Óbudai Egyetem

Doktori (PhD) értekezés

tézisfüzete

Speciális határeloszlás-tételek a valószínűségszámításban

Készítette:

Túri József Attila

okl. matematikus

Témavezető:

Prof. Dr. Fazekas István

egyetemi tanár

Alkalmazott Informatikai és Alkalmazott Matematikai Doktori Iskola

Budapest

2016

Tartalomjegyzék

1. A kutatás előzményei

A dolgozatban túlnyomórészt majdnem biztos határeloszlás-tételeket állítunk és bizonyítunk bizonyos, a dolgozatban ismertetésre kerülő valószínűségi változók sorozatára, illetve folyamatokra.

A majdnem biztos határeloszlás-tételek kialakulása Gunnar Arnvid Brosamler [13] és Peter Schatte [64] nevéhez fűződik, akik 1988-ban egymástól függetlenül publikálták az ezzel kapcsolatos eredményeiket[1].

A két szerző megállapította, hogy *igaz a következő*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \mathbb{I}_{]-\infty,x[} \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) = \Phi(x)$$

összefüggés majdnem biztosan[2] *minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén, ahol* S_n *jelöli a* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *független, azonos eloszlású valószínűségi változók részletösszegeit, azaz* $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$*, továbbá* $\mathbb{E}\xi_1 = 0$*,* $\mathbb{D}\xi_1^2 = 1$ *és feltételezzük, hogy* $\mathbb{E}|\xi_1|^{2+\delta} < \infty$*, ahol* $\mathbb{I}_{]-\infty,x[}$ *jelöli a* $]-\infty, x[$ *halmaz indikátorfüggvényét, továbbá* Φ *a sztenderd normális eloszlásfüggvényt.*

Brosamler, illetve Schatte eredményeinek ismertté válása után egyre több eredmény született a témakörrel kapcsolatban.

Major Péter [50], [51] eredményei a majdnem biztos határeloszlás-tételek mélyebb alapjaira és összefüggéseire világítottak rá.

Fontos mérföldkő volt a Berkes István és Csáki Endre által publikált eredmény [7]. A cikkben[3] Berkes és Csáki belátta, hogy *ha* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *független valószínűségi változók,* $f_k \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *mérhető függvények és feltesszük, hogy minden* $1 \le k < l$ *esetén létezik egy* $f_{k,l} \colon \mathbb{R}^{l-k} \to \mathbb{R}$ *mérhető függvény úgy, hogy*

$$\mathbb{E}(|f_l(\xi_1, \ldots, \xi_l) - f_{k,l}(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_l)| \wedge 1) \le C(\log_+ \log_+ (c_l/c_k))^{-(1+\varepsilon)}$$

valamely $C > 0$ *és* $\varepsilon > 0$ *estén, továbbá* $(c_n)_{n\ge 1}$ *olyan pozitív, nemcsökkenő sorozat, amelyre*

[1] A két szerző eredménye annyiban különbözik egymástól, hogy Brosamler a $(2+\delta)$-ik $(\delta > 0)$ momentumok végességét tételezte fel, míg Schatte a 3. momentumok végességéből indult ki, azaz nála $\delta = 1$ volt.

[2] Amikor a "majdnem mindenütti konvergencia" vagy a "majdnem biztos konvergencia" kifejezést használjuk, akkor – ha csak mást nem mondunk – a háttérben álló $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező $\mathbb{P}$ valószínűségi mértéke szerint értjük a majdnem biztos (majdnem mindenütti) konvergenciát, esetenként a "$\mathbb{P}$-majdnem minden $\omega \in \Omega$" vagy a "$\mathbb{P}$-majdnem biztosan" jelölés helyett csak a "majdnem minden $\omega \in \Omega$" vagy egyszerűen csak a "majdnem mindenütt", illetve a "majdnem biztosan" kifejezést használjuk.

[3] A cikkben több fontos tétel található a témakörrel kapcsolatban mi azonban csak fenti tételt idézzük terjedelmi korlátok miatt.

fennáll, hogy $c_n \to \infty$, $c_{n+1}/c_n = O(1)$ *és*

$$d_k = \log(c_{k+1}/c_k), \quad D_n = \sum_{k \le n} d_k,$$

akkor bármely G *eloszlásfüggvény esetén a*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{D_N} \sum_{k\le N} d_k \mathbb{I}(f_k(\xi_1, \ldots, \xi_k) < x) = G(x) \quad \textit{majdnem biztosan}$$

bármely $x \in C_G$ *esetén és a*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{D_N} \sum_{k\le N} d_k \mathbb{P}(f_k(\xi_1, \ldots, \xi_k) < x) = G(x)$$

bármely $x \in C_G$ *esetén állítások ekvivalensek, ahol* C_G *jelöli a* G *folytonossági pontjainak a halmazát. Az eredmény akkor is érvényben marad, ha a* $(d_n)_{n\ge1}$ *sorozatot tetszőlegesen olyan* $(d_n^*)_{n\ge1}$ *sorozattal helyettesítjük, amelyre fennáll, hogy* $0 \le d_k^* \le d_k$ *minden* $k \in \mathbb{N}$ *esetén és* $\sum d_k^* = \infty$.

A Berkes-Csáki publikációban az ismertetésre kerülő tételeknek több alkalmazása is bemutatásra kerül (például a részletösszegek, a szélsőértékek, az empirikus eloszlásfüggvény, a visszatérési idők, illetve a Darling-Erdős tipusú határértéktételek majdnem biztos verziói).

A következő fontos és általunk felhasznált eredmény a Fazekas-Rychlik publikáció [32]. A szerzők az általános fázisterű esetet vizsgálják: felteszik a fázistérről, hogy teljes szeparábilis metrikus tér. Cikkük általánosítása az [7] eredménynek. Megjegyezzük, hogy bár a [32] publikációban szereplő eredmény formálisan hasonló a Berkes-Csáki cikkben leírtakhoz – a bizonyítása is a [7]-ben alkalmazott technikát követi – felhasználhatósága az alkalmazásokban – köszönhetően az általánosításnak – rendkívül sokoldalú (lásd például a [74], [73] eredményeket).

A majdnem biztos határeloszlás-tételek egy további általánosítását jelenti a Fazekas és Rychlik mezőkre vonatkozó eredménye [33]: a szerzők mezőkre általánosítják a [32]-beli eredményeket. Megjegyzendő, hogy a [33]-ban foglalt eredmény korántsem triviális következménye a [32]-ben foglaltaknak, hiszen a majdnem biztos konvergencia nem metrizálható.

2. Célkitűzések

A kutatás célja különböző majdnem biztos határeloszlás-tételek bemutatása és természetesen bizonyítása[4].

Célunk volt az $L^p(]0,1[), 1 \leq p < \infty$ térben bizonyítani a majdnem biztos Donsker-tételt, illetve hasonló állítást bizonyítani az empirikus folyamatra [73].

Célkitűzésünk közt szerepelt a többindexes Donsker-tétel bizonyítása az $L^p(]0,1[^d), 1 \leq p < \infty$ térben és ugyanebben a térben hasonló állításokat bizonyítani a többindexes empirikus folyamatról [72].

Célunk volt integrál alakú konvergenciák bizonyítása is: majdnem biztos határeloszlás-tételt mondunk ki a Poisson-eloszláshoz, majd a normális eloszláshoz bizonyos folyamatokról [71].

A kutatás során a célkitűzések között szerepelt, hogy bizonyos folyamatokról bizonyítsuk, hogy fennáll velük kapcsolatban a majdnem biztos határeloszlás-tétel, a határeloszlás pedig p-stabilis eloszlást követ. Megjegyezzük, hogy a p-stabilis eloszláshoz való majdnem biztos határeloszlás-tétel bizonyításához be kellett látni egy bizonyos tételt is a momentumok végességéről [70].

Célkitűzésünk közt szerepelt az érmefeldobások (mind a szabályos, mind a szabálytalan érmék esetén) során kialakuló szériák vizsgálata: ezzel kapcsolatban sikerült kimondanunk határeloszlás tételeket és majdnem biztos határeloszlás-tételeket is [69].

Célunk volt a véletlen elhelyezések vizsgálata is: több ezzel kapcsolatos majdnem biztos határeloszlás-tétel kerül kimondásra, továbbá itt is megfogalmazunk és bizonyítunk egy egyenlőtlenséget, amelyre szükségünk volt a majdnem biztos határeloszlás-tételek bizonyításához [30].

Célkitűzésünk volt a véletlen elhelyezések folyamatának vizsgálata is: itt egy határérték-tételt mondunk ki és bizonyítunk [34].

A kutatás során a célkitűzések között szerepelt továbbá a különböző majdnem biztos határeloszlás-tételek közötti összefüggések áttekintése: megvizsgáltuk, hogy milyen összefüggés áll fenn a Berkes-Csáki által publikált eredmény [7], Fazekas-Rychlik tétele [32], illetőleg a legelső idevonatkozó Brosamler [13] és Schatte [64] eredmény között.

[4] A legtöbb kimondott és bizonyított tétel majdnem biztos határeloszlás-tétel, néhány esettől eltekintve. Ezenkívül olyan tételek is kimondásra kerülnek, amelyek segítségével történik a majdnem biztos határeloszlás-tételek bizonyítása.

3. Új tudományos eredmények

Ebben a részben téziscsoportokba rendezve ismertetjük az új tudományos eredményeket. Egy-egy téziscsoportba szedtük azokat a téziseket, amelyek összetartozónak tekinthetők.

3.1. Első téziscsoport

Az első téziscsoportban az $L^p(]0,1[)$ $(1 \leq p < \infty)$ térben két folyamatot vizsgáltunk és mindkettővel kapcsolatban sikerült bizonyítanunk majdnem biztos határeloszlás-tételt (Túri, [73]).

Az első folyamatot[5] az alábbi módon

$$Y_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k \leq [tn]} \xi_k \tag{3.1}$$

definiáltuk, ahol $S_0 = 0$, $S_k = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_k$, $k \geq 1$ és $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású, valós értékű valószínűségi változók úgy, hogy $\mathbb{E}\xi_1 = 0$, $\mathbb{D}^2\xi_1 = \sigma^2$ és $\mathbb{E}|\xi_1|^p < \infty$, ahol $1 \leq p < \infty$. Itt is $[.]$ jelöli az egészrészfüggvényt.

Az első tézis a (3.1) folyamattal kapcsolatban fogalmaz meg majdnem biztos határeloszlás-tételt (Túri, [73], Theorem 2.1).

1. tézis. *Tegyük fel, hogy $1 \leq p < \infty$. Ekkor fennáll az alábbi*

$$\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \delta_{Y_k(.,\omega)} \Rightarrow \mu_W$$

konvergencia $n \to \infty$ esetén $\mathbb{P}$-majdnem minden $\omega \in \Omega$-ra az $L^p(]0,1[)$ térben, ahol W a sztenderd Wiener-folyamat és μ_W-vel jelöltük annak eloszlását,[6] *továbbá $Y_k(t,\omega) = Y_k(t)$ a (3.1)-ben definiált folyamat, ahol δ_x jelöli az $x \in \mathbb{R}$ pontra koncentrált eloszlást.*[7]

□

[5] A folyamatoknál általában külön nem jelezzük a véletlentől való függésüket, azaz eltekintünk az $X_n(t,\omega)$ ($\omega \in \Omega$, ahol $(\Omega, A, \mathbb{P})$ a háttérben álló valószínűségi mező), írásmódtól, helyette az esetek nagy részében az $X_n(t)$ egyszerűsített jelöléssel élünk.

[6] Többször μ_ξ-vel jelöljük a ξ valószínűségi változó eloszlását.

[7] Az egy pontra koncentrált eloszlás jelentése: $\delta_x(B) = 1$, ha $x \in B$ és $\delta_x(B) = 0$, ha $x \notin B$ bármely M-beli B Borel-halmaz esetén.

A másik folyamatot az alábbi módon

$$Z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i) - t) \tag{3.2}$$

definiáljuk, ahol az U_i-k ($i = 1, 2, \dots$) független, a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók.

A második tézis majdnem biztos határeloszlás-tételt fogalmaz meg a (3.2) folyamattal kapcsolatban (Túri, [73], Theorem 3.1).

2. tézis. *Tegyük fel, hogy $1 \le p < \infty$. Ekkor fennáll az alábbi*

$$\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \delta_{Z_{k(.,\omega)}} \Rightarrow \mu_B,$$

konvergencia $n \to \infty$ esetén $\mathbb{P}$-majdnem biztosan az $L^p(]0, 1[)$ térben, ahol B a Brown-híd és $Z_k(t, \omega) = Z_k(t)$ a (3.2)-ben definiált folyamat.

□

Tehát ebben a téziscsoportban az $Y_n(t)$ sztenderd Wiener-folyamathoz, illetve a $Z_n(t)$ Brown-hídhoz való konvergenciájáról állítunk majdnem biztos határeloszlás-tételt (majdnem biztos Donsker-tétel[8], illetve hasonló eredmény az empirikus folyamatra).

3.2. Második téziscsoport

A második téziscsoportba tartozó állítások hasonlóak az első téziscsoportban kimondottakhoz, azonban itt már az $L^p([0, 1]^d), (1 \le p < \infty)$ térben mondjuk ki az idevonatkozó majdnem biztos határeloszlás-tételeket (Túri, [72]).

Legyenek $\xi_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$ többindexes, független, azonos eloszlású valószínűségi változók úgy, hogy $\mathbb{E}\xi_{\mathbf{k}} = 0$ és $\mathbb{D}^2\xi_{\mathbf{k}} = 1$. Az $Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})$ folyamatot definiáljuk az alábbi módon:

$$Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{k} \le [\mathbf{nt}]} \xi_{\mathbf{k}}, \tag{3.3}$$

ahol $\mathbf{t} \in [0, 1]^d$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$.

A harmadik tézis majdnem biztos határeloszlás-tételt fogalmaz meg a (3.3) folyamattal kapcsolatban (Túri, [72], Theorem 2.1).

3. tézis. *Tegyük fel, hogy $1 \le p < \infty$. Legyen $Y_{\mathbf{k}}(\mathbf{t}, \omega) = Y_{\mathbf{k}}(\mathbf{t})$. Ekkor*

$$\frac{1}{|\log \mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{k}|} \delta_{Y_{\mathbf{k}}}(., \omega) \Rightarrow \mu_W$$

az $L^p([0, 1]^d)$ térben, ha $\mathbf{n} \to \infty$ $\mathbb{P}$-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén, ahol W-vel jelöltük a d-paraméterű sztenderd Wiener-folyamatot.

[8]Monroe D. Donsker nevéhez fűződik a központi határoloszlás tétel funkcionális alakjának bevezetése, illetve bizonyítása [21], amelyre Donsker-féle invariancia törvényként vagy funkcionális határeloszlás-tételként is szoktak hivatkozni.

□

Tekintsük az alábbi

$$Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{i} \le \mathbf{n}} (\mathbb{I}\{\mathbf{U_i} \le \mathbf{t}\} - |\mathbf{t}|), \quad \text{ha } \mathbf{t} \in [0,1]^d \tag{3.4}$$

folyamatot, ahol a $d, h \in \mathbb{N}$ rögzítettek, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^h$, $\mathbf{U_i}$, $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^h$ független, egyenletes eloszlású valószínűségi változók a $[0,1]^d$ d-dimenziós kockán.

A fenti empirikus folyamattal kapcsolatban kimondhatjuk a következő tézist (Túri, [72], Theorem 3.1).

4. tézis. *Tegyük fel, hogy $1 \le p < \infty$ és legyen $Z_{\mathbf{k}}(\mathbf{t})$ a (3.4)-ben definiált empirikus folyamat. Ekkor fennáll a*

$$\frac{1}{|\log \mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{i} \le \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{k}|} \delta_{Z_{\mathbf{k}}(.,\omega)} \Rightarrow \mu_B$$

konvergencia az $L^p([0,1]^d)$ térben $\mathbf{n} \to \infty$ esetén $\mathbb{P}$-majdnem minden $\omega \in \Omega$-ra, ahol B-vel jelöltük a d-paraméterű Brown-hídat.

□

Megjegyezzük, hogy az 1. téziscsoportban leírtak következnek a 2. téziscsoportban ismertetésre került eredményekből, azonban az időrendet tekintve a kutatás során először az 1. téziscsoport eredményei adódtak (Túri, [74], [73]), majd a további vizsgálódások után születettek meg a 2. téziscsoportban ismertetésre kerülő eredmények (Túri, [72]).

3.3. Harmadik téziscsoport

A harmadik téziscsoportban majdnem biztos határeloszlás-tételek integrál alakú verziói kerülnek bemutatásra, ahol a határfolyamat Poisson-, illetve normális eloszlást követ. Az eredmények Túri [71]-ben megjelent publikációján alapulnak.

Először a

$$\xi'(t) = \sum_{i=1}^{[t]} \mathbb{I}_{[0,\frac{1}{t}]}(\xi_i) \tag{3.5}$$

folyamatot vizsgáljuk, illetve annak transzformáltjával kapcsolatban mondunk ki majdnem biztos határeloszlás-tételt, ahol a ξ_i, $i \in \mathbb{N}$ független, egyenletes eloszlású valószínűségi változók a $[0,1]$ intervallumon.

A (3.5) folyamatra vonatkozó majdnem biztos határeloszlás-tétel a következőkben kerül kimondásra (Túri, [71], Theorem 2.1.).

5. tézis. *Legyen az $f(t), t \geq 1$ olyan függvény, amelyre teljesül, hogy az*

$$\frac{f(t)}{t^{\beta}}$$

módon definiált függvény monoton növekvő valamely $\beta > 0$ esetén és a $\xi(t)$ folyamatot a $\xi(t) = \xi'(f(t))$, $1 \leq t$ módon határozzuk meg, akkor fennáll a

$$\frac{1}{\log(T)} \int_1^T \delta_{\xi(t,\omega)} \frac{dt}{t} \xrightarrow{w} \mu_{\pi}, \quad \text{ha } T \to \infty$$

konvergencia $\mathbb{P}$-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén, ahol π-vel jelöltük a sztenderd (azaz $\mathbb{E}\pi = 1$) Poisson valószínűségi változót.

□

Definiáljuk a

$$\frac{V(f(t))}{(f(t))^{1/2}}, \quad \text{ha } 0 \leq t \tag{3.6}$$

folyamatot, ahol a $V(t)$ egy centrált, homogén, független növekményű, véges varianciájú folyamat az f függvény pedig ugyanazon tulajdonságú, mint az 5. tézisben.

Ezzel kapcsolatban megfogalmazzuk az alábbi állítást (Túri, [71], Theorem 3.1.).

6. tézis. *Fennáll az*

$$\frac{1}{\log(T)} \int_1^T \delta_{\frac{V(f(t),\omega)}{\sqrt{f(t)}}} \frac{dt}{t} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, K(\infty)), \quad \text{ha } T \to \infty$$

konvergencia $\mathbb{P}$-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén, ahol $K(t)$ a Kolmogorov-reprezentációban szereplő monoton növekvő, korlátos függvény úgy, hogy fennáll a $K(-\infty) = 0$ egyenlőség, továbbá $\mathcal{N}(0, K(\infty))$-nel jelöltük a 0 várható értékű és $K(\infty)$ szórásnégyzetű normális eloszlást.

□

3.4. Negyedik téziscsoport

A negyedik téziscsoportban két tézis kerül bemutatásra (Túri, [70]). A hetedik tézis egy állítás a momentumok végességéről, amelyre szükségünk van a nyolcadik tézis bizonyításánál.

Először tekintsük a momentumok végességéről szóló tézist (Túri, [70], Theorem 2.1.).

7. tézis. *Legyen B egy valós, szeparábilis Banach-tér a $\|.\|$ normával ellátva, legyen továbbá $\mathcal{B}$ a B halmaz Borel-halmazaiból álló σ-algebra. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, azonos eloszlású B-értékű valószínűségi változók, legyen továbbá $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n = 1, 2, \dots$. Tekintsünk egy $a_1, a_2, \dots$ monoton növekvő, pozitív, valós számsorozatot és legyen $\alpha \in]0, 2]$ rögzített.*

Tegyük fel, hogy fennáll az alábbi

$$\frac{a_{nm}}{a_n} \leq C m^{\frac{1}{\alpha}+\tau_n} \tag{3.7}$$

összefüggés, ahol $(\tau_n)_{n\geq 1}$ egy nemnegatív egész számokból álló sorozat úgy, hogy $\lim_{n\to\infty} \tau_n = 0$.

Tegyük fel továbbá, hogy bármely $\beta \in]0, \alpha[$ esetén fennáll, hogy

$$\mathbb{E}\|\xi_n\|^{\beta} < \infty. \tag{3.8}$$

Legyen az $(a_{l_n})_{n\geq 1}$ az $(a_n)_{n\geq 1}$ olyan részsorozata, amelyre valamely $c < \infty$ esetén fennáll, hogy $a_{l_n} \leq c a_{l_{n-1}}, n = 1, 2, \dots,$ a $(b_n)_{n\geq 1}$ pedig egy olyan B értékű sorozat, amelyre a

$$\left(\frac{S_{l_n}}{a_{l_n}} - b_{l_n}\right)_{n\geq 1} \tag{3.9}$$

sztochasztikusan korlátos.

Ekkor bármely $\beta \in]0, \alpha[$ esetén fennáll a

$$\sup_n \mathbb{E}\left\|\frac{S_{l_n}}{a_{l_n}} - b_{l_n}\right\|^{\beta} < \infty \tag{3.10}$$

összefüggés.

□

Tekintsük a $V(t), t \geq 0$ független, stacionárius növekményű folyamatot és tegyük fel, hogy $V(0) = 0$, a $\{V(t, \omega) : t \geq 0, \omega \in \Omega\}$ halmaz mérhető, a $V(t)$ trajektóriái jobbról folytonosak és létezik a baloldali határértékük.

Ekkor a Lévy-formulát felhasználva (Gnedenko-Kolmogorov, [37]) a $V(t)$ karakterisztikus függvénye az alábbi

$$\begin{aligned} \varphi_{V(t)}(x) &= \mathbb{E}\left(e^{ixV(t)}\right) = \psi\left(t, x, b, \sigma^2, L(y), R(y)\right) = \qquad (3.11) \\ &= \exp\left(t\left\{ibx - \frac{\sigma^2}{2}x^2 + \int_{-\infty}^{0}\left(e^{ixy} - 1 - \frac{ixy}{1+y^2}\right)dL(y) + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \int_0^{\infty}\left(e^{ixy} - 1 - \frac{ixy}{1+y^2}\right)dR(y)\right\}\right), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

alakú, ahol $L(y)$ balról folytonos, monoton növekvő, a $]-\infty, 0[$-án úgy, hogy $L(-\infty) = 0$, $R(y)$ jobbról folytonos és monoton növekvő a $]0, \infty[$ intervallumon, továbbá $R(\infty) = 0$ és $L(y)$, illetve $R(y)$ kielégítik az $\int_{-\varepsilon}^{0} y^2 dL(y) + \int_0^{\varepsilon} y^2 dR(y) < \infty$ összefüggést bármely $\varepsilon > 0$ esetén.

Tekintsük az alábbi

$$\xi(t) = \frac{V(f(t))}{A(t)} - B(t), \quad 0 < t < \infty \tag{3.12}$$

folyamatot, ahol $f\colon [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty[$ egy rögzített, szigorúan monoton növekvő függvény, az $A\colon [0,\infty[\longrightarrow]0,\infty[$ szintén rögzített, pozitív függvény, továbbá a $B(t)$ folyamatot válasszuk meg úgy, hogy a $\xi(t)$ folyamat karakterisztikus függvénye az alábbi

$$\varphi_{\xi(t)}(x) = \psi(1,x,0,0,f(t)L(A(t)y), f(t)R(A(t)y)) =$$

$$\overline{\psi}(x, f(t)L(A(t)y), f(t)R(A(t)y)) \tag{3.13}$$

alakú legyen, ahol a $V(t)$ folyamatnál a $b = 0$ és a $\sigma = 0$ választással éltünk.

Ekkor

$$B(t) = \int_{-\infty}^{0} g(t,y)dL(y) + \int_{0}^{\infty} g(t,y)dR(y), \tag{3.14}$$

ahol

$$g(t,y) = \frac{f(t)}{A(t)} \frac{y^3}{(1+y^2)(1+y^2/A^2(t))} \left(1 - \frac{1}{A^2(t)}\right). \tag{3.15}$$

Ha az$f(x) \equiv x$ választással élünk, akkor a $\xi(t)$ folyamat karakterisztikus függvénye

$$\varphi_{\xi(t)}(x) = \overline{\psi}(x, tL(A(t)y), tR(A(t)y)) \tag{3.16}$$

alakú lesz.

Az $L(t)$, illetve az $R(t)$ függvényekről is felteszünk még néhány, az alábbiakban ismertetendő tulajdonságot, amely biztosítani fogja, hogy a később ismertetésre kerülő majdnem biztos határeloszlástételben szereplő eloszlás stabilis legyen.

Először legyen $0 < p < 2$. Tekintsük a $V(t)$ folyamat (3.11)-ben definiált Lévy-reprezentációját és tegyük fel, hogy az $L(y)$ és az $R(t)$ függvények kielégítik az

$$\frac{L(-t)}{|R(t)|} \to \frac{c_1}{c_2}, \quad \text{ha } t \to \infty \tag{3.17}$$

az

$$\frac{L(-t) + |R(t)|}{L(-tx) + |R(tx)|} \to x^p, \quad \text{ha } t \to \infty \tag{3.18}$$

és a

$$tL(-A(t)) \to c_1 > 0, \quad \text{ha } t \to \infty \tag{3.19}$$

összefüggéseket.

Most tételezzük fel, hogy $p = 2$. Ekkor tegyük fel, hogy fennállnak a

$$\frac{t^2(L(-t) - R(t))}{\int_{-t}^{0} x^2 dL(x) + \int_0^t x^2 dR(x)} \to 0, \quad \text{ha } t \to \infty \tag{3.20}$$

és a

$$t\left(\int_{-A(t)}^{0}\left(\frac{x}{A(t)}\right)^2 dL(x) + \int_0^{-A(t)}\left(\frac{x}{A(t)}\right)^2 dR(x)\right) \to 1, \quad \text{ha } t \to \infty \tag{3.21}$$

összefüggések.

Ezután kimondhatjuk az idevonatkozó majdnem biztos határeloszlás-tételt (Túri, [70], Theorem 3.1.).

8. tézis. *Tegyük fel, hogy a $\xi(t)$ folyamat karakterisztikus függvénye (3.16) alakú, tegyük fel továbbá, hogy $0 < p < 2$ esetén fennállnak a (3.17), (3.18) és a (3.19) feltételek, míg $p = 2$ esetén a (3.20) és a (3.21) tulajdonságok.*

Ekkor fennáll a

$$\frac{1}{\log(T)}\int_1^T \delta_{\xi(t,\omega)}\frac{dt}{t} \xrightarrow{w} \mu_Z, \quad \text{ha } T \to \infty$$

konvergencia majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén, ahol a Z egy p-stabilis valószínűséi változót jelöl jelöl: $p = 2$ esetén Z sztenderd normális eloszlást követ, míg $0 < p < 2$ esetén a Z eloszlása a V eloszlásával egyezik meg.[9]

□

3.5. Ötödik téziscsoport

Az ötödik téziscsoportban vizsgált problémák a pénzfeldobással kapcsolatosak: érmét dobunk fel egymás után[10] és az érmefeldobás során kialakuló leghosszabb tiszta szériák számát, illetve ezek határeloszlását vizsgáljuk. Az állítások egy részénél feltételezzük, hogy a pénzfeldobásnál használt érmék szabályosak (azaz $p = q = \frac{1}{2}$), majd később vizsgáljuk azt az esetet, amikor a feldobott érmék nem szabályosak (azaz $p \neq q$).

Jelöljük N-el azt, hogy hányszor dobunk az érmével.

[9] A V karakterisztikus függvénye $\varphi_V(x) = \bar{\psi}\left(x, \frac{c_1}{|y|^p}, -\frac{c_2}{y^p}\right)$ alakú.

[10] Mindezt formalizálva: tekintsük a $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változókat, ahol a $\{\xi_i = 1\}, i = 1, 2, \ldots$ azt az eseményt jelöli, hogy fejet dobunk, míg az $\{\xi_i = 0\}, i = 1, 2, \ldots$ azt az eseményt, hogy írást kapunk, továbbá legyen $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = p, i = 1, 2, \ldots$ és $\mathbb{P}(\xi_i = 0) = q = 1 - p, i = 1, 2, \ldots$. A téziscsoportban Log jelöli a $1/p$ alapú logaritmust (így természetesen szabályos érménél a kettes alapú logaritmust).

Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor a dobássorozatot szabályos érmével végezzük (azaz $p = q = \frac{1}{2}$).

Rögtön kimondhatjuk az alábbi eredményt (Túri, [69], Theorem 2.6.).

9. tézis. *Tegyük fel, hogy $N \to \infty$ és $n \to \infty$ úgy, hogy*

$$\frac{N}{2^{n+1}} \to \lambda > 0.$$

Ekkor fennáll az alábbi

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(\tilde{\xi}^*(n,N) = k) = \frac{e^{-2\lambda}(2\lambda)^k}{k!}$$

összefüggés, ahol $k = 0, 1, 2\ldots$, továbbá $\tilde{\xi}^*(n,N) = \tilde{\xi}^*(n,N,\omega)$ jelöli a legalább n hosszúságú diszjunkt tiszta fej vagy tiszta írás sorozatok számát.

□

A következő eredmény az n hosszúságú tiszta fej vagy tiszta írás sorozatok számával kapcsolatos (Túri, [69], Theorem 2.7.).

10. tézis. *Tegyük fel, hogy fennáll az $\frac{N}{2^{n+1}} \to \lambda > 0$ konvergencia $N \to \infty$ és $n \to \infty$ esetén.*

Ekkor a $\xi^*(n,N) = \xi^*(n,N,\omega)$ eloszlása konvergál az összetett Poisson-eloszláshoz,[11] azaz fennáll a

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}(z^{\xi^*(n,N)}) = \exp\left(2\lambda\left(\frac{(1-\frac{1}{2})z}{1-\frac{1}{2}z} - 1\right)\right)$$

összefüggés, ahol $\xi^*(n,N) = \xi^*(n,N,\omega)$ jelöli az n hosszúságú tiszta fej vagy tiszta írás sorozatok számát.

□

A tizenegyedik tézis az alábbi állítás (Túri, [69], Theorem 2.8.).

11. tézis. *Legyen $0 < x < \infty$. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\tau^*(n)}{2^{n+1}} \le x\right) = 1 - e^{-2x}$$

összefüggés, ahol $\tau^*(n)$ az a legkisebb dobásszám, amely esetén a dobássorozatban egy n hosszúságú tiszta fej vagy egy n hosszúságú tiszta írás szériát kapunk, azaz

$$\tau^*(n) = \min\{N \mid \xi^*(n,N) > 0\}.$$

□

[11] A ξ valószínűségi változó összetett Poisson-eloszlású, ha léteznek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók és egy tőlük független Poisson-eloszlású $N = N(\omega)$ valószínűségi változó úgy, hogy a ξ eloszlása megegyezik az $S_N = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_N$ összeg eloszlásával.

A tizenkettedik tézis a következő állítás (Túri, [69], Theorem 2.9.).

12. tézis. *bármely k egész esetén fennáll a*

$$\mathbb{P}(\mu^*(N) - [\mathrm{Log}(N-1)] < k) = \exp(-2^{-(k-\{\mathrm{Log}(N-1)\})}) + o(1)$$

összefüggés, ahol $\mu^*(N) = \mu^*(N,\omega)$*-val jelöltük a leghosszabb tiszta fej sorozatok vagy a leghosszabb tiszta írás sorozatok hosszát az N dobásból, azaz*

$$\mu^*(N) = \max\{n \mid \xi^*(n,N) > 0\}.$$

□

Az ezután következő téziseknél már feltételezzük, hogy a dobássorozat során feldobott érmék nem szabályosak (azaz $p \neq q$).

A tizenharmadik tézis a következő állítás (Túri, [69], Theorem 2.10.).

13. tézis. *Tegyük fel, hogy* $p > q$*. Ekkor bármely* $0 < x < \infty$ *esetén fennáll a*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\tau^*(n)qp^n \le x) = 1 - e^{-x}$$

összefüggés.

□

A tizennegyedik tézis majdnem biztos határeloszlás-tételt fogalmaz meg a leghosszabb szériával kapcsolatban (Túri, [69], Theorem 2.9.).

14. tézis. *Fennáll a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \mathbb{I}(\mu^*(i) - \mathrm{Log}\, i < t) = \begin{cases} \int_t^{t+1} \exp\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^y\right] dy, & ha \;\; p = \frac{1}{2} \\ \int_t^{t+1} \exp\left[-qp^y\right] dy, & ha \;\; p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

összefüggés $\mathbb{P}$*-majdnem biztosan.*

□

3.6. Hatodik téziscsoport

A hatodik téziscsoportban a véletlen elhelyezésekkel foglalkozunk (Fazekas-Chuprunov-Túri [30]). A véletlen elhelyezést a következőképpen modellezhetjük: n darab labdát helyezzünk el egymásután, egymástól függetlenül N darab dobozba és jelöljük $\mu_r(n,N)$-nel azon dobozok számát, amelyek pontosan r darab labdát tartalmaznak.

$\mu_r(n,N)$ reprezentálható $\xi, \xi_i, i \in \mathbb{N}$ független, a $[0,1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változókkal: legyen $n \in \mathbb{N}$ és $A_{(0)} = \{1,2,\ldots,n\}$. Ekkor a

$$\mu_r(n,N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{|A|=r, A\subset A_{(0)}} \prod_{j\in A} \mathbb{I}_{\{\xi_j \in \triangle_i\}} \prod_{j\in A_{(0)}\setminus A} \mathbb{I}_{\{\xi_j \notin \triangle_i\}}$$

kifejezés – összhangban a bevezetésben leírtakkal – azon dobozok számát adja, amelyek pontosan r darab golyót tartalmaznak, ahol $\mathbb{I}_B$-vel jelöltük a B halmaz indikátorfüggvényét, továbbá $\triangle_i$ jelöli a $[0,1]$ intervallum $\triangle_i = \triangle_{N_i} = \left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right[, 1 \le i \le N$ beosztását, a $\triangle_i, i = 1, 2 \ldots, N$ intervallumokra úgy tekintünk, mint dobozokra, továbbá a ξ_i-ket tekintjük a ξ realizációinak. Mindegyik realizáció egy véletlen elhelyezés valamelyik dobozba: a $\xi_j \in \triangle_i$ jelentése, hogy a j-edik labda az i-edik dobozba esik.

Kimondjuk alábbi egyenlőtlenséget, amely segítségével több majdnem biztos határeloszlás-tételt is bizonyítunk. Az egyenlőtlenség a következő (Fazekas, Chuprunov, Túri, [30], Theorem 2.1.)

15. tézis. *tegyük fel, hogy $0 < k < n$, $0 < r \le n$ és az N rögzített. Ekkor fennáll, hogy*

$$\mathbb{E}(\zeta_n - \zeta_n^k)^2 \le ck\alpha^{r-1}\left[\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n+k}\alpha^r + \left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-r}\right](\alpha+1),$$

ahol $c < \infty$ és nem függ n-től, N-től és k-tól, azonban függhet r-től, továbbá $\zeta_n = \mu_r(n,N) - \mathbb{E}\mu_r(n,N)$ és $\zeta_n^k = \mathbb{E}(\zeta_n|\mathcal{F}_{nk})$ és $\mathcal{F}_{nk}$ jelöli az $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók által generált σ-algebrát.

□

A következő eredmény a Kolchin-Sevastyanov-Chistyakov-tétel ([46], Theorem 3.) egy verziója. Az általunk ismertetésre kerülő tétel újdonsága abban áll, hogy egyenletes konvergenciát állítunk az (n,N)-ben egy bizonyos tartományon, miközben az l-et rögzítjük (Fazekas, Chuprunov, Túri, [30], Theorem 2.2.).

16. tézis. *Tegyük fel, hogy $r \ge 2$ és $l \in \mathbb{N}$ legyen rögzített. Ekkor $n, N \to \infty$ esetén fennáll a*

$$\mathbb{P}(\mu_r(n,N) = l) = \frac{1}{l!}(Np_r)^l e^{-Np_r}(1 + o(1)) \tag{3.22}$$

összefüggés egyenletesen a $T = \{(n,N) : N \ge n^{(2r-1)/(2r-2)} \log n\}$ tartományon.

□

Ezután kimondhatjuk az előző tézis majdnem biztos verzióját (Fazekas, Chuprunov, Túri, [30], Theorem 2.3.).

17. tézis. *Legyen $r \ge 2$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \infty$ rögzített, továbbá tekintsük az alábbi*

$$T_n = \left\{(k,K) \in \mathbb{N}^2 : k \le n, \lambda_1 \le \frac{k}{K^{1-\frac{1}{r}}} \le \lambda_2\right\}$$

tartományt $\mathbb{N}^2$-ben.

Legyen

$$Q_n(\omega) = \frac{1}{\frac{r}{r-1}(\lambda_2 - \lambda_1)\log n} \sum_{(k,K)\in T_n} \frac{1}{K^{2-\frac{1}{r}}} \delta_{\mu_r(n,N)(\omega)}.$$

Ekkor $n \to \infty$ esetén

$$Q_n(\omega) \Rightarrow \mu_\tau$$

$\mathbb{P}$-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén, ahol τ olyan valószínűségi változó, amelynek eloszlása az alábbi

$$\mathbb{P}(\tau = l) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{l!} \left(\frac{x^r}{r!} \right)^l e^{-\frac{x^r}{r!}} dx, \tag{3.23}$$

alakú, ahol $l = 0, 1, \ldots$.

□

A következő tézis is majdnem biztos határeloszlás-tétel állít (Fazekas, Chuprunov, Túri, [30], Theorem 2.4.).

18. tézis. *Tegyük fel, hogy $r \geq 2$ rögzített, $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq \infty$ és tekintsük az alábbi*

$$T_n = \left\{ (k, K) \in \mathbb{N}^2 : k \leq n, \alpha_1 k \leq K \leq \alpha_2 k^{(2r+1)/(2r)} \right\}.$$

tartományt.

Legyen

$$Q_n^{(r)+}(\omega) = \frac{1}{\log n} \sum_{(k,K) \in T_n} \frac{1}{k(\log \alpha_2 - \log \alpha_1 + (1/2r) \log k) K} \delta_{S_{k,K}^{(r)}(\omega)}.$$

Ekkor $n \to \infty$ esetén

$$Q_n^{(r)+}(\omega) \Rightarrow \gamma$$

$\mathbb{P}$-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén, ahol γ-val jelöltük sztenderd normális eloszlást.

□

Ezután bevezetjük a központi tartomány fogalmát, amelyre szükségünk lesz a továbbiakhoz. Ha $n, N \to \infty$ úgy, hogy

$$0 < \alpha_1 \leq \frac{n}{N} \leq \alpha_2 < \infty,$$

ahol α_1 és α_2 valamilyen konstansok, akkor azt mondjuk, hogy $n, N \to \infty$ a **központi tartományon**.

Ezután megfogalmazhatjuk az alábbi majdnem biztos eredményt (Fazekas, Chuprunov, Túri, [30], Theorem 2.5.).

19. tézis. *Legyen az $r \geq 0$ rögzített, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$ és*

$$Q_n^{(r)}(\omega) = \frac{1}{(\log \alpha_2 - \log \alpha_1) \log n} \sum_{k \leq n} \sum_{\{K : \alpha_1 \leq \frac{k}{K} \leq \alpha_2\}} \frac{1}{kK} \delta S_{k,K}^{(r)}(\omega).$$

Ekkor $n \to \infty$ esetén

$$Q_n^{(r)}(\omega) \Rightarrow \gamma$$

$\mathbb{P}$-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén.

□

Az előző tételben a határértéket-tételt az $n \to \infty$ esetre mondtuk ki úgy, hogy az összegzést rögzített központi tartományon végeztük el. Az alábbi tétel már két indexes, azaz $n \to \infty$ és $N \to \infty$. Az n és az N közötti kapcsolat tetszőleges, de feltételezzük, hogy az összegzés rögzített központi tartományon történik, továbbá azt is, hogy az (n, N) is ott található.

Fogalmazzuk meg az ezzel kapcsolatos majdnem biztos határeloszlás tételt (Fazekas, Chuprunov, Túri, [30], Theorem 2.6.).

20. tézis. *Legyen az $r \geq 0$ rögzített, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$ és*

$$Q_{n,N}^{(r)}(\omega) = \frac{1}{(\log \alpha_2 - \log \alpha_1) \log n} \sum_{k \leq n} \sum_{\{K: K \leq N, \alpha_1 \leq \frac{k}{K} \leq \alpha_2\}} \frac{1}{kK} \delta_{S_{k,K}^{(r)}(\omega)}.$$

Ekkor, ha $n, N \to \infty$ úgy, hogy $\alpha_1 \leq \frac{n}{N} \leq \alpha_2$, akkor

$$Q_{n,N}^{(r)}(\omega) \Rightarrow \gamma$$

$\mathbb{P}$-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén.

□

3.7. Hetedik téziscsoport

A hetedik téziscsoportban egyetlen tétel kerül kimondásra. Itt is a véletlen elhelyezéssel foglalkozunk, itt azonban már többszöri véletlen elhelyezést tekintünk. A következő modellt vizsgáljuk: helyezzünk el N dobozban egymás után, egymástól függetlenül labdákat. A golyók elhelyezése során a golyók minden egyes elhelyezésnél minden dobozba $1/N$ valószínűséggel esnek. Egy rögzített periódus alatt (például ez a rögzített periódus lehet egy nap) elhelyezünk m darab labdát és ezt a kísérletet ismételjük n napon keresztül. Jelölje p_q annak a valószínűségét, hogy nem sikerült q darab labdánál többet elhelyezni az N darab doboz egyikében sem az n nap során.

A téziscsoport fő eredménye az alábbi (Fazekas-Túri, [34], Theorem 1.).

21. tézis. *Tegyük fel, hogy $m, n, N \to \infty$ úgy, hogy fennállnak az $\frac{n}{N^q}\binom{m}{q+1} \to \alpha$ és az $\frac{m^2}{N} \to 0$ feltételek, ahol q egy rögzített egész szám. Ekkor teljesül a*

$$\lim p_l = \begin{cases} 0, & ha \quad 0 \leq l < q, \\ e^{-\alpha}, & ha \quad l = q, \\ 1, & ha \quad l > q. \end{cases}$$

határérték összefüggés.

□

4. Summary

This Ph.D. thesis contains new results in the field of limit theorems (mainly almost sure limit theorems) of probability theory.

In the first part of the dissertation we review the previous results and present the structure of this dissertation. We mention the first results obtained by Brosamler and independently by Schatte (see Brosamler [13] and Schatte [64]). They proved the following statement: suppose that $\mathbb{E}|\xi_1|^{2+\delta} < \infty$ ($\delta > 0$), where $\xi_1, \xi_2, \dots$ are independent, identically distributed random variables and $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$.

Then

$$\frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \mathbb{I}_{]-\infty,x[} \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \to \Phi(x),$$

almost surely. Here $\mathbb{I}_{]-\infty,x[}$ denotes the indicator function of the set $]-\infty, x[$ and Φ denotes the standard normal distribution function.

In the second chapter we show some new almost sure limit theorems in $L^p(]0,1[)$, where $1 \leq p < \infty$ (Túri, [74]).

First we study the

$$Y_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k \leq [tn]} \xi_k \tag{4.1}$$

process, where $\xi_1, \xi_2, \dots$ are independent, identically distributed real random variables, $S_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k$, $k \geq 1$, $S_0 = 0$, $\mathbb{E}\xi_1 = 0$ and $\mathbb{D}^2\xi_1 = \sigma^2$. Here [.] denotes the integer part.

We can state an almost sure theorem below:

In the space $L^p(]0,1[)$ the convergence

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\delta_{Y_{k(.,\omega)}} \Rightarrow \mu_W,$$

is valid for almost every $\omega \in \Omega$, where δ_x is the point mass at x and W is the standard Wiener process and $Y_k(t,\omega) = Y_k(t)$ is defined in (4.1).

In this chapter we study the empirical-process

$$Z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i) - t), \tag{4.2}$$

where the U_i $(i = 1, 2, \dots)$ are independent random variables with uniform distribution on the interval $[0,1]$.

The almost sure limit theorem for the empirical process is below.

In the space $L^p(]0,1[)$ convergence

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\delta_{Z_{k(.,\omega)}} \Rightarrow \mu_B,$$

is valid for almost every $\omega \in \Omega$, where B is the Brownian bridge and $Z_k(t,\omega) = Z_k(t)$ is defined in (4.2).

In Chapter 3 we investigate the multi-indexed process for fields.

Let $X_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$ be a multiindex sequence of independent, identically distributed random variables having zero mean and unit variance.

Let

$$Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}}\sum_{\mathbf{k}\le[\mathbf{nt}]} X_{\mathbf{k}}, \tag{4.3}$$

where $\mathbf{t} \in [0,1]^d$ and $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$.

Here is the almost sure Donsker theorem for fields: Let $1 \le p < \infty$. Let $Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{t},\omega) = Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})$. Then

$$\frac{1}{|\log \mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{k}|} \delta_{Y_{\mathbf{k}}}(.,\omega) \Rightarrow \mu_W$$

in $L^p([0,1]^d)$, as $\mathbf{n} \to \infty$ for almost every $\omega \in \Omega$, where W is the standard d-parameter Wiener process.

Consider the multidimensional empirical process

$$Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{i} \le \mathbf{n}} (\mathbb{I}\{U_{\mathbf{i}} \le \mathbf{t}\} - |\mathbf{t}|), \tag{4.4}$$

where $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ and $U_{\mathbf{i}}$, $\mathbf{i} \in \mathbb{N}$ are independent random vectors having uniform distribution on $[0,1]^d$.

We present the almost sure limit theorem for empirical process for fields, too: Let $1 \le p < \infty$. Let $Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{t},\omega) = Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})$.

Then

$$\frac{1}{|\log \mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{k}|} \delta_{Z_{\mathbf{k}}}(.,\omega) \Rightarrow \mu_B$$

in $L^p([0,1]^d)$, as $\mathbf{n} \to \infty$ for almost every $\omega \in \Omega$, where B is the d-parameter Brownian process.

In Chapter 4 we investigate some integral versions of almost sure limit theorems.

In the first case the limit distribution will be the Poisson distribution, while the Gaussian distribution in the second case.

First we investigate the

$$\xi'(t) = \sum_{i=1}^{[t]} \mathbb{I}_{[0,\frac{1}{t}]}(\xi_i), \tag{4.5}$$

process, where ξ_i, $i \in \mathbb{R}$ are independent random variables uniformly distributed on $[0,1]$. In this case we prove an almost sure limit theorem, where the limit distribution is Poisson:

Let $f(t), t \le 1$ be a positive function such that

$$\frac{f(t)}{t^\beta}$$

is increasing for some $\beta > 0$. Let $\xi(t) = \xi'(f(t)), 1 \le t$.

Then

$$\frac{1}{\log(T)} \int_1^T \delta_{\xi(t,\omega)} \frac{dt}{t} \to \mu_\pi$$

for almost all $\omega \in \Omega$, where μ_π denotes the distribution of π.

In the second case we mention the process

$$\xi(t) = \frac{V(f(t))}{(f(t))^{1/2}},$$

where $V(t), t > 0$ is a centered homogeneous, infinitely divisible, random process with independent increments and with finite variance, furthermore its characteristic function is

$$\varphi_{V(t)}(x) = \mathbb{E}\left(e^{ixV(t)}\right)$$
$$= \exp\left(t\int_{-\infty}^{\infty}(e^{ixy} - 1 - ixy)\frac{1}{y^2}dK(y)\right),$$

$x \in \mathbb{R}$, where $K(y)$ is an increasing bounded function such that $K(-\infty) = 0$.

Then

$$\frac{1}{\log(T)}\int_1^T \delta_{\frac{V(f(t),\omega)}{\sqrt{f(t)}}}\frac{dt}{t} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, K(\infty)) \quad \text{if } T \to \infty$$

almost surely.

Let $\pi(t), 0 \leq t$ be the standard Poisson process (i.e. $\mathbb{E}\pi(t) = t$). Then

$$\frac{1}{\log(T)}\int_1^T \delta_{\frac{\pi(f(t),\omega)-f(t)}{\sqrt{f(t)}}}\frac{dt}{t} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0,1), \quad \text{ha } T \to \infty$$

for almost all $\omega \in \Omega$.

Let $W(t)$ be the standard Wiener process. We have

$$\frac{1}{\log(T)}\int_1^T \delta_{\frac{W(f(t),\omega)}{\sqrt{f(t)}}}\frac{dt}{t} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0,1), \quad \text{ha } T \to \infty$$

for almost all $\omega \in \Omega$.

Let $U(t)$ be the Ornstein-Uhlenbeck process. Then $U(t)$ has the representation $U(t) = Ce^{-mt/2}W(e^{mt})$, $t > 0$, where $C, m > 0$ and $W(t)$ is the standard Wiener process. Let $f(t) = e^{mt}$. Since $\frac{f(t)}{t} = \frac{e^{mt}}{t}$, $1 \leq t$, is an increasing function by (b), we have

$$\frac{1}{\log(T)}\int_1^T \delta_{U(t,\omega)}\frac{dt}{t} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, C^2), \quad \text{ha } T \to \infty$$

for almost all $\omega \in \Omega$.

In Chapter 5 we deal with the sum of independent identically distributions random variables we shall prove an inequality for their moments.

Let B be a real separable Banach space with norm $\|.\|$. We suppose that B is equipped with its Borel σ-fields $\mathcal{B}$.

Our main result is the following:

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots$ be independent identically distributed B-valued random variables, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, n = 1, 2, \ldots$. Let $a_1, a_2, \ldots$ be an increasing sequence of positive real numbers. Let $\alpha \in]0, 2]$ be fixed. Assume that

$$\frac{a_{nm}}{a_n} \leq Cm^{1/\alpha+\tau_n} \quad n, m = 1, 2, \ldots, \tag{4.6}$$

where τ_n is a sequence of nonnegative numbers with $\lim_{n\to\infty} \tau_n = 0$. Assume that for any $\beta \in]0, \alpha[$

$$\mathbb{E}\|\xi_n\|^\beta < \infty. \tag{4.7}$$

Let $(a_{l_n})_{n\geq 1}$ be a subsequence of $(a_n)_{n\geq 1}$ so that for some $c < \infty$, $a_{l_n} \leq c a_{l_{n-1}}, n = 1, 2, \ldots$. Let $b_1, b_2, \ldots$ be a B-valued sequence. Assume that

$$\left(\frac{S_{l_n}}{a_{l_n}} - b_{l_n}\right)_{n\geq 1} \tag{4.8}$$

is stochastically bounded. Then, for any $\beta \in]0, \alpha[$

$$\sup_n \mathbb{E}\left\|\frac{S_{l_n}}{a_{l_n}} - b_{l_n}\right\|^\beta < \infty. \tag{4.9}$$

In this Chapter we prove an almost sure limit theorem, too. Here the limit distribution is a p-stable distribution.

In Chapter 6 we study a coin tossing experiment. Let the underlying random variables be $\xi_1, \xi_2, \ldots$. We assume that $\xi_1, \xi_2, \ldots$ are independent and identically distributed with $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = p, \mathbb{P}(\xi_i = 0) = q = 1 - p$. I.e. we write 1 for a head and 0 for a tail. In Chapter 6 we study pure runs, i.e. runs containing only head or containing only tails. We prove limit theorems for the longest run. Our theorems 6.6-6.9 versions of theorems 1-4 in Földes [35]. These are limit theorems for a fair coin. We consider the case of a biased coin in theorems 6.10 and 6.11. In this Chapter we obtain an almost sure limit theorem for longest run (Theorem 6.12.).

In Chapter 7 we deal with random allocations.

Let $\xi, \xi_j, j \in \mathbb{N}$ be independent random variables uniformly distributed on $[0, 1]$. Let $N \in \mathbb{N}$. Consider the subdivision of the interval $[0, 1[$ into the subintervals $\triangle_i = \triangle_{N_i} = \left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right[, 1 \leq i \leq N$.

We consider the intervals $\triangle_i, i = 1, \ldots, N$, as a row of boxes. Random variables $\xi_j, j = 1, 2, \ldots$, are realizations of ξ. Each realization of ξ is treated as a random allocation of a ball into one of the N boxes. The event $\xi_j \in \triangle_i$ means that the jth ball falls into the ith box. Let $n \in \mathbb{N}, A_{(0)} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

$$\mu_r(n, N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{|A|=r, A\subseteq A_{(0)}} \prod_{j\in A} \mathbb{I}_{\{\xi_j\in\triangle_i\}} \prod_{j\in A_{(0)}\setminus A} \mathbb{I}_{\{\xi_i\notin\triangle_i\}} \tag{4.10}$$

is the number of boxes containing r balls and $NC_n^r \frac{1}{N^r}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-r}$ is its expectation. Here $C_n^r = \binom{n}{r}$ is the binomial coefficient and $\mathbb{I}_B$ is the indicator of the event B.

For $n, N \in \mathbb{N}$ we will use the notation $\alpha = \frac{n}{N}$ and $p_r(\alpha) = (\alpha^r/r!)e^{-\alpha}$.

We shall use the notations

$$\mathbb{D}_{n,N}^{(r)} = \sqrt{\mathbb{D}^2\mu_r(n, N)} = \sqrt{\operatorname{cov}(\mu_r(n, N), \mu_r(n, N))}$$

and

$$S_{n,N}^{(r)} = \frac{\mu_r(n,N) - \mathbb{E}\mu_r(n,N)}{\mathbb{D}_{n,N}^{(r)}}$$

is the standardized variable, where $(n, N) \in \mathbb{N}^2$.

We use the notation $A_{(k)} = \{k+1, \dots, n\}, k = 0, 1, \dots, n-1$.

Let

$$\zeta_n = \zeta_{n,N} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{|A|=r, A \subseteq A_{(0)}} \prod_{j \in A} \mathbb{I}_{\{\xi_j \in \triangle_i\}} \prod_{j \in A_{(0)} \setminus A} \mathbb{I}_{\{\xi_i \notin \triangle_i\}} -$$

$$-NC_n^r \frac{1}{N^r} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-r}.$$

We see that $\zeta_n = \mu_r(n,N) - \mathbb{E}\mu_r(n,N)$. We have

$$\zeta_n = \sum_{i=1}^{N} \sum_{|A|=r, A \subseteq A_{(0)}} (\eta_{iA} - \mathbb{E}\eta_{iA}),$$

where

$$\eta_{iA} = \prod_{j \in A} \mathbb{I}_{\{\xi_j \in \triangle_i\}} \prod_{A_{(0)} \setminus A} \mathbb{I}_{\{\xi_j \notin \triangle_i\}}$$

is the indicator of the event that the ith box contains the balls with indices in the set A (and it does not contain any other ball). Let $\mathcal{F}_k^n$ be the σ algebra generated by $\xi_{k+1}, \dots, \xi_n$.

We will use the following conditional expectaiton $\eta_{iA}^{(k)} = \mathbb{E}(\eta_{iA} | \mathcal{F}_{nk})$ and

$$\zeta_n^k = \zeta_{nN}^k = \mathbb{E}(\zeta_n | \mathcal{F}_{kn}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{|A|=r, A \subseteq A_{(0)}} (\eta_{iA}^{(k)} - \mathbb{E}\eta_{iA}^{(k)}) = \tag{4.11}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{|A|=r, A \subseteq A_{(0)}} \frac{1}{N^{r - |A \cap A_{(k)}|}} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{k - (r - |A \cap A_{(k)}|)}$$

$$\prod_{j \in A \cap A_{(k)}} \mathbb{I}_{\{\xi_j \in \triangle_i\}} \prod_{j \in A_{(k)} \setminus A} \mathbb{I}_{\{\xi_j \notin \triangle_i\}} - \frac{1}{N^r} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-r}.$$

The following inequality will play an important role in the proofs of our theorems:

Let $0 < k < n, 0 < r \le n$ and N fixed. Then we have

$$\mathbb{E}(\zeta_n - \zeta_n^k)^2 \le ck\alpha^{r-1} \left[\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n+k} \alpha^r + \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-r} \right] (\alpha + 1), \tag{4.12}$$

where $c < \infty$ does not depend on n, N and k but may depend on r.

First consider the almost sure limit theorem below. Here the limit distribution will be a mixture of the accompanying laws:

Let $r \geq 2, 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \infty$ be fixed. Let T_n be the following domain in $\mathbb{N}^2$

$$T_n = \left\{ (k, K) \in \mathbb{N}^2 : k \leq n, \lambda_1 \leq \frac{k}{K^{1-\frac{1}{r}}} \leq \lambda_2 \right\}.$$

Let

$$Q_n(\omega) = \frac{1}{\frac{r}{r-1}(\lambda_2 - \lambda_1) \log n} \sum_{(k,K)\in T_n} \frac{1}{K^{2-\frac{1}{r}}} \delta_{\mu_r(n,N)(\omega)}.$$

Then, as $n \to \infty$,

$$Q_n(\omega) \Rightarrow \mu_\tau$$

for almost all $\omega \in \Omega$, where τ is a random variable with distribution

$$\mathbb{P}(\tau = l) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{l!} \left(\frac{x^r}{r!} \right)^l e^{-\frac{x^r}{r!}} dx,$$

where $l = 0, 1, \ldots$.

Furthermore, we can state:

Let $r \geq 2$ be fixed, $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq \infty$ and

$$T_n = \left\{ (k, K) \in \mathbb{N}^2 : k \leq n, \alpha_1 k \leq K \leq \alpha_2 k^{(2r+1)/(2r)} \right\}.$$

Let

$$Q_n^{(r)+}(\omega) = \frac{1}{\log n} \sum_{(k,K)\in T_n} \frac{1}{k(\log \alpha_2 - \log \alpha_1 + (1/2r) \log k) K} \delta_{S_{k,K}^{(r)}(\omega)}.$$

Then, as $n \to \infty$, we have

$$Q_n^{(r)+}(\omega) \Rightarrow \gamma$$

for almost every $\omega \in \Omega$ and here γ denotes the standard normal distribution.

Now we consider the almost sure limit theorems for random allocations in the central domain. If $n, N \to \infty$ so that

$$0 < \alpha_1 \leq \frac{n}{N} \leq \alpha_2 < \infty,$$

where α_1 and α_2 are some constants, then $n, N \to \infty$ in a central domain.

Let $r \geq 0$ be fixed, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$ and

$$Q_n^{(r)}(\omega) = \frac{1}{(\log \alpha_2 - \log \alpha_1) \log n} \sum_{k \leq n} \sum_{\{K: \alpha_1 \leq \frac{k}{K} \leq \alpha_2\}} \frac{1}{kK} \delta_{S_{k,K}^{(r)}(\omega)}.$$

Then, as $n \to \infty$, we have

$$Q_n^{(r)}(\omega) \Rightarrow \gamma$$

for almost every $\omega \in \Omega$.

In the above theorem the limit was considered for $n \to \infty$ (and the indices of the summands were in a fixed central domain). The following theorem is a two-index limit theorem, i.e. $n \to \infty$ and $N \to \infty$. The relation of n and N could be arbitrary, however, as the indices of summands are in a fixed central domain, we assume that (n, N) is considered in central domain.

Let $r \geq 0$ be fixed, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$ and

$$Q_{n,N}^{(r)}(\omega) = \frac{1}{(\log \alpha_2 - \log \alpha_1) \log n} \sum_{k \leq n} \sum_{\{K: K \leq N, \alpha_1 \leq \frac{k}{K} \leq \alpha_2\}} \frac{1}{kK} \delta S_{k,K}^{(r)}(\omega).$$

Then, as $n, N \to \infty$, so that $\alpha_1 \leq \frac{n}{N} \leq \alpha_2$, we have

$$Q_{n,N}^{(r)}(\omega) \Rightarrow \gamma$$

for almost every $\omega \in \Omega$.

In Chapter 8 we presentation some random allocation with fix period.

Let balls be placed successively and independently into N boxes. At each allocation the ball can fall into each box with probability $\frac{1}{N}$. During a fixed period (for a day, say) we allocate m balls. We execute an experiment series of n days. Let p_q denote the probability that we do not place more than q balls into any of the N boxes during any of the n days.

Let q be a fixed positive integer. Assume that $m, n, N \to \infty$ so that

$$\frac{n}{N^q} \binom{m}{q+1} \to \alpha \tag{4.13}$$

where α is a positive finite number and

$$\frac{m^2}{N} \to 0. \tag{4.14}$$

Then

$$\lim p_l = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad 0 \leq l < q, \\ e^{-\alpha} & \text{ha} \quad l = q, \\ 1 & \text{ha} \quad l > q. \end{cases} \tag{4.15}$$

We can state the result below too.

$$\left(1 - \frac{1}{N^l} \binom{m}{l+1}\right)^n \leq p_l \leq \left(1 - \frac{1}{N^l} \binom{m}{l+1} (1-\varepsilon)\right)^n \tag{4.16}$$

for $l = 1, 2, \ldots, m-1$ where $\varepsilon \geq 0$ and $\varepsilon \to 0$ if $m \to \infty$ and $N \to \infty$ so that $m^2/N \to 0$.

In the last chapter we prove that the Fazekas-Rychlik result [32] imply the theorem Brosamler and Schatte [13], [64]. Moreover, we show relations between the old and the new results.

5. A szerző összes publikációja

1. Fazekas, István, Túri, József (2012). A Limit Theorem for Random Allocations *Journal of Mathematics Research*, Vol.LXV, No. 1, 69–85.,
MathScienet: MR2903571, Zentralblatt: Zbl1263.60004.

2. Fazekas, István, Chuprunov, Alexey and Túri, József. (2011). Inequalities and limit theorems for random allocations *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A*, Vol. LXV, No. 1, 69–85.,
MathScienet: MR2825152, Zentralblatt: Zbl1253.60026.

3. Túri, József (2009). Limit theorems for longest run *Ann. Math. Inform.* **36**, 133–141.,
MathScienet: MR2580909, Zentralblatt: Zbl1212.60023.

4. Száz, Árpád, Túri, József (2006). Comparisons and compositions of Galois-type connections *Miskolc Math. Notes* **17**(2), 189–203.,
MathScienet: MR2310277, Zentralblatt: Zbl1120.06002.

5. Túri, József (2006). On the moments of sums of independent identically distributed random variables *Math. Pannon.* **17**(2), 267–278.,
MathScienet: MR2272900, Zentralblatt: Zbl1121.60022.

6. Túri, József (2005). Some integral versions of almost sure limit theorems *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **48**, 119–125.,
MathScienet: MR2323624, Zentralblatt: Zbl1121.60023.

7. Túri, József (2002). Almost sure functional limit theorems in $L^p([0,1]^d)$ *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **45**, 159–169.,
MathScienet: MR1995987, Zentralblatt: Zbl1046.60032.

8. Száz, Árpád, Túri, József (2002). Characterizations of injective multipliers on partially ordered sets *Studia Univ. Babeş-Bolyai Math.* **47**(1), 105–119.,
MathScienet: MR1989513, Zentralblatt: Zbl1027.06001.

9. Túri, József (2002). Almost sure functional limit theorems in $L^p(]0,1[)$ *Acta Acad. Paedagog. Agriensis Sect. Mat.* **29**, 77–87.,
MathScienet: MR1956582, Zentralblatt: Zbl1012.60035.

10. Túri, József (2002). Almost sure functional limit theorems in $L^2(]0,1[)$ *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi.* **18**(1), 27–32.,
MathScienet: MR1923100, Zentralblatt: Zbl1017.60035.

11. Száz, Árpád, Túri, József (2000).- Seminorm generating relations and their Minkowski functionals *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi.* **16**, 15–24., MathScienet: MR1796258, Zentralblatt: Zbl0983.26013.

6. A szerzőnek a témával kapcsolatban megjelent publikációi

1. Fazekas, István, Túri, József (2012). A Limit Theorem for Random Allocations *Journal of Mathematics Research*, Vol. 4, No. 1, 17–20.,
   MathScienet: MR2903571, Zentralblatt: Zbl1263.60004.

2. Fazekas, István, Chuprunov, Alexey and Túri, József (2011). Inequalities and limit theorems for random allocations *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A*, **4**(1), 17–20 , 69–85.,
   MathScienet: MR2825152, Zentralblatt: Zbl1253.60026.

3. Túri, József (2009). Limit theorems for longest run *Ann. Math. Inform.* **36**(1), 133–141.,
   MathScienet: MR2580909, Zentralblatt: Zbl1212.60023.

4. Túri, József (2006). On the moments of sums of independent identically distributed random variables *Math. Pannon.* **17**(2), 267–278.,
   MathScienet: MR2272900, Zentralblatt: Zbl1121.60022.

5. Túri, József (2005). Some integral versions of almost sure limit theorems *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **48**, 119–125.,
   MathScienet: MR2323624, Zentralblatt: Zbl1121.60023.

6. Túri, József (2002). Almost sure functional limit theorems in $L^p([0,1]^d)$ *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **45**, 159–169.,
   MathScienet: MR1995987, Zentralblatt: Zbl1046.60032.

7. Túri, József (2002). Almost sure functional limit theorems in $L^p(]0,1[)$ *Acta Acad. Paedagog. Agriensis Sect. Mat.* **29**, 77–87.,
   MathScienet: MR1956582, Zentralblatt: Zbl1012.60035.

8. Túri, József (2002). Almost sure functional limit theorems in $L^2(]0,1[)$ *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi.* **18**(1), 27–32.,
   MathScienet: MR1796258, Zentralblatt: Zbl0983.26013.

7. A szerző munkáira történt eddigi hivatkozások

1. Túri, József (2009). Limit theorems for longest run *Ann. Math. Inform.* **36** (1), 133–141.

   Hivatkozás: Christoph Aistleitner, Katusi Fukuyama (2016) On the law of the iterated logarithm for trigonometric series with bounded gaps II, *Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux* **28**, no. 2, 391–416.

   Hivatkozás: Zhao, Min Zhi, Zhang, Hui-Zeng (2013) On the maximal length of arithmetic progressions, *Electronic Journal of Probability* **18**, no. 79, 1–21.

   Hivatkozás: Zhao, Min Zhi, Shao, Qi-Man (2011) On the Longest Lenght of Consecutive Integers, *Acta Math. Sinica* **27**, no. 2, 329–338.

2. Túri, József (2002). Almost sure functional limit theorems in $L^2([0,1])$ *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi.* **18**, 27–32.

   Hivatkozás: Rychlik, Zdzisław, Skublewski, Wojciech, Walczyański, Tomasz (2007) On the random functional central limit theorems in $L^2]0,1[$ with almost sure convergence, *Acta Sci. Math.* **73**, no. 3-4, 745–765.

3. Túri, József (2002). Almost sure functional limit theorems in $L^p([0,1])$ *Acta Acad. Paedagog. Agriensis Sect. Mat.* **29**, 77–87.

   Hivatkozás: Rychlik, Zdzisław, Skublewski, Wojciech, Walczyański, Tomasz (2007) On the random functional central limit theorems in $L^2]0,1[$ with almost sure convergence, *Acta Sci. Math.* **73**, no. 3-4, 745–765.

4. Száz, Árpád, Túri, József (2002). Characterizations of injective multipliers on partially ordered sets *Studia Univ. Babeş-Bolyai Math.* **47** (1), 105–119.

   Hivatkozás: Yon, Yong Ho, Kim, Kyung Ho (2010) On expansive linear maps v-multipliers of lattices *Quaest. Math.* **33**, 417–427.

8. Irodalomjegyzék

[1] Acosta, A. and Giné, E. (1979). Convergence of momemts and related functionals in the general central limit theorem in Banach space, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* **48**, 213–231.

[2] Araujo, A. and Giné, E. (1980). The Central Limit Theorem for Real and Banach Valued Random Variables, John Wiley and Sons, New York, Chichseter, Brisbane, Toronto

[3] Avkhadiev, F. G. & Chuprunov, A. N. (2007). The probability of a successful allocation of ball groups by boxes, *Lobachevskii J. Math. 25*, 3–7.

[4] Becker-Kern, P. (2007). An almost sure limit theorem for mixtures of domains in random allocation, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **44** (3), 331–354.

[5] Békéssy, A. (1963). On classical occupancy problems. I., *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 8* (1-2), 59–71.

[6] Berkes, I. (1998). Results and problems related to the pointwise central limit theorem, In: B. Szyszkowicz (Ed.) Asymptptic results in probability and statistics, Elsevier, Amsterdam, 59–96.

[7] Berkes, I. and Csáki, E. (2001). A universal result in almost sure central limit theory, *Stoch. Proc. Appl.*, **94** (1), 105–134.

[8] Berkes, I. and Csáki, E., Csörgő, S., Megyesi, Z. (2002). Almost sure limit theorems for sums and maxima from the domain of geometric partial attraction of semistable law, in: Limit Theorems in Probability and Statistics, Vol. I., *János Bolyai Math. Soc., Budapest*, 133–157.

[9] Berkes, I., Dehling, H.I. and Móri, T.F. (1991). Counterexemales related to the a.s. central limit theorem, *Studia Sci. Math. Hungar.* **26** (1), 153–164.

[10] Billingsley, P. (1968). Convergence of Probability Measures, John Wiley and Sons, New York-London-Sidney-Toronto

[11] Bingham, N.H., Goldie, C.M., Teugels, J.L. (1987). Regular Variation, Cambridge University Press, Cambridge

[12] Binswanger, K. and Embrechts, P. (1994). Longest runs in coin tossing, *Insurance Math. and Econom* **15**, 139–149.

[13] Brosamler, G.A. (1988). An almost everywhere central limit theorem, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **104**, 561–574.

[14] Csáki, E., Földes, A., Komlós, J. (1987). Limit theorems for Erdős-Rényi type promlems, *Studia Sci. Math. Hungar.* **22**, 321–332.

[15] Chow, Y. S. and Teicher, H. (1988). Probability Theory, Springer-Verlag, New-York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo

[16] Chuprunov, A., Fazekas, I. (2003). Almost sure limit theorems for the Pearson statistic (russian) *Teor. Veroyatnost. i Primenen*, **48**, no. 1, 162–169, translation in *Theory Probab. Appl.* , **48**, no. 1, 140–147.

[17] Chuprunov, A., Fazekas, I. (2005). Inequalities and strong laws of large numbers for random allocations. *Acta Math. Hungar. 109* (1-2), 163–182.

[18] Chuprunov, A., Fazekas, I. (2005). Intergral analogues of almost sure limit theorems *Periodica Math. Hungar.* **50**, 61–78.

[19] De Acosta, A. and Giné, E. (1979). Convergence of moments and related functionals in the general central limit theorem in Banach space, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **48**, 213–231.

[20] Deheuvels, P.(1985). On Erdős-Rényi theorem for random fields and sequence and its relationships with the theory of run spacings, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **70** (1), 91–115.

[21] Donsker, M.M. (1951). A functional central limit theorem for stationary random fields, *Mem. Amer. Math. Soc.* (6), 150–162.

[22] Deo, C.M. (1975). A functional central limit theorem for stationary random fields, *The Annals of Probability* **3** (4), 708–715.

[23] Dudley, R.M. (1989). Real Analisys and Probability, Wadsworth and Brooks/Cole, Pacific Grove, CA

[24] Erdős, P., Révész, P. (1975). On the lenght of the longest head-run, *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai (16. Topics in information theory, Keszthely (Hungary))*, 219–229.

[25] Erdős, P., Rényi, A. (1970). On a new law of large numbers, *J. Analyse Math*, **23**, 103–111.

[26] Fazekas, I. (1992). Convergence rates in the law of large numbers for arrays, *Publ. Math. Debrecen* **41** (1-2), 53–71.

[27] Fazekas, I. (2010). Határérték-tételek és egyenlőtlenségek a valószínűségszámításban és a statisztikában, *Akadémiai doktori értekezés*, Budapest, Magyar Tudományos Akadémia

[28] Fazekas I. and Chuprunov, A. (2005). Almost Sure Limit Theorems for Random Allocations *Studia Sci. Math. Hungar.*, **42** (2), 173–194.

[29] Fazekas I. and Chuprunov, A. (2003). Almost Sure Limit Theorems for the Pearson statistic, (Russian) *Theory Probab. Appl.*, **48** (1), 162–169.

[30] Fazekas, I., Chuprunov, A. and Túri, J. (2011). Inequalities and limit theorems for random allocations, *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A*, Vol. LXV, No. 1, 69–85.

[31] Fazekas I. and Noszály, Cs. (2003). Limit theorems for contaminated runs of heads, *manuscript*

[32] Fazekas, I. and Rychlik, Z. (2002). Almost sure functional limit theorems. *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A*, **56**, 1–18.

[33] Fazekas, I. and Rychlik, Z. (2003). Almost sure functional limit theorems for random fields, *Math. Nachr.*, **259**, 12–18.

[34] Fazekas, István, Túri, József. (2012). A Limit Theorem for Random Allocations *Journal of Mathematics Research*, **4**(1), 17–20

[35] Földes, A. (1979). The limit distribution of the longest head-run, *Periodica Mathematica Hungarica*, **10** (4), 301–310.

[36] Freedman, D. (1971). Brownian Motion and diffusion, Holden Day, San Francisco.

[37] Gnedenko, B.V., Kolmogorov, A.N. (1954). Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

[38] Gordon, L., Schilling, M.F., Watermann, M.S. (1986). An extreme value theory for long head runs, *Probability Theory and Related Fields* **72**, 279–287.

[39] Galen, R.S. (2000). Probability for Statisticians, Springer, New York, Berlin.

[40] Grenander, U. (1963). Probabilities on Algebraic Structures, John Wiley and Sons, New York, London.

[41] Guibas, L.J. and Odlyzko, A.M. (1980). Long repetitive patterns in random sequences, *Z. Wahrsch. Verv. Gebiete* **53**, 241–262.

[42] Hoffmann-Jørgensen, J. (1974). Sums of independent Banach Space valued random variables, *Studia Math.* **52**, 159–186.

[43] Hörmann, S. (2006). An extension of almost sure central limit theory, *Statist. Probab. Lett.***76** (2), 191–202.

[44] Ivanov, A.V. (1980). Converge of distributions of functionals of measurable fields, (Russian) *Ukrain. Math. Zh.* **32** (1), 27–34.

[45] Kolchin, V. (2003). Limit theorems for a generalized allocations scheme (Russian), *Diskret. Mat.***15** (4), 148–157;

[46] Kolchin, V., Sevastyanov, B.A. and Chistyakov, V.P. (1978). Random Allocations, Winston and Sons, Washington D.C.

[47] Kopociński, B. (1991). On the distribution of the longest succes-run in Bernoulli trials, *Mat. Stos.* **34**, 3–13.

[48] Kuang, Ji Chang (1984). Some generalizations of Stolz theorem, *Hunan Shiyuan Xuebao Ziran Kexue Ban*, **3**, 105–112.

[49] Lacey, M.T., and Philipp, W. (1990). A note on the almost sure central limit theorem, *Statistics and Probability Letters* **9** (2), 201–205.

[50] Major, P. (1998). Almost sure functional limit theorems I., The general case. *Studia Sci. Math. Hungar.* **34**, 273–304.

[51] Major, P. (2000). Almost sure functional limit theorems II. The case of independent random variables *Studia Sci. Math. Hungar.* **36**, 231–273.

[52] Matula, P. (2005). On almost sure limit theorems for positively dependt random variables, *Statist. Probab. Lett.***74**, 59–66.

[53] Móri, T.F. (1993). On the strong law of large numbers for logarithmically weighted sums, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **36** (?), 35–46.

[54] Móri, T.F. (1993). The a.s. limit distribution of the longest head run, *Can. J. Math.*, **45**(6), 1245–1262.

[55] Móri, T.F. (1994). On long run of heads and tails, *Statistics and Probability Letters* **19**, 85–89.

[56] Móri, T.F. (1994). On long run of heads and tails II, *Periodica Mathematica Hungarica* **28**(1), 79–87.

[57] Muselli, M. (2000). Useful inequalities for the longest run distribution, *Statistics and Probability Letters* **46**, 239–249.

[58] Oliveira, P.E. and Suquet, Ch.(1998). Weak convergence in $L^p(]0,1[)$ of the uniform empirical process under dependence, *Statistics and Probability Letters* **39**, 363–370.

[59] Orzóg, M. and Rychlyk, Z. (2007). On the random functional central limit theorems with almost sure convergence, *Probab. Math. Statist.* **27** (1), 125–138.

[60] Philippou, I., Makri, F.S. (1986). Successes, Runs and Longest Runs, *Statistics and Probability Letters* **4**, 211–215.

[61] Ramachandran, B. (1969). On characteristic functions and moments, *Sankhyā* Ser. A. **31**, 1–12.

[62] Rényi, A. (1962). Three new proofs and generalization of a theorem Irving Weiss, *Magy. Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **7** (1–2), 203–214.

[63] Sato, Ken-Iti (1999). Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions, Cambridge University Press, Cambridge

[64] Schatte, P. (1988). On Strong Versions of the Central Limit Theorem, *Math. Nachr.* **137**, 249–256.

[65] Schilling, M.F. (1990). The longest run of heads, *The College Mathematics Journal* **21**(3), 196–207.

[66] Sen, P.K. (1998). Weak convergence of multidimensional empirical processes for stationary φ-mixing processes, *The Annals of Probability* **2**, 147–154.

[67] Seneta, E. (1976). Regular Variation Functions, Lecture Notes in Mathematics, **508**, Springer, Berlin.

[68] Timashev, A. N. (2000). On the asymptotics of large deviations in schemes for allocating particles to different cells of bounded sizes, *Teor. Veroyatnost. i Primenen. 45* (3), 521–535 (in Russian).

[69] Túri, J. (2009). Limit theorems for longest run, *Ann. Math. Inform.* **36**, 133–141.

[70] Túri, J. (2006). On the moments of sums of independent identically distributed random variables, *Math. Pannon.* **17** (2), 267–278.

[71] Túri, J. (2005). Some integral versions of almost sure limit theorems, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **48**, 119–125.

[72] Túri, J. (2002). Almost sure functional limit theorems in $L^p([0,1])^d$, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **45**, 159–169.

[73] Túri, J. (2002). Almost sure functional limit theorems in $L^p([0,1])$, *Acta Acad. Paedagog. Agriensis Sect. Mat.* **29**, 77–87.

[74] Túri, J. (2002). Almost sure functional limit theorems in $L^2([0,1])$, *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi.* **18**, 27–32.

[75] Tusnády, G. (1977). A remark on the approximation of the sample df in the multidimensional case, *Periodica Mathematica Hungarica* **8**, 53-55.

[76] Tusnády, G., Komlós, J. (1975). On sequences of "pure heads", *The Annals of Probability* **1975**(3), 273–304.

[77] Weiss, I. (1958). Limiting distribution in some occupancy problems, *Ann. Math. Statis.*, **29** (3), 878–884.