4.2.12), (4.2.13):

$$e^C = a_0 F(a^C), \quad a_0 = \frac{\pi \sigma_S^2}{9r}, \tag{4.2.14}$$

ahol,

$$a^C = \frac{\sigma_S}{\sigma \sqrt{(1 + C^2)}}. \tag{4.2.15}$$

Az áram nélküli esetben ($C = 0$) klasszikus képlékeny alakváltozást leíró képlethez jutunk:

$$e = a_0 F(a), \quad a_0 = \frac{\pi \sigma_S^2}{9r}, \quad a = \frac{\sigma_S}{\sigma}. \tag{4.2.16}$$

A (4.2.14) és (4.2.16) képletben szereplő F a (4.2.6) szerinti függvény.

A fenti összefüggésekből következik, hogy az egyenáram jelenléte csökkenti az adott mértékű képlékeny alakváltozás fenntartásához szükséges feszültség (σ_c) értékét az áram nélküli esethez hasonlítva. A (4.2.14) és (4.2.15) egyenletekből származtatott e^c értékét a (4.2.16) egyenletből származó e értékével összehasonlítva arra jutottam, hogy

$$e^c = e \Rightarrow \sigma_c = \frac{\sigma}{\sqrt{(1 + C^2)}} \quad (4.2.17)$$

Ugyanakkor nem hagyható figyelmen kívül az átfolyó áram okozta hőmérséklet növekedés hatására bekövetkező hőtágulás sem, amely feszültségesésként nyilvánul meg:

$$\Delta\sigma_\alpha = E\alpha\Delta T, \quad (4.2.18)$$

ahol E az anyag rugalmassági modulusza, α a hőtágulási együttható ($2,6 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ (Yang et al., 2011)) és ΔT a Joule-hevítésből származó hőmérséklet növekedés. Továbbá, a hőtágulásból eredő feszültség csökkenés számításakor nem hanyagolható el a kísérletek során használt szakítógép merevsége. A gépben ébredő feszültség „ernyedése” csökkenti a próbatestben bekövetkező feszültség csökkenés mértékét. A szakítógép-próbatest rendszer eredő merevsége a

$$\frac{1}{k_{\ddot{o}}} = \frac{1}{k_g} + \frac{1}{k_p} \quad (4.2.19)$$

összefüggéssel számolható, ahol $k_{\ddot{o}}$ az eredő merevség, k_g a szakítógép merevsége (18 kN/mm (ASM International, 2000)), k_p a próbatest merevsége, amit az alábbi képlet fejez ki:

$$k_p = A \frac{E}{L}, \quad (4.2.20)$$

ahol A a próbatest keresztmetszete, L a próbatest hossza az áramimpulzus bekapcsolásának pillanatában (10 mm², illetve 51,5 mm (Nguyen et al., 2016)). A hőtágulásból eredő feszültség csökkenés mértéke, a rendszer merevségének figyelembevételével, a következőképp alakul:

$$\Delta\sigma_\alpha = k_{\ddot{o}} \frac{\Delta L_\alpha}{A}, \quad (4.2.21)$$

ahol ΔL_α a hőtágulásból eredő hosszváltozás.

Tehát az alakváltozás fenntartásához szükséges feszültség az áramimpulzus bekapcsolásának pillanatában:

$$\sigma_{c,\alpha} = \sigma_c - \Delta\sigma_\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{(1 + C^2)}} - k_\delta \frac{\Delta L_\alpha}{A}. \quad (4.2.22)$$

Ennek az eredménynek a segítségével numerikusan meghatározható a húzás során egy rövid idejű elektromos impulzus hatására bekövetkező feszültségesés mértéke. Nguyen et al. (2016) vizsgálatai alapján látható, hogy egy rövid elektromos impulzus a húzófeszültség azonnali esését eredményezi (4.9.a ábra). Az ábrán jól megfigyelhető az adott alakváltozás létrehozásához szükséges húzófeszültség értékének csökkenése az elektromos impulzus megjelenésének pillanatában. Az áramimpulzus utáni keményedés itt nem kerül tárgyalásra.

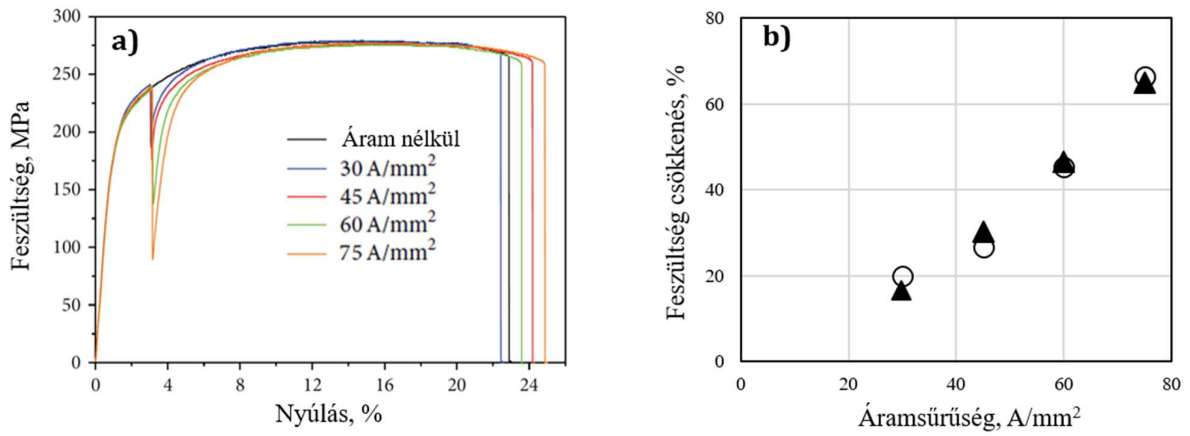
A feszültségesés mértékét (Δ_m) a (4.2.22) egyenlettel számítottam oly módon, hogy abba behelyettesítettem az elektromos impulzus megjelenésének pillanatában (3%-os alakváltozásnál) fellépő feszültség értékét: $\sigma_0 = 245.6$ MPa. Így a feszültségesés százalékos mértéke az áramsűrűség függvényében:

$$\Delta_m = \frac{\sigma_0 - \sigma_{c,am}}{\sigma_0} \times 100, \quad m = \overline{1,4} \quad (4.2.23)$$

ahol

$$\sigma_{c,am} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{(1 + C_m^2)}} - k_\delta \frac{\Delta L_{am}}{A}. \quad (4.2.24)$$

C_m^2 értékét a négy különböző áramsűrűség esetén ($J = 30, 45, 60,$ és 75 A/mm²) a (4.2.3) egyenlet első tagjából számoltam. Ezeknek az áramsűrűségeknek megfelelő hőmérséklet növekedések a következők: $\Delta T_m = 38, 62, 94, 139$ °C (Nguyen et al., 2016). ΔL_{am} az adott hőmérsékleten létrejövő hossznövekedés mértéke. A képletben szereplő konstansok értékeire a következőket választottam: $C_1 = 0.004944$ (mm²/A)^{C₂} és $C_2 = 1.241$. A numerikusan és kísérletileg meghatározott eredmények a $\Delta_m \sim J$ diagram (4.9.b ábra) alapján jó egyezést mutatnak.



4.9. ábra. Az elektromos impulzus hatása az AZ31 magnézium-ötvözet képlékeny alakváltozására húzóvizsgálat során; **a)** feszültség - alakváltozás diagramok különböző sűrűségű áramimpulzusokkal, **b)** a feszültség százalékos csökkenése az áramsűrűség függvényében (O - kísérlet, ▲ - modell eredmény).

(Nguyen et al., 2016)

Következtetés (2. tétel)

Általánosítottam a szintézis elméletet a következő két eset analitikai leírására [2]:

- (i) az átfolyó egyenáram által gyakorolt hatás a primer kúszás nagyságára és időtartamára,**
- (ii) a rövid idejű áramimpulzus hatása az adott alakváltozás fenntartásához szükséges feszültségre.**

A szintézis elmélet konstitutív egyenleteibe olyan tagot vezettem be, amely figyelembe veszi az átfolyó áram hatását a kúszás primer szakaszára. Igazoltam, hogy a modell segítségével meghatározható

- (i) a primer kúszás mértéke és időtartama különböző áramsűrűség mellett.

Továbbá igazoltam, hogy a levezetett egyenletek nem időfüggő alakváltozás (képlékeny alakváltozás) leírására is alkalmasak. Mégpedig alkalmazásukkal meghatározható

- (ii) a húzófeszültség ugrásszerű csökkenésének mértéke az áramsűrűség függvényében.

4.3. A keményedési felület fejlődése az irreverzibilis alakváltozás során áram jelenlétében

Az összes képlékenységtani elmélet három alapvető fogalmon alapszik.

I. Folyási kritérium, amely a test rugalmas vagy képlékeny alakváltozását határozza meg. Ez a kritérium a folyást okozó többtengelyű feszültségállapotot határozza meg. Azt a felületet írja le a feszültség térben, amely a rugalmas és képlékeny tartományt választja el. A folyási felület alakulása a terhelés folyamán (keményedési felület) nagy jelentőséggel bír abból a szempontból, hogy a test képlékeny alakváltozást szenved-e adott feszültségállapotban.

II. Az alakítási keményedés az anyag képlékeny alakváltozással szembeni ellenállását mutatja meg a képlékeny alakítás folyamán. Képlékeny alakváltozás során a keményedés definiálja a folyási kritérium evolúcióját. A keményedés leírására jelenleg három módszer létezik:

- (i) izotróp keményedés, amely a kezdeti folyási felület minden irányban azonos terjedését jelenti;
- (ii) kinematikus keményedés esetében, a kezdeti folyási felület alakja és mérete nem változik, hanem eltolódik a feszültség térben;
- (iii) a folyási felület alakja torzul (a szintézis elmélet ezt az esetet alkalmazza).

A folyási felületen belül található feszültség kizárólag rugalmas alakváltozást hoz létre. A képlékeny alakváltozás akkor indul meg, ha a feszültség vektor (a feszültség térben) eléri a folyási felületet. A további alakváltozáshoz a feszültségek folyamatos növekedése szükséges. Ki kell hangsúlyozni, hogy keményedési felületen kívül eső feszültség vektor nem létezhet, így kizárólag két eset lehetséges: a feszültség vektor végpontja vagy a keményedési felületen belülre (rugalmas alakváltozás), vagy pontosan a felületre esik (képlékeny alakváltozás).

III. A képlékeny anyagtörvény definiálja a feszültség- és alakváltozás-tenzorok növekményei közötti összefüggést.

A fenti megállapítások a szintézis elmélet keretében, összhangban a 3. fejezetben leírtakkal, a következő alakot öltik:

- (i) Amíg lágy, alakítatlan állapotban az anyag képlékeny tulajdonságai minden irányban azonosak, tehát izotrópok, addig a képlékeny alakváltozás kétségtelenül anizotrópiát eredményez. Az anyag keményedése változik az érintősíkok pozíciójától, tehát a csúszási rendszer irányától függően.
- (ii) A keményedési felület fejlődése nem előre meghatározott, hanem teljes mértékben a terhelési pályától (feszültség vektor hodográfjától) függ.
- (iii) A terhelési pontban (a feszültség vektor végpontján) sarokpont keletkezik a keményedési felületen, mely nagy jelentőségű a görbe vonalú terhelési pályák esetében.

4.3.1 A keményedési felület fejlődése képlékeny alakváltozás során megjelenő áramimpulzus hatására

Az áramimpulzus által okozott feszültség csökkenés két okra vezethető vissza (Nguyen et al., 2016).

- (i) A Joule-hevítés növeli a próbatest hőmérsékletét.
- (ii) Az átfolyó egyenáram elősegíti a diszlokációk csúszását és mászását, továbbá csökkenti a diszlokációs mező ellenállását.

Az áramimpulzus bekapcsolásának pillanatában a (4.1.2) és (3.9.5) egyenletekből a következő adódik:

$$\varphi_{NC} = \frac{1}{r} [H_{NC}^2 (1 + C^2) - \sigma_S^2]. \quad (4.3.1)$$

Hogy az alakváltozás ugyanakkora maradjon, mint az impulzus előtt az alábbi feltétel teljesülése szükséges

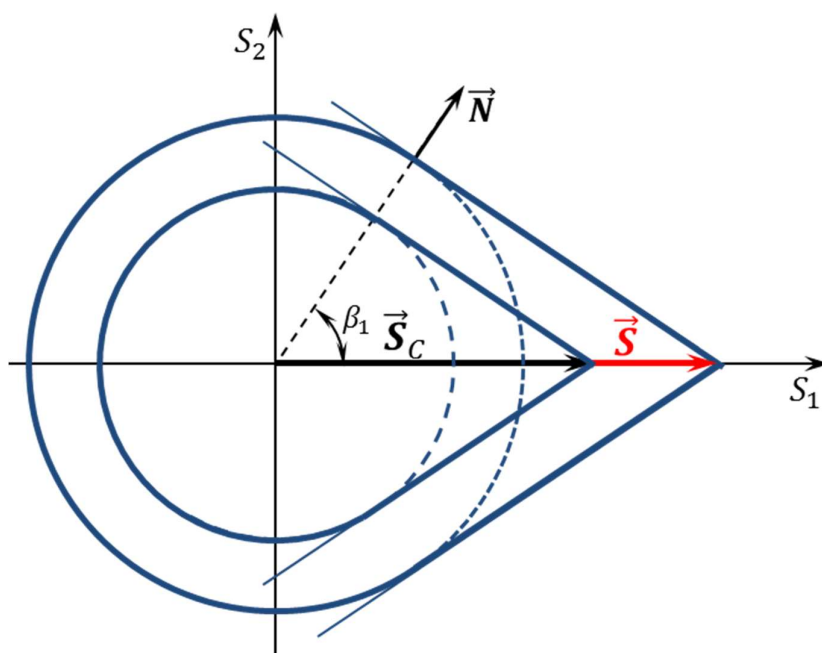
$$\varphi_{NC} = \varphi_N, \quad (4.3.2)$$

ami a (4.3.1) és (3.8.3b)² képletek alapján csak akkor biztosítható, ha,

$$H_{NC}^2(1 + C^2) = H_N^2 \Rightarrow H_{NC} = \frac{H_N}{\sqrt{1 + C^2}}. \quad (4.3.3)$$

A fenti H_{NC} és H_N közötti összefüggés azt jelenti, hogy az elektromos impulzus hatására a síkok ugrásszerűen elmozdulnak az origó irányában. Mivel a H_{NC}/H_N arány független α , β és λ szögektől, minden sík ugyanazt az utat teszi meg. Eszerint a keményedési felület alakja nem változik az impulzus hatására (4.10. ábra). Az \vec{S}_C feszültségvektor hosszát, azaz a σ_C húzófeszültség értékét a (4.3.3) képlet határozza meg $\alpha, \beta, \lambda = 0$ mellett:

$$\sigma_C = \frac{\sigma}{\sqrt{1 + C^2}}. \quad (4.3.4)$$



4.10. ábra Keményedési felületek az áramimpulzus előtt és után

² A (3.8.3b) képletben $I_N = 0$.

Nguyen et al. (2016) a kísérletek során $\sigma = 246$ MPa feszültség elérésekor elektromos impulzust kapcsoltak be négy különböző áramsűrűséggel J_m (30, 45, 60, és 75 A/mm²). A σ_c analitikai értékeit a (4.3.4) képlet alapján $C_1 = 0.004944$ (mm²/A)^{C₂} és $C_2 = 1.241$ értékei mellett határoztam meg [4,5]. Mivel a kísérletek során a hőmérséklet nem változott, $W(T) = 1$ feltétellel éltem. Az eredmények jó egyezést mutatnak a kísérlettel [2]. A (4.3.4) egyenletből származó eredményeket a 4.5 táblázat szemlélteti.

4.5 táblázat A $\sigma_{c,\alpha}$ húzófeszültség analitikai és kísérleti értékeinek összehasonlítása

J_m , A/mm ²	$\sigma_{c,\alpha}$, MPa (modell)	$\sigma_{c,\alpha}$, MPa, (kísérlet)	Relatív hiba, %
30	205,2	196,5	4,44
45	171,2	180,2	5,03
60	131,4	134	1,95
75	85,8	82,3	4,28

A feszültségvektor végpontján lévő határ sík orientációját (β_1) az áramimpulzus előtt a (4.1.17) összefüggéssel, $C = 0$ esetén, számolva kaptam

$$\beta_1 = \arccos\left(\frac{\sigma_s}{\sigma}\right) = 42.8^\circ, \quad (4.3.5)$$

ahol $\sigma_s = 180$ MPa (Nguyen et al., 2016).

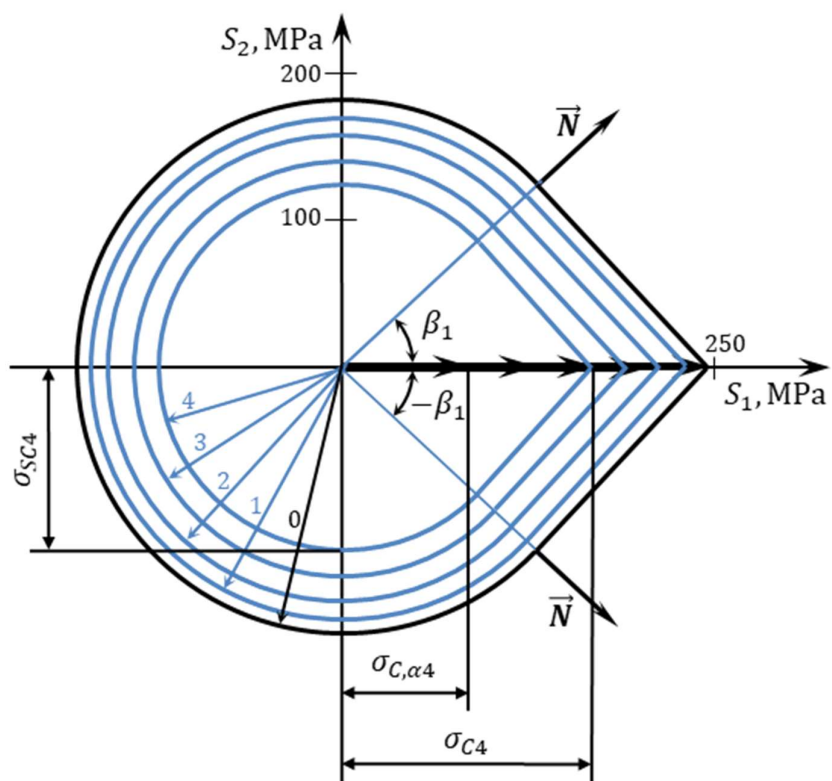
Egytengelyű húzás esetén a keményedési felület tengely szimmetrikus, így elegendő a β_1 szög megadása. A $\beta > |\beta_1|$ szögtartományba eső körök sugarai a (4.3.4) egyenlet alapján:

$$\sigma_{SCm} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{1 + C_m^2}}, \quad (4.3.6)$$

ahol C_m ($m = \overline{1,4}$) a (4.1.4) képletből. A σ_{SCm} (4.3.6) egyenlet megoldásából származó értékei a 4.6 táblázatban találhatóak. A 4.11. ábra szemlélteti az AZ31 magnézium-ötvözet egytengelyű húzásának eredményeiből származtatott keményedési felületeket.

4.6 táblázat A folyáshatár (σ_{SCm}) számított értékei különböző áramsűrűségek esetén

Sorszám, m	$J_m, A/mm^2$	σ_{SCm}, MPa
1	30	170,6
2	45	157,3
3	60	140,8
4	75	124,2



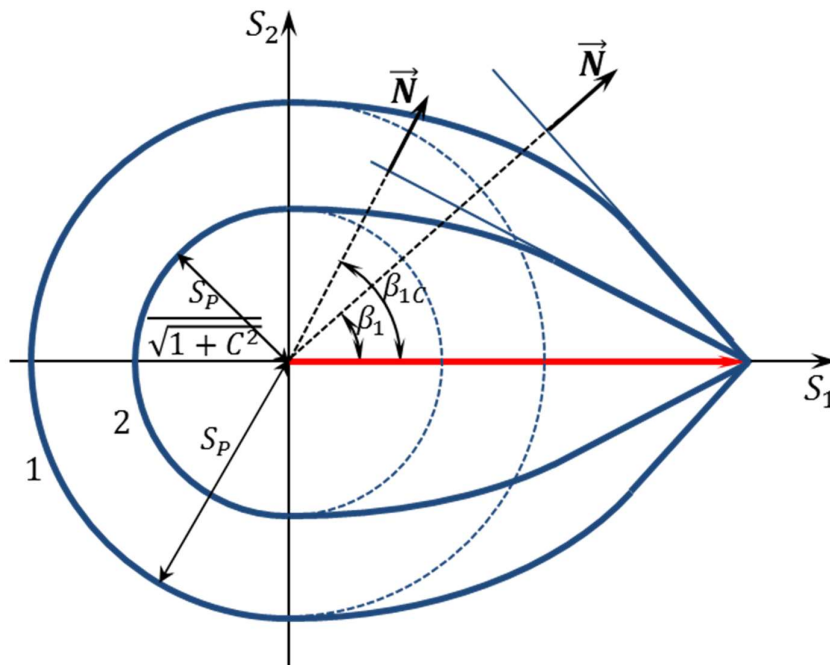
4.11. ábra Keményedési felületek az áramimpulzus előtt és után, különböző áramsűrűségek esetében. Az 1...4 számok a σ_{SCm} indexeinek felelnek meg

4.3.2 A keményedési felület fejlődése primer kúszás során áram jelenlétében

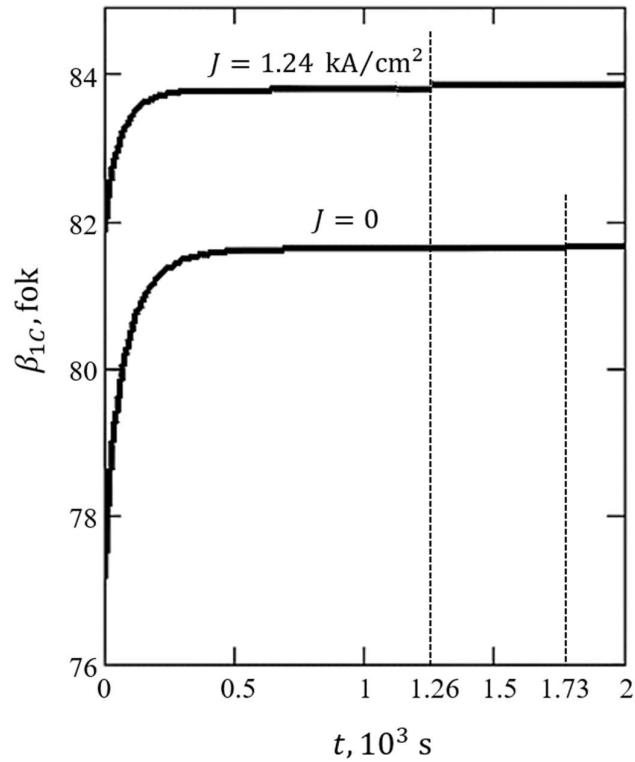
A (4.2.2) egyenletből származó sebesség-integrál értéke zérus a terhelés kezdetén ($t = 0$). Az egyenáram hatása a folyási felület kezdeti gömbjei sugarának csökkenésében nyilvánul meg. Ténylegesen, a (4.2.1) egyenletből $\psi_N, I_N^C = 0$ esetén az adódik, hogy

$$H_N \equiv \sigma_{PC} = \frac{\sigma_P}{\sqrt{1 + C^2}} \quad (4.3.7)$$

Ebből az eredményből és a (4.3.7) összefüggésből együttesen adódnak a 4.12. ábrán látható keményedési felületek $J = 0$ és $J > 0$ esetére, a primer kúszás egy adott időpillanatában. Ebből egyértelműen látszik az anyag lágyulása az áram hatására. A 4.13. ábra mutatja β_{1C} és β_1 szögek időbeli változását, ami alátámasztja a 4.12. ábrán látható helyzetet. Megfigyelhető, hogy β_{1C} nagyobb, mint β_1 , ezen kívül β_{1C} értéke gyorsabban stabilizálódik β_1 értékéhez képest. A 4.13. ábra görbéit a (4.2.5) képlet alapján szerkesztettem a 4.3 táblázatban található állandók mellett [4,5].



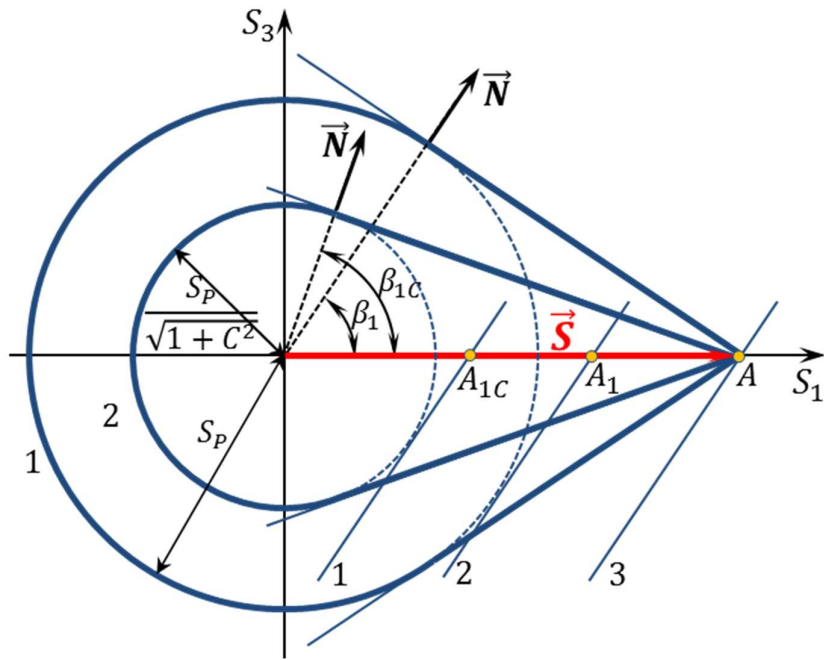
4.12. ábra A keményedési felület a primer kúszás egy: 1 – $J = 0$, 2 – $J > 0$ esetére



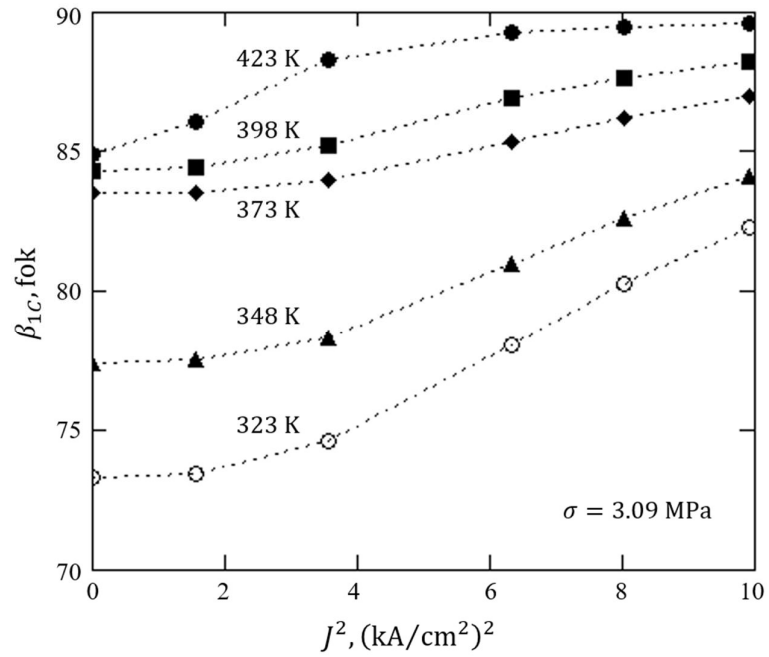
4.13. ábra A határszögek időbeli változása az ön primer kúszása során (húzófeszültség: $\sigma = 4.63$ MPa, hőmérséklet: $T = 348$ K)

4.3.3 A keményedési felület fejlődése szekunder kúszás során áram jelenlétében

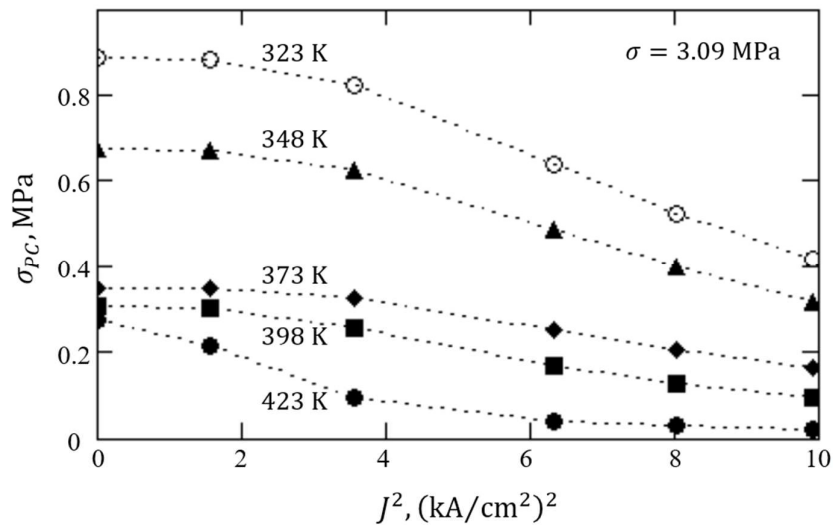
Vizsgáljuk meg az átfolyó áram hatását az állandósult kúszás esetére a keményedési felületeken keresztül (4.14. ábra). Tekintsünk két azonos orientációjú síkot 1 és 2, amelyek rendre érintik a következő két gömböt: az átfolyó áram hatásaként (4.3.7) összefüggésből kapott folyási felületet, illetve az áram hatása nélküli S_p sugarú folyási felületet. Könnyen belátható, hogy ha adott feszültség hatására mindkét sík a 3 pozícióba kerül, az általuk megtett utak különbözni fognak. Ha például a síkok S_1 tengellyel való metszéspontjait tekintjük nyilvánvaló, hogy $AA_{1C} > AA_1$. Ez azt jelenti, hogy az 1 sík által megtett út ($J > 0$) nagyobb a 2 síkhoz képest ($J = 0$). A 4.15. és 4.16. ábrák a határsík szögének β_{1C} és a kúszáshatár σ_{pC} változását szemléltetik az áramsűrűség és a hőmérséklet függvényében egy adott feszültségre ön állandósult kúszása esetén. A 4.14.-4.16. ábrákat a (4.1.9), (4.1.11) és (4.3.7) egyenletek alapján szerkesztettem meg a 4.2 táblázatban szereplő állandók mellett [4,5].



4.14. ábra Keményedési felület állandósult kúszás esetén: $1 - J = 0$, $2 - J > 0$



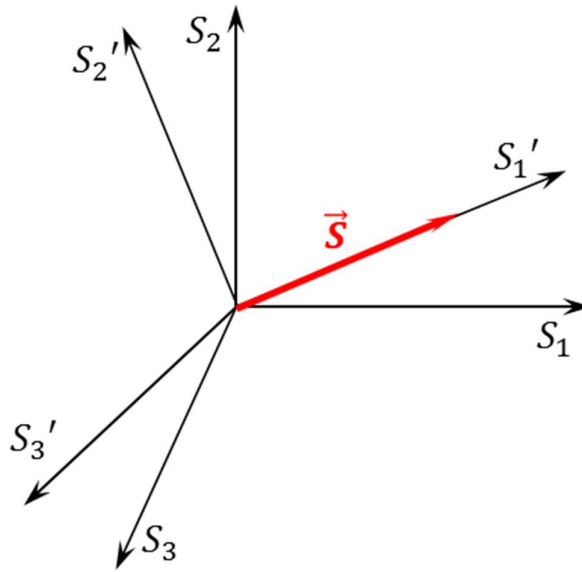
4.15. ábra $\beta_{1c} \sim J^2$ görbék különböző hőmérsékletek esetén



4.16. ábra $\sigma_{PC} \sim J^2$ görbék különböző hőmérsékletek esetén

4.3.4 Az egytengelyű húzás esetén kapott eredmények általánosítása tetszőleges irányú egyszerű terhelésre

A következőkben az egytengelyű húzás esetére kapott eredményeket általános, egyenes vonalú (lineáris) terhelési pályára terjesztem ki [4,5]. Tekintsünk egy tetszőleges irányú feszültség vektort az S^3 térben (egytengelyű húzás esetében az \vec{S} vektor kizárólag egy nem zérus komponens - S_1 - tartalmaz). Az eredeti koordináta rendszert úgy forgatva, hogy az S_1 tengely az \vec{S} vektorral egy irányú legyen, újra az egytengelyű húzás esetére jutunk (4.17. ábra). Tehát a korábbi egyenletek (4.1, 4.2 fejezet) úgy alkalmazhatók, hogy bennük S_1 helyére a vektor hosszát, $|\vec{S}|$ kell helyettesíteni. Tehát új koordináta rendszeren (S'_1, S'_2, S'_3) belül az egyenletek segítségével e_1' komponens meghatározható.



4.17. ábra A koordináta rendszer általános feszültségállapotba való forgatása

Az eredeti koordináta rendszeren e_k alakváltozás-vektor komponensei e_1' segítségével a következőképp fejezhetők ki:

$$e_k = \theta_k e_1', \quad (4.3.8)$$

ahol θ_k a forgatás szögeinek iránykoszinuszai.

Tehát, lineáris terhelés során:

$$e_k = \frac{e_1'(S)}{S} S_k. \quad (4.3.9)$$

A (4.3.9) egyenlet a Hencky-Nádai deformációs elmélet analógiájának tekinthető. Mivel az átfolyó áram hatása nem vektoriális formában jelenik meg a szintézis elmélet egyenleteiben (4.1.2), így a (4.3.9) egyenlet áram jelenlétében is alkalmazható:

$$e_{kc} = \frac{e_1'(S, J)}{S} S_k. \quad (4.3.10)$$

4.3.5 A keményedési felület programozása

A keményedési felület fejlődésének kinetikájának követhetősége kedvéért kidolgoztam egy programot, mely lehetővé teszi annak valós idejű megjelenítését egytengelyű húzás esetére [5]. A programot a MatLab használatával készítettem el. A szemléletesség miatt kétdimenziós feszültségtérben dolgoztam (S_1, S_3 altérben), ami nem tekinthető korlátnak, mivel az előző pont értelmében bármely általános irányú terhelés visszavezethető egytengelyű feszültségállapotra. Fontos kiemelni, hogy ez az ábrázolás a szintézis elmélet bármely feladatának leírására alkalmas. Szintén lényeges megállapítás, hogy a keményedési felületet alkotó egyenesek elmozdulásához konkrét fizikai folyamatok rendelhetők hozzá: a terhelésvektor végpontjával eltolt sík az irreverzibilis alakváltozást adja meg egy csúszási rendszeren belül.

A keményedési felület fejlődését leíró programok primer kúszás és képlékeny alakváltozás esetére az 1. és 2. mellékletben találhatók.

Az egyeneseket paraméteresen adtam meg. Ha a (x_0, y_0) pont egy egyenes egyik pontja, irányvektora pedig $\vec{v}[a, b]$, akkor az egyenes paraméteres egyenletrendszere

$$x = x_0 + a \cdot t, \quad (4.3.11)$$

$$y = y_0 + b \cdot t, \quad (4.3.12)$$

ahol a t paraméter az összes valós számon végigfut. A \vec{v} vektor komponensei:

$$a = -\sin \beta, \quad (4.3.13)$$

$$b = \cos \beta, \quad (4.3.14)$$

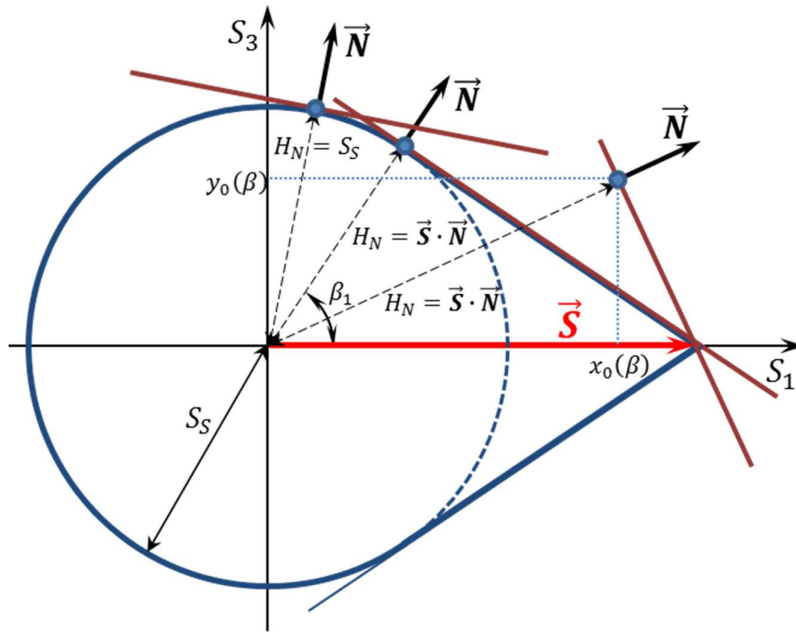
ahol $0 \leq \beta \leq 2\pi, \alpha = 0$.

Képlékeny alakváltozás

Azokra a síkokra, amelyek a feszültségvektor végpontján állnak, a következő összefüggések vonatkoznak (4.18. ábra):

$$x_0(\beta) = S - S \sin \beta \sin \beta = S \cos^2 \beta = H_N \cos \beta, \quad (4.3.15)$$

$$y_0(\beta) = S \sin \beta \cos \beta = S \cos^2 \beta = H_N \sin \beta, \quad (4.3.16)$$



4.18. ábra A keményedési felület képlékeny alakváltozás esetén

ahol, S az \vec{S} feszültségvektor hossza, H_N a síktávolság. A fenti képletekből látható, hogy x_0 és y_0 a normális \vec{N} állását meghatározó β szög függvénye. A (4.3.15) és (4.3.16) összefüggések az alábbi szögtartományon belül érvényesek:

$$|\beta| \leq \beta_1, \quad (4.3.17)$$

ahol β_1 a határsíkok állását adja meg:

$$\cos \beta_1 = \frac{S_S}{S}, \quad (4.3.18)$$

ahol S_S a folyási felület sugara. A (4.3.17) szögtartományon kívül,

$$|\beta| > \beta_1, \quad (4.3.19)$$

a síkok a kezdeti folyási felületet (kört) érintik, azaz rájuk a következő írható:

$$x_0(\beta) = S_S \cos \beta \quad (4.3.20)$$

$$y_0(\beta) = S_S \sin \beta \quad (4.3.21)$$

Kúszás

Ahogy ismert, a sebesség-integrál hatására a síkok a terhelés folyamán távolodnak az origótól. Addig, amíg a feszültségvektor egy síkot sem ér el ($H_N > \vec{S} \cdot \vec{N}$), a következő egyenleteket használtam (4.19. ábra):

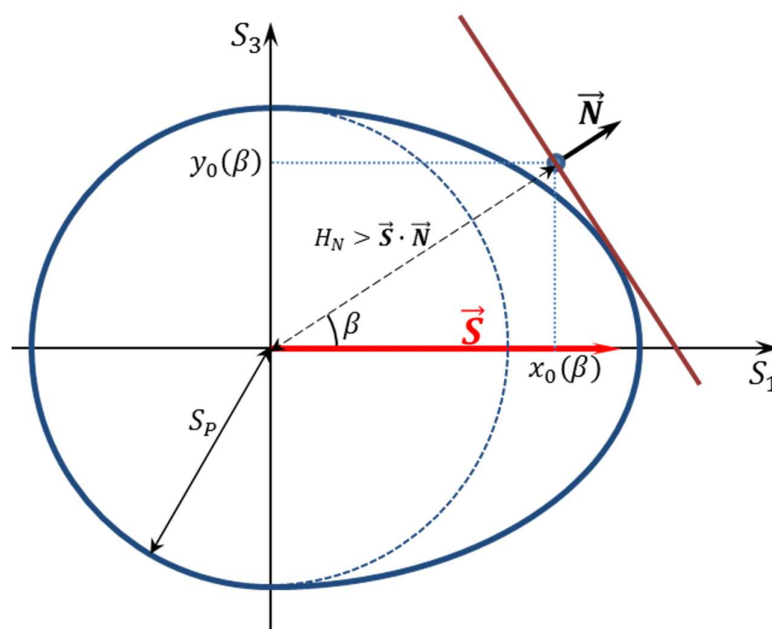
$$x_0(\beta) = H_N \cos \beta = (S_P + I \cos \beta) \cos \beta, \quad (4.3.22)$$

$$y_0(\beta) = H_N \sin \beta = (S_P + I \cos \beta) \sin \beta, \quad (4.3.23)$$

ahol S_P a kúszáshatár, I a sebesség-integrál. Az aktív terhelés folyamán:

$$I = \frac{B}{p} \dot{S} [1 - \exp(-pt)], \quad t \in [0, t_M], \quad (4.3.24)$$

ahol t_M az aktív terhelés ideje, amikor a feszültségvektor hossza nő az időben.



4.19. ábra A keményedési felület az irreverzibilis alakváltozás hiányában

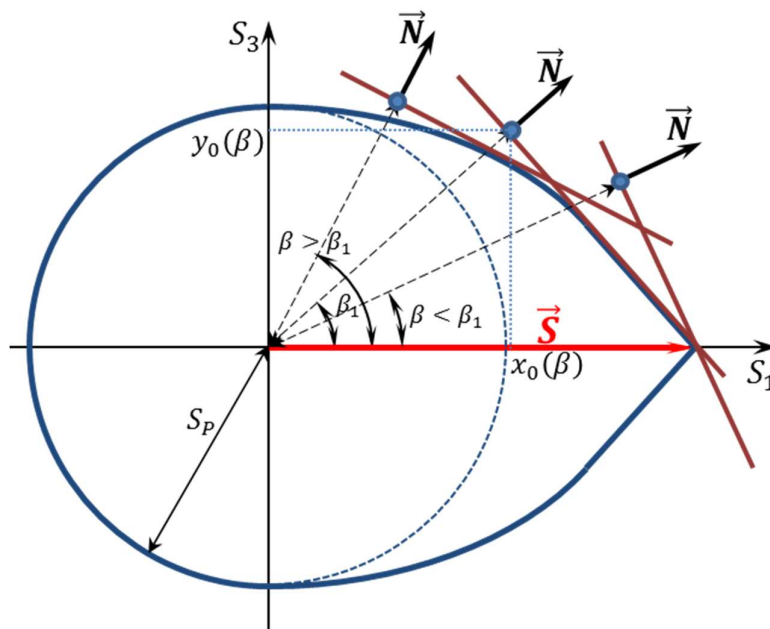
Attól kezdődően, hogy a feszültségvektor eléri az első síkot a (4.3.15) és (4.3.16) egyenletek használandók a (4.3.17) szögtartományon belül, amely határértéke a következőképp alakul:

$$\cos \beta_1 = \frac{S_P}{S + I}. \quad (4.3.25)$$

A $[0, t_M]$ időszakaszt követően – a feszültségvektor hossza időben állandó –, a sebesség-integrál a következő alakot ölti:

$$I = \frac{B}{p} \dot{S} [\exp(pt_M) - 1] \exp(-pt), \quad t \geq t_M. \quad (4.3.26)$$

A (4.3.26) egyenlet a sebesség-integrál időbeni csökkenését adja meg, aminek következtében a síkok az origó felé mozdnak. Ez a folyamat a feszültségvektor végpontjába kerülő síkok számának növekedését jelenti, ami nem más, mint a primer kúszás folyamata (4.20. ábra).



4.20. ábra A keményedési felület a primer kúszás szakaszában

Miután a sebesség-integrál nullává válik, a szekunder kúszás szakasza kezdődik, ami azt jelenti, hogy a feszültségvektor végpontján lévő, időben állandó számú síkokon modellezzük az alakváltozást. Tehát a (4.3.15) - (4.3.18) egyenletek, illetve a 4.18. ábra használhatók azzal a feltétellel, hogy a (4.3.18) egyenletben az anyag kúszáshatára használandó, és a feszültségvektor hossza időben állandó.

Következtetés (3. tézis)

Kidolgoztam a keményedési felület változását leíró egyenleteket [4,5].

Az átfolyó egyenáramnak az anyag deformációs tulajdonságaira gyakorolt hatását a keményedési felület részletes elemzésével támasztottam alá egytengelyű húzás esetében. Leírtam a keményedési felület fejlődését a következő esetekre: primer és szekunder kúszás, illetve képlékeny alakváltozás egyenáram jelenlétében. Programot készítettem, amely meghatározza a keményedési felület kinetikáját. Általánosítottam az egytengelyű húzás esetében kapott eredményeket általános egyszerű terhelési pályára. Ennek eredményeképp megmutattam, hogy a deformációs elmélet keretében értelmezett törvény (Hencky-Nádai törvény) marad érvényben az áram jelenlétében is.

Összefoglalás és jövőbeli lehetőségek

A disszertációban bemutatott kutatási eredményeim a következő módon foglalhatók össze. A szintézis elmélet keretében kidolgoztam egy modellt, amely lehetővé teszi az irreverzibilis alakváltozás analitikai leírását átfolyó áram jelenlétében. Sikerült az irreverzibilis alakváltozás teljes skáláját lefedni: mind az azonnali képlékeny, mind az időtől függő kúszási alakváltozást. Ennek a célnak az eléréséhez kiterjesztettem a szintézis elmélet alapvető egyenleteit úgy, hogy azokba új tagokat (áramsűrűségtől függő funkciókat) vezettem be. Ezek a funkciók jól tükrözik az átfolyó áram kísérletekkel alátámasztott hatását az irreverzibilis alakváltozásra. Ennek eredményeképp sikerült levezetnem olyan, az irreverzibilis alakváltozást leíró összefüggéseket, amelyek jó egyezést mutatnak a kísérletekben rögzített eredményekkel. Ami a kúszási alakváltozást illeti az általam kidolgozott modell leírja a primer-, illetve szekunder kúszás növekedését az egyenáram hatására. Továbbá a modell alkalmas előre jelezni az áramimpulzus által előidézett feszültségcsökkenést. A felsorolt hatások mélyebb megértése céljából részletesen elemeztem a keményedési felület fejlődését, ami fontos információt ad az anyag keményedési és deformációs állapotáról. A keményedési felület evolúciójának szemléletes bemutatása kedvéért programot írtam a MatLab szoftver segítségével. Legvégül megmutattam, hogy a deformációs elmélet keretében értelmezett törvény (Hencky-Nádai törvény) marad érvényben az áram jelenlétében is.

Az itt bemutatott modell hasznos eszközként használható a forrasanyagok és a nyomtatott áramkörök összekötő elemeinek a kúszással megvalósuló tönkremenetellel szembeni ellenállásának becslésében. Az anyagok átfolyó áram hatására megváltozott mechanikai viselkedésének leírásával segítséget nyújthat az elektromosan támogatott gyártótechnológiák tovább fejlődésében.

További kutatásaimat abban az irányban szeretném folytatni, hogy megvizsgáljam milyen hatást gyakorol a váltakozó áram az anyag deformációs tulajdonságaira.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom elsősorban témavezetőmnek, Ruzinkó Endrének szakmai segítségéért, melyet a kutatási munkában nyújtott, valamint jelen értekezés elkészültéhez elengedhetetlennek bizonyult támogatásáért és ösztönző fáradhatatlanságáért.

Köszönöm segítségét azon kollégáimnak az Anyagtechnológiai Intézeti Tanszéken, akik meglátásaikkal, kritikáikkal és biztatásukkal nagyban hozzájárultak munkámhoz, és az értekezés elkészültéhez.

Külön köszönöm Réger Mihálynak az eljárás hivatalos részeinek szervezésében és lebonyolításában nyújtott segítségét, valamint kritikai megjegyzéseit és hasznos tanácsait.

Köszönöm továbbá Borsa Juditnak segítő ösztönzését, és hivatalos ügyekben nyújtott támogatását.

Irodalomjegyzék

Andrawes, J. S., Kronenberger, T. J., Perkins, T. A., Roth, J. T., & Warley, R. L. (2007). Effects of DC current on the mechanical behavior of AlMg1SiCu. *Materials and manufacturing processes*, 22(1), 91-101.

Asaro, R. J. (1983). Micromechanics of crystals and polycrystals, *Advances in Applied Mechanics*, 23: 1–115.

Asaro, R. J. (1983). Crystal plasticity, *Journal of Applied Mechanics*, 501: 921-934.

Asaro, R., & Rice, J. (1977). Strain localization in ductile single crystals, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 25: 309-338.

ASM International. Handbook Committee. (2000). ASM Handbook: Mechanical testing and evaluation (Vol. 8). ASM International.

Batdorf, S. and Budiansky, B. (1949) A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip, *NACA, Technical note*, 871.

Béda Gy., Kozák I., Verhás J. (1995). *Continuum Mechanics*. Academic Publisher, Budapest, 1995.

Breen, J. E., & Weertman, J. (1955). Creep of polycrystalline tin. *JOM*, 7(11), 1230-1234.

Betten, J. (2005). *Creep Mechanics*, Springer, Berlin.

Callister, W. D., & Rethwisch, D. G. (2007). *Materials science and engineering: an introduction* (Vol. 7, pp. 665-715). New York: Wiley.

Chaboche, J. L. (1996) Unified Cyclic Viscoplastic Constitutive Equations: Development, Capabilities, and Thermodynamic Frame Work, *In. Krausz, Alexander S., and K. Krausz, eds. Unified constitutive laws of plastic deformation*. Elsevier.

Chaboche, J. L. (1997). Thermodynamic formulation of constitutive equations and application to the viscoplasticity and viscoelasticity of metals and polymers. *International Journal of Solids and Structures*, 34: 2239-2254.

Chakrabarty, J. (2000). *Applied plasticity* (Vol. 88). New York: Springer.

Chen, S. W., Chen, C. M., & Liu, W. C. (1998). Electric current effects upon the Sn/Cu and Sn/Ni interfacial reactions. *Journal of electronic materials*, 27(11), 1193-1199.

- Chen, C. M., & Chen, S. W. (1999). Electric current effects on Sn/Ag interfacial reactions. *Journal of electronic materials*, 28(7), 902-906.
- Chen, W. F., & Han, D. J. (2007). *Plasticity for structural engineers*. J. Ross Publishing.
- Chen, R., & Yang, F. (2008). Impression creep of a Sn60Pb40 alloy: the effect of electric current. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 41(15), 155406.
- Chen, R., & Yang, F. (2010). Effect of DC current on the creep deformation of tin. *Journal of electronic materials*, 39(12), 2611-2617. Zhao, G., & Yang, F. (2014). Effect of DC current on tensile creep of pure tin. *Materials Science and Engineering: A*, 591, 97-104.
- Chen, R., & Yang, F. (2011). Effect of electric current on the creep deformation of lead. *Materials Science and Engineering: A*, 528(6), 2319-2325.
- Conrad, H. (2000). Electroplasticity in metals and ceramics. *Materials Science and Engineering: A*, 287(2), 276-287.
- Conrad, H. (2000). Effects of electric current on solid state phase transformations in metals. *Materials Science and Engineering: A*, 287(2), 227-237.
- Conrad, H. (2002). Thermally activated plastic flow of metals and ceramics with an electric field or current. *Materials Science and Engineering: A*, 322(1-2), 100-107.
- Dudko, V., Belyakov, A., & Kaibyshev, R. (2017). Evolution of Lath Substructure and Internal Stresses in a 9% Cr Steel during Creep. *ISIJ International, ISIJINT-2016*.
- Hasija, V., Ghosh, S., Mills, M. J., & Joseph, D. S. (2003). Deformation and creep modeling in polycrystalline Ti-6Al alloys. *Acta materialia*, 51(15), 4533-4549.
- Heigel, J. C., Andrawes, J. S., Roth, J. T., Hoque, M. E., & Ford, R. M. (2000). *Viability of electrically treating 6061 T6511 aluminum for use in manufacturing processes*. Society of Manufacturing Engineers.
- Hutchinson, J. W. (2000). Plasticity at the micron scale. *International Journal of Solids and Structures*, 37: 225-238.
- Ilyushin, A. A. (1963). *Plasticity: Fundamentals of general mathematical theory*. Akademiia Nauk, SSSR. (in Russian).
- Joshimure, J. (1958). Comment on the slip theory of Batdorf and Budiansky. *Bull. ISME*, 1: 109-113.
- Kim, M. S., Vinh, N. T., Yu, H. H., Hong, S. T., Lee, H. W., Kim, M. J., ... & Roth, J. T. (2014). Effect of electric current density on the mechanical property of advanced high strength steels under quasi-static tensile loads. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 15(6), 1207-1213.
- Kinney, C., Morris, J. W., Lee, T. K., Liu, K. C., Xue, J., & Towne, D. (2009). The influence of an imposed current on the creep of Sn-Ag-Cu solder. *Journal of electronic materials*, 38(2), 221-226.
- Koiter, W. T. (1953). Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface. *Quarterly of applied mathematics*, 11: 350-354.

- Kuksa, L., Lebedev, A., & Koval'chuk, B. (1986). Laws of distribution of microscopic strains in two-phase polycrystalline alloys under simple and complex loading. *Strength of Materials*, **18**: 1-5.
- Kumar, P., & Dutta, I. (2011). Influence of electric current on diffusionally accommodated sliding at hetero-interfaces. *Acta Materialia*, *59*(5), 2096-2108.
- Li, W. Y., Zhou, M. B., & Zhang, X. P. (2015, August). Creep behavior of Cu/Sn-3.0 Ag-0.5 Cu/Cu solder joints under tensile stress coupled with DC current stressing. In *2015 16th International Conference on Electronic Packaging Technology (ICEPT)* (pp. 187-192). IEEE.
- Lichatchev, V., & Malinin, V. (1993). *Structural-analytic theory of strength*. St. Petersburg.
- Liu, H. Y., Zhu, Q. S., Wang, Z. G., & Shang, J. K. (2011). Stress relaxation behavior of Cu/Sn/Cu micro-connect after electrical current. *Materials Science and Engineering: A*, *528*(3), 1467-1471.
- Nabarro, F. R. (2004). Do we have an acceptable model of power-law creep?. *Materials Science and Engineering: A*, *387*, 659-664.
- Nemat-Nasser, S., & Okinaka, T. (1996). A new computational approach to crystal plasticity: fcc single crystal. *Mechanics of materials*, **24**: 43-57.
- Nguyen, T. T., Nguyen, T. V., Hong, S. T., Kim, M. J., Han, H. N., & Morestin, F. (2016). The effect of short duration electric current on the quasi-static tensile behavior of magnesium AZ31 alloy. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2016.
- Peirce, D., Asaro, R. J., & Needleman, A. (1983). Material rate dependence and localized deformation in crystalline solids. *Acta metallurgica*, **31**: 1951-1976.
- Perkins, T. A., Kronenberger, T. J., & Roth, J. T. (2007). Metallic forging using electrical flow as an alternative to warm/hot working. *Journal of manufacturing science and engineering*, *129*(1), 84-94.
- Piazolo, S., Montagnat, M., Grennerat, F., Moulinec, H., & Wheeler, J. (2015). Effect of local stress heterogeneities on dislocation fields: examples from transient creep in polycrystalline ice. *Acta Materialia*, *90*, 303-309.
- Poirier, J. P. (1977). Microscopic creep models and the interpretation of stress-drop tests during creep. *Acta Metallurgica*, *25*(8), 913-917.
- Popov, L.G. (1987). Generalization of Rabotnov model of plasticity for five-dimensional stress-deviator space. *J. Izv. Nauk USSR (USSR Acad. Sci.), Mech. Tverdogo Tela*, **5**: 126-134.
- Rabotnov, Ju. N. (1969). *Creep problems in structural members* (Vol. 7). North-Holland Pub. Co.
- Ren, F., Nah, J. W., Tu, K. N., Xiong, B., Xu, L., & Pang, J. H. (2006). Electromigration induced ductile-to-brittle transition in lead-free solder joints. *Applied physics letters*, *89*(14), 141914.
- Roh, J. H., Seo, J. J., Hong, S. T., Kim, M. J., Han, H. N., & Roth, J. T. (2014). The mechanical behavior of 5052-H32 aluminum alloys under a pulsed electric current. *International Journal of Plasticity*, *58*, 84-99.

Ross, C. D., Irvin, D. B., & Roth, J. T. (2007). Manufacturing aspects relating to the effects of direct current on the tensile properties of metals. *Journal of engineering materials and technology*, 129(2), 342-347.

Rusinko, A. (2008). Bases and advances of the synthetic theory of irreversible deformation, *XXII International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM) 25-29 August 2008, Adelaide, Australia*.

Rusinko, A. (2009). Plastic-creep deformation interrelation. *7th EUROMECH Solid Mechanics Conference 7-11 September 2009, Lisbon, Portugal*, pp. 49-50.

Rusinko, A. (2010). Creep deformation in terms of synthetic theory. *Advances and Applications in Mechanical Engineering and Technology*, 1: 69-108.

Rusinko, A. (2011). The modeling of Haazen-Kelly's effect in terms of the synthetic theory of irreversible deformation. In *9th International Congress on Thermal Stresses, June 5-9, 2011, Budapest, Hungary*, paper TS2011_1295597075.

Rusinko, A. (2011). Phase transformation strain in terms of the synthetic theory. In *2011 World Congress on Engineering and Technology (CET2011), 2011 International Conference on Material Sciences and Technology (MST2011), Oct. 28. - Nov. 2, 2011, Shanghai, China*, pp. 161-164.

Rusinko, A. (2014). Feigen's Phenomenon in Terms of the Synthetic Theory. *International Journal of Engineering Research and Applications*, 4: 172-180.

Rusinko, A. (2014). Influence of preliminary ultrasonic treatment upon the steady-state creep of metals of different stacking fault energies. *Ultrasonics*, 54: 90-98.

Rusinko, A. (2015). Irrecoverable deformation of tin in terms of the synthetic theory. *Materials Science and Engineering: A*, 631: 97-103.

Rusinko, A. (2015). Peculiarities of permanent deformation of tin: ordinary loading conditions and effect of DC. *9th European Solid Mechanics Conference*, July 6-10, 2015, Madrid, Spain.

Rusinko, A. (2016). Modeling the effect of DC on the creep of metals in terms of the synthetic theory of irrecoverable deformation. *Mechanics of Materials*, 93: 163-167.

Rusinko, A., & Fenyvesi, D. (2014). On the Advantages of the Theories of Plasticity with Singular Loading Surface. *Journal of Materials Science and Chemical Engineering*, 2: 14.

Rusinko, A., & Rusinko, K. (2009). Synthetic theory of irreversible deformation in the context of fundamental bases of plasticity. *Mechanics of Materials*, 41: 106-120.

Rusinko, A., & Rusinko, K. (2011). *Plasticity and Creep of Metals*. Springer Science & Business Media.

Rusinko, K. N. (1981). *Theory of Plasticity and Nonsteady Creep*. Vyshcha Shkola, Lviv.

Rusinko, K. N. (1986). *Specific Features of Inelastic Deformation of Solid Bodies*. Vyshcha Shkola, Lviv.

Rusinko, K. N., & Andrusik, Y. F. (1993). Plastic deformation of a strain-hardening material under loading in the three-dimensional subspace of the five-dimensional space of plastic deviators. *Izv. Ross. Akad. Nauk, Mekh. Tverd. Tela*, 2: 92-101.

Sanders Jr., J.L. (1954) Plastic Stress-Strain Relations Based on Linear Loading Functions. *Proceedings of the Second USA National Congress of Applied Mechanics*, Ann Arbor, 14-18 June 1954, 455-460.

Shao, S. S., Yang, F., & Xuan, F. Z. (2012). Effect of electromigration on diffusional creep in polycrystalline materials. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, 40(2), 165-171.

Su, F., Mao, R., Wang, X., Wang, G., & Pan, H. (2011). Creep behaviour of Sn–3.8 Ag–0.7 Cu under the effect of electromigration: Experiments and modelling. *Microelectronics Reliability*, 51(5), 1020-1024.

Suh, S. H., Cohen, J. B., & Weertman, J. (1983). X-ray diffraction study of subgrain misorientation during high temperature creep of tin single crystals. *Metallurgical Transactions A*, 14(1), 117-126.

Troitskiy, O. A., 1969, "Electromechanical Effect in Metals," *Zh. Eksp. Teor. Fiz. Pizma Red.*, 10, p. 18.

Xu, Z. S., & Chen, Y. X. (1988). Effect of electric current on the recrystallization behavior of cold worked α -Ti. *Scripta Metallurgica*, 22(2), 187-190.

Xuan, F. Z., Shao, S. S., & Chen, Q. Q. (2011). Synthesis creep behavior of Sn63Pb37 under the applied stress and electric current. *Microelectronics Reliability*, 51(12), 2336-2340.

Yang, F., & Zhao, G. (2010). Effect of electric current on nanoindentation of copper. *Nanoscience and Nanotechnology Letters*, 2(4), 322-326.

Yang, H., Huang, L., & Zhan, M. (2011). Hot forming characteristics of magnesium alloy AZ31 and three-dimensional FE modelling and simulation of the hot splitting spinning process. *Magnesium Alloys-Design, Processing and Properties*, 367-388.

Zhao, G., Liu, M., & Yang, F. (2012). The effect of an electric current on the nanoindentation behavior of tin. *Acta Materialia*, 60(9), 3773-3782.

Zhao, G.F., Yang, F.Q. (2012). *Appl. Phys. A—Mater. Sci. Process.* 109, 553–559.

Zhao, G., Yang, F. (2014). Effect of DC current on tensile creep of pure tin. *Materials Science and Engineering: A*, 591, 97-104.

A szerző tézispontokhoz kapcsolódó publikációi

- [1] Varga, P., & Rusinko, A. (2018, April). Modeling the effects of imposed current on the creep of SAC305 solder material. In *2018 19th International Conference on Thermal, Mechanical and Multi-Physics Simulation and Experiments in Microelectronics and Microsystems (EuroSimE)* (pp. 1-4). IEEE.
- [2] Rusinko, A., & Varga, P. (2019). Modelling of the plastic deformation and primary creep of metals coupled with DC in terms of the synthetic theory of irrecoverable deformation. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, **23**(1), 23-33.
- [3] Rusinko, A., & Varga, P. (2019). Analytical Description of the Steady-State Creep of Metals in the Presence of Direct Current. *Acta Polytechnica Hungarica*, **16**(7), 185-196.
- [4] Rusinko, A., & Varga, P. (2019). Loading surface in the plastic and creep straining coupled with direct current. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **58**(1), 195-207.
- [5] Ruszinkó, E., & Varga, P. (2019). A keményedési felület fejlődése irreverzibilis alakváltozás során, átfolyó egyenáram jelenlétében. *11. Mérnöki Szimpózium a Bánkin (ESB 2019)*. (elfogadva)

A szerző egyéb publikációi

- [1] Szabó, P. J., Varga P. (2009). Mechanikus és termikus kezelések hatása réz próbatestek szemcsehatárainak tulajdonságaira. *Fiatal Műszakiak Tudományos Ülésszaka XIV.*, 2009, 205-208.
- [2] Szabó P. J., Varga P. (2009). CSL szemcsehatárok vizsgálata technikai tisztaságú réz próbatestekben. *Gépész, Mechatronikai és Biztonságttechnikai Szimpózium BMF-BGK, 2009*, ISBN 978-963-7154-99-7.
- [3] Réger, M., Verő, B., Kardos, I., Varga, P. (2010). The Effect of Alloying Elements on the Stability of Centerline Segregation. *Defect and Diffusion Forum, Vols 297-301*, 148-153.
- [4] Szabó, P. J., Varga, P. (2010). Mechanical and thermal treatments influencing the grain boundary character distribution. *Hungarian Journal of Industrial Chemistry, Vol 38(2)*, 197-200.
- [5] Mucsi A., Borossay B., Horváth L., Varga P. (2010). Termikusan aktivált folyamatok modellezésének új lehetőségei. *Gép, Vol LXI.*, 2010/8, 16-18.
- [6] Varga P., Szabó P. J. (2011). Többlépéses képlékenyalakítási-hőkezelési stratégiák során kialakuló mikroszerkezet jellemzése. *International Engineering Symposium at Bánki (IESB 2011)*, ISBN 978-615-5018-15-2
- [7] Gonda V., Varga P., Réger M., Verő B. (2012). A keménység változása könyöksajtolás közben nagy tisztaságú réz alapanyagban. *XIV. Képlékenyalakító Konferencia*, 174-179.
- [8] Gonda V., Varga P. (2012). Intenzív képlékenyalakító eljárások és a könyöksajtolás. *International Engineering Symposium at Bánki (IESB 2012)*, ISBN 978-615-5018-35-0
- [9] Bagyinszky, Gy., Berecz, T., Dobránszky, J., Kovács-Coskun, T., Szabó, P. J., Mészáros, I., Nagyné, H. E., Pinke, P., Szakál, Z., Varga, P., et al. (2012). *Anyagtudomány*. Typotex Kiadó
- [10] Varga, P., Szabó, P. J., (2013). On the effects of mechanical and thermal treatment strategies regarding the grain boundary structure of polycrystalline copper. *Materials Science Forum, Vol 729*, 503-508.
- [11] Varga P. (2014). Technológiai paraméterek hatása a kialakuló szemcsehatár szerkezetre. *Fiatal Műszakiak Tudományos Ülésszaka XIX.*, 2014, 449-452.
- [12] Varga P., Gonda V., Rác P. (2015). Taylor teszt modellezése a Johnson-Cook anyagmodell alkalmazásával: a hőmérséklet hatása. *Fiatal Műszakiak Tudományos Ülésszaka XX.*, 2015, 327-330.
- [13] Varga P., Horváth R., Oláh F., Lozsek M. (2016). Fajlagos forgácsoló erő szerkezetfüggősége. *Fiatal Műszakiak Tudományos Ülésszaka XXI.*, 2016, 433-436.

[14] Mucsi, A., Varga, P. (2016). Evaluation of Differences in the Estimated Recrystallized Volume Using Different Methods Based on EBSD Data. *Topics in Intelligent Engineering and Informatics, Vol 12 (2016)*, 101-111.

Mellékletek

1. Keményedési felület fejlődése primer kúszás során

```
R=20;
N=100;
M=25;
B=0.7;
p=0.15;
tt=100;
tM=25;
v=0.9;
for time=linspace(0,tt,100)
    if time <= tM
        ITR=(B*v/p)*(1-exp(-p*time));
        S=v*time;
    else
        ITR=(B*v/p)*(exp(p*tM)-1).*exp(-p*time);
        S=v*tM;
    end
    end
    quiver(0,0,S,0,'LineWidth',2,'MaxHeadSize',0.2,'AutoscaleFactor',1);
    hold on
    for b=linspace(-pi/2,pi/2,N)
        if S*cos(b) < R+ITR*cos(b)
            x0=(R+ITR.*cos(b)).*cos(b);
            y0=(R+ITR.*cos(b)).*sin(b);
            p1=-sin(b);
            p2=cos(b);
            t=linspace(-M,M)';
            x=p1*t+x0;
            y=p2*t+y0;
            plot(x,y,'b','LineWidth',1);
            hold on;
        else
            x0=S-S.*sin(b).*sin(b);
            y0=S.*cos(b).*sin(b);
            p1=-sin(b);
            p2=cos(b);
            x=p1*t+x0;
            y=p2*t+y0;
            plot(x,y,'r','LineWidth',2);
            hold on;
        end
    end
end
for b=linspace(pi/2,3*pi/2,N)
```

```
x02=R*cos(b);
y02=R*sin(b);
p1=-sin(b);
p2=cos(b);
t=linspace(-M,M)';
x2=p1*t+x02;
y2=p2*t+y02;
plot(x2,y2,'b','LineWidth',1);
hold on;
    end
hold off
pause(0.001)
end
```

2. Keményedési felület fejlődése képlékeny alakváltozás során és áramimpulzus hatására

```
R=20;
for S=linspace(0,1.75*R,50)
bu=acos(R/S);
N=100;
M=40;
quiver(0,0,S,0,'LineWidth',2,'MaxHeadSize',0.2,'AutoscaleFactor',1);
hold on
for b=linspace(0,2*pi,N)
    if S*cos(b) < R
        x0=R*cos(b);
        y0=R*sin(b);
        p1=-sin(b);
        p2=cos(b);
        t=linspace(-M,M)';
        x=p1*t+x0;
        y=p2*t+y0;
        plot(x,y,'b','LineWidth',1);
        hold on;
    else
        x0=S-S.*sin(b).*sin(b);
        y0=S.*cos(b).*sin(b);
        p1=-sin(b);
        p2=cos(b);
        x=p1*t+x0;
        y=p2*t+y0;
        plot(x,y,'r','LineWidth',2);
        hold on;
    end
end
hold off
pause(0.001)
end
hold off
R=15;
S=R/cos(bu);
quiver(0,0,S,0,'LineWidth',2,'MaxHeadSize',0.2,'AutoscaleFactor',1);
hold on
for b=linspace(0,2*pi,N)
    if S*cos(b) < R
        x0=R*cos(b);
        y0=R*sin(b);
        p1=-sin(b);
        p2=cos(b);
        t=linspace(-M,M)';
        x=p1*t+x0;
        y=p2*t+y0;
        plot(x,y,'b','LineWidth',1);
        hold on;
    else
```

```
x0=S-S.*sin(b).*sin(b);
y0=S.*cos(b).*sin(b);
p1=-sin(b);
p2=cos(b);
x=p1*t+x0;
y=p2*t+y0;
plot(x,y,'r','LineWidth',2);
hold on;
    end
end
```