Óbudai Egyetem

Doktori (PhD) értekezés

Speciális határeloszlás-tételek a valószínűségszámításban

Készítette:

Túri József Attila

okl. matematikus

Témavezető:

Prof. Dr. Fazekas István

egyetemi tanár

Alkalmazott Informatikai és Alkalmazott Matematikai Doktori Iskola

Budapest

2016

Nos sumus magistri,
nos sumus ministri,
ubique sumus,
sed non sumus nusquam,
et miramur mathematicam.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretném megköszönni témavezetőmnek, dr. Fazekas István Professzor Úrnak a dolgozat megírása során nyújtott sokoldalú segítségét, bíztatását.

Köszönettel tartozom dr. Galántai Aurél Professzor Úrnak a Magyar Tudományos Akadémia Doktorának, az Óbudai Egyetem Alkalmazott Informatikai és Alkalmazott Matematikai Doktori Iskola vezetőjének, aki munkám során végig támogatásáról biztosított, továbbá szintén köszönettel tartozom dr. Szeidl László Professzor Úrnak a Doktori Iskola Alkalmazott Matematika programvezetőjének, aki a dolgozat megírása során szintén támogatásáról biztosított.

Szeretnék köszönetet mondani egykori tanáraimnak, közülük is elsősorban dr. Daróczy Zoltán, dr. Major Péter, dr. Arató Mátyás (†) és dr. Székelyhidi László professzoroknak, akik nagyban hozzájárultak szakmai fejlődésemhez.

Budapest, 2016. szeptember hó 5.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A dolgozatban – a 8. fejezetet kivéve – majdnem biztos határeloszlás-tételeket állítunk és bizonyítunk bizonyos, a dolgozatban ismertetésre kerülő valószínűségi változók sorozatára, illetve folyamatokra.

A majdnem biztos határeloszlás-tétel témaköre – általásnosan tekintve a kérdéskört – azt vizsgálja, hogy ha adottak a bizonyos feltételeket teljesítő $\xi_1, \xi_2, \dots$ valószínűségi változók, akkor mely feltételek fennállása esetén teljesül a

$$\frac{1}{D_N} \sum_{n=1}^{N} d_n \delta_{\xi_n(\omega)} \Rightarrow \mu_\xi \tag{1.1}$$

konvergencia[1] $\mathbb{P}$-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén, ahol $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ a háttérben álló valószínűségi mezőt[2], δ_ξ az egy pontra koncentrált eloszlást, μ_ξ pedig a megfelelő határeloszlást jelöli.

Természetesen az (1.1) konvergencia nem mindig áll fenn: ha $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók úgy, hogy $\mathbb{E}\xi_1 = 0$ és $\mathbb{D}^2\xi_1 = 1$ és $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, akkor igaz a következő

[1]A dolgozat jelentős részében – néhány kivételtől eltekintve – a $\Rightarrow$ szimbólummal jelöljük a gyenge konvergenciát, azaz azt, amikor a μ és a μ_n eloszlások esetén fennáll a $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$, ha $n \to \infty$ konvergencia minden korlátos és folytonos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre.

[2]A dolgozatban feltételezzük, hogy a háttérben a $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező szerepel, akkor is, ha ezt nem mindig jelezzük külön az adott tételnél vagy leírásnál.

$$\mathbb{P}\left(\lim_{N\to\infty}\sup_{-\infty<x<\infty}\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{N}\mathbb{I}_{]\infty,x]}(S_n/\sqrt{n})-\phi(x)\right|=0\right)=0 \tag{1.2}$$

összefüggés[3] (Schatte, [64]), azaz a

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{N}\mathbb{I}_{]\infty,x]}(S_n/\sqrt{n}) \tag{1.3}$$

aritmetikai középre nem teljesül a majdnem biztos határeloszlás-tétel (itt $d_n = 1/N$ és $1/D_N = 1$).

Azonban Brosamler [13] és Schatte [64] 1988-ban egymástól függetlenül megmutatták,[4] hogy *igaz a következő*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\log N}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\mathbb{I}_{]-\infty,x[}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)=\Phi(x)$$

összefüggés majdnem biztosan[5] *minden* $x\in\mathbb{R}$ *esetén, ahol* S_n *jelöli a* $\xi_1,\xi_2,\ldots$ *független, azonos eloszlású valószínűségi változók részletösszegeit, azaz* $S_n = \xi_1+\cdots+\xi_n$*, továbbá* $\mathbb{E}\xi_1=0$, $\mathbb{D}\xi_1^2=1$ *és feltételezzük, hogy* $\mathbb{E}|\xi_1|^{2+\delta}<\infty$*, ahol* $\mathbb{I}_{]-\infty,x[}$ *jelöli a* $]-\infty,x[$ *halmaz indikátorfüggvényét, továbbá* Φ *a sztenderd normális eloszlásfüggvényt.*

Azaz, ha a (1.1) összefüggést tekintjük, akkor $D_N = \log N$ és a $d_n = 1/n$ megfelelő választást biztosítanak, természetesen a valószínűségi változó sorozatra leírt feltételekkel együtt[6].

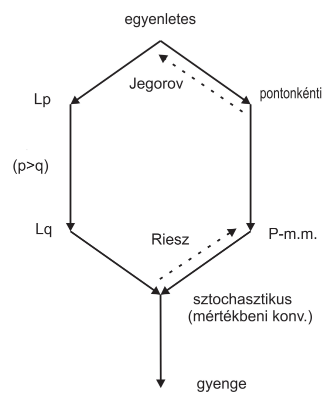
[3] Itt, illetve még néhány esetben a $\delta_{S_n/\sqrt{n}}(]\infty,x])$ jelölés helyett a Schatte cikkben szereplő $\mathbb{I}_{]\infty,x]}(S_n/\sqrt{n})$ szimbolikával éltünk.

[4] A két szerző eredménye annyiban különbözik egymástól, hogy Brosamler a $(2+\delta)$-ik $(\delta>0)$ momentumok végességét tételezte fel, míg Schatte a 3. momentumok végességéből indult ki, azaz nála $\delta=1$ volt.

[5] Amikor a dolgozatban a "majdnem mindenütti konvergencia" vagy a "majdnem biztos konvergencia" kifejezést használjuk, akkor – ha csak mást nem mondunk – a háttérben álló $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ valószínűségi mező $\mathbb{P}$ valószínűségi mértéke szerint értjük a majdnem biztos (majdnem mindenütti) konvergenciát, esetenként a "$\mathbb{P}$-majdnem minden $\omega\in\Omega$" vagy a "$\mathbb{P}$-majdnem biztosan" jelölés helyett csak a "majdnem minden $\omega\in\Omega$" vagy egyszerűen csak a "majdnem mindenütt", illetve a "majdnem biztosan" kifejezést használjuk.

[6] Az értekezésben log jelöli a természetes alapú logaritmust, azaz ln-t.

Ha a konvergenciafajtákat az alábbi sémákba foglaljuk, akkor látható,



hogy az általunk vizsgált majdnem biztos határeloszlás-tételek hogyan állnak elő a különböző konvergenciafajták felhasználásával.

Brosamler, illetve Schatte eredményeinek ismertté válása után egyre több eredmény született a témakörrel kapcsolatban.

Major Péter [50], [51] eredményei a majdnem biztos határeloszlás-tételek mélyebb alapjaira és összefüggéseire világítottak rá.

Fontos mérföldkő volt a Berkes István és Csáki Endre által publikált eredmény [7]. A cikkben[7] Berkes és Csáki belátta, hogy *ha* $\xi_1, \xi_2, \dots$ *független valószínűségi változók,* $f_k\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \dots)$ *mérhető függvények és feltesszük, hogy minden* $1 \le k < l$ *esetén létezik egy* $f_{k,l}\colon \mathbb{R}^{l-k} \to \mathbb{R}$ *mérhető függvény úgy, hogy*

$$\mathbb{E}(|f_l(\xi_1, \dots, \xi_l) - f_{k,l}(\xi_{k+1}, \dots, \xi_l)| \wedge 1) \le C(\log_+ \log_+(c_l/c_k))^{-(1+\varepsilon)}$$

valamely $C > 0$ *és* $\varepsilon > 0$ *estén, továbbá* $(c_n)_{n\ge 1}$ *olyan pozitív, nemcsökkenő sorozat, amelyre fennáll, hogy* $c_n \to \infty$, $c_{n+1}/c_n = O(1)$ *és*

$$d_k = \log(c_{k+1}/c_k), \quad D_n = \sum_{k\le n} d_k,$$

akkor bármely G *eloszlásfüggvény esetén a*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{D_N} \sum_{k\le N} d_k \mathbb{I}(f_k(\xi_1, \dots, \xi_k) < x) = G(x) \quad \textit{majdnem biztosan}$$

[7] A cikkben több fontos tétel található a témakörrel kapcsolatban, azonban terjedelmi korlátok miatt csak a fenti tételt idézzük.

bármely $x \in C_G$ esetén és a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{D_N} \sum_{k\le N} d_k \mathbb{P}(f_k(\xi_1, \dots, \xi_k) < x) = G(x)$$

bármely $x \in C_G$ esetén állítások ekvivalensek, ahol C_G jelöli a G folytonossági pontjainak a halmazát. Az eredmény akkor is érvényben marad, ha a $(d_n)_{n\ge1}$ sorozatot tetszőlegesen olyan $(d_n^*)_{n\ge1}$ sorozattal helyettesítjük, amelyre fennáll, hogy $0 \le d_k^* \le d_k$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén és $\sum d_k^* = \infty$.

A Berkes-Csáki publikációban az ismertetésre kerülő tételeknek több alkalmazása is bemutatásra kerül (például a részletösszegek, a szélsőértékek, az empirikus eloszlásfüggvény, a visszatérési idők, illetve a Darling-Erdős tipusú határérték tételek majdnem biztos verziói).

A következő fontos és ezen értekezésben felhasznált eredmény a Fazekas-Rychlik publikáció [32]. A szerzők az általános fázisterű esetet vizsgálják: felteszik a fázistérről, hogy teljes szeparábilis metrikus tér. Cikkük általánosítása az [7] eredménynek. Megjegyezzük, hogy bár a [32] publikációban szereplő eredmény formálisan hasonló a Berkes-Csáki cikkben leírtakhoz – a bizonyítása is a [7]-ben alkalmazott technikát követi – felhasználhatósága az alkalmazásokban – köszönhetően az általánosításnak – rendkívül sokoldalú (lásd például a [74], [73] eredményeket vagy ezen dolgozat 2. fejezetét).

Az előbb említett [32] eredmény jelen dolgozat 2. fejezetében kerül felhasználásra, ahol az $L^p(]0,1[)$, $1 \le p < \infty$ térben vizsgálunk és bizonyítunk majdnem biztos funkcionális határeloszlás tételeket[8](itt természetesen kihasználjuk, hogy az $L^p(]0,1[)$, $1 \le p < \infty$ teljes, szeparábilis metrikus tér).

Tekintsük a

$$Y_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}$$

és a

$$Z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i) - t)$$

folyamatokat[9], ahol az U_i-k ($i = 1, 2, \dots$) független, a $[0,1]$ intervallumon

[8]A dolgozatban a "majdnem biztos funkcionális határeloszlás tétel" helyett általában csak röviden a "majdnem biztos határeloszlás tétel" kifejezést használjuk.

[9]A dolgozat során a folyamatoknál általában külön nem jelezzük a véletlentől való függésüket, azaz eltekintünk az $X_n(t,\omega)$ ($\omega \in \Omega$, ahol $(\Omega, A, \mathbb{P})$ a háttérben álló valószínűségi mező), írásmódtól, helyette az esetek nagy részében az $X_n(t)$ egyszerűsített jelöléssel élünk.

egyenletes eloszlású valószínűségi változók.

Az $Y_n(t)$ sztenderd Wiener-folyamathoz, illetve a $Z_n(t)$ Brown-hídhoz való konvergenciájáról bizonyítunk majdnem biztos határeloszlás-tételt (majdnem biztos Donsker-tétel[10], illetve hasonló eredmény az empirikus folyamatra).

A majdnem biztos határeloszlás-tételek egy további általánosítását jelenti Fazekas és Rychlik mezőkre vonatkozó eredménye [33]: a szerzők mezőkre általánosítják a [32]-beli eredményeket. Megjegyzendő, hogy a [33]-ben foglalt eredmény korántsem triviális következménye a [32]-ben foglaltaknak, hiszen a majdnem biztos konvergencia nem metrizálható.

A fentebb említett [33]-beli eredmény ezen dolgozatnak a 3. fejezetében kerül alkalmazásra, ahol mezők esetén vizsgáljuk konvergenciát (Túri, [72]) az $L^p([0,1]^d)$, $1 \le p < \infty$ térben az

$$Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} S_{[\mathbf{nt}]}, \quad \text{ha } \mathbf{t} \in [0,1]^d,$$

illetve a

$$Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{i} \le \mathbf{n}} (\mathbb{I}\{\mathbf{U}_{\mathbf{i}} \le \mathbf{t}\} - |\mathbf{t}|), \quad \text{ha } \mathbf{t} \in [0,1]^d$$

folyamatok konvergenciáival kapcsolatban, ahol a $d, h \in \mathbb{N}$ rögzítettek, továbbá az $\mathbf{U}_{\mathbf{i}}$, $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^h$ független, egyenletes eloszlású valószínűségi változók a $[0,1]^d$-n.

Belátjuk, hogy az $Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})$ és a $Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})$ folyamatok esetén is fennáll a majdnem biztos határeloszlás-tétel: a $Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})$ esetén a határeloszlás a sztenderd d-paraméterű Wiener-folyamat, míg a $Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})$ esetén a határeloszlás a d-dimenziós Brown-híd. Eredményeink bizonyításánál felhasználásra kerül Ivanov [44] eredménye.

Megjegyezzük, hogy a 2. fejezetben leírtak következnek a 3. fejezetben ismertetésre került tételekből, azonban az időrendet tekintve a kutatás során először a 2. fejezet eredményei adódtak (Túri [74], [73]), majd a további vizsgálódások után születettek meg a mezőkre vonatkozó, a 3. fejezetben ismertetésre kerülő eredmények (Túri [72]).

[10]Monroe D. Donsker nevéhez fűződik a központi határoloszlás-tétel funkcionális alakjának bevezetése, illetve bizonyítása [21], amelyre Donsker-féle invariancia törvényként vagy funkcionális határeloszlás-tételként is szoktak hivatkozni.

Az 4. fejezetben majdnem biztos határeloszlástételek integrál alakú verziói kerülnek bemutatásra, ahol a határfolyamat Poisson-, illetve normális eloszlást követ. A tételek Túri [71]-ben megjelent publikációján alapulnak.

A 4. fejezetben először a

$$\xi'(t) = \sum_{i=1}^{[t]} \mathbb{I}_{\left[0,\frac{1}{t}\right]}(\xi_i)$$

folyamatot vizsgáljuk, illetve annak transzformáltjával kapcsolatban mondunk ki majdnem biztos határeloszlás-tételt, ahol a ξ_i, $i \in \mathbb{N}$ független, egyenletes eloszlású valószínűségi változók a $[0,1]$ intervallumon. Belátjuk, hogy ha az $f(t), t \geq 1$ olyan függvény, amelyre teljesül, hogy az

$$\frac{f(t)}{t^\beta}$$

módon definiált függvény monoton növekvő valamely $\beta > 0$ esetén és a $\xi(t)$ folyamatot a $\xi(t) = \xi'(f(t))$, $1 \leq t$ módon határozzuk meg, akkor fennáll a

$$\frac{1}{\log(T)} \int_1^T \delta_{\xi(t,\omega)} \frac{dt}{t} \xrightarrow{w} \mu_\pi, \quad \text{ha } T \to \infty$$

konvergencia majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén, ahol π-vel jelöltük a sztenderd (azaz $\mathbb{E}\pi = 1$) Poisson valószínűségi változót, illetőleg μ_π-vel jelöltük annak eloszlását.[11]

A 4. fejezet második részében definiáljuk a

$$\frac{V(f(t))}{(f(t))^{1/2}}, \quad \text{ha } 0 \leq t$$

folyamatot, ahol a $V(t)$ egy centrált, homogén, független növekményű, véges varianciájú folyamat, az f függvény pedig ugyanazon tulajdonságú, mint fent.

Belátjuk, hogy ekkor fennáll az

$$\frac{1}{\log(T)} \int_1^T \delta_{\frac{V(f(t),\omega)}{\sqrt{f(t)}}} \frac{dt}{t} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, K(\infty)), \quad \text{ha } T \to \infty$$

konvergencia majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén, ahol $K(t)$ a Kolmogorov-reprezentációban szereplő monoton növekvő, korlátos függvény úgy, hogy

[11] A dolgozatban esetenként μ_ξ-vel jelöljük a ξ valószínűségi változó eloszlását.

$K(-\infty) = 0$, továbbá $\mathcal{N}(0, K(\infty))$-nel jelöltük a 0 várható értékű és $K(\infty)$ szórásnégyzetű normális eloszlást.

A 5. fejezetben az alábbi

$$\xi(t) = \frac{V(f(t))}{A(t)} - B(t), \quad 0 < t < \infty$$

folyamatra bizonyítunk majdnem biztos határeloszlástételt (a dolgozatban lásd az 5.2. tételt), ahol az $f\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$ rögzített, szigorúan monoton növekvő függvény, az $A\colon [0,\infty[\to]0,\infty[$ szintén rögzített függvény, míg a $B(t)$ függvényt úgy választjuk meg, hogy az $\xi(t)$ folyamat karakterisztikus függvényére bizonyos – később részletezendő – tulajdonságok teljesüljenek, a $V(t), t \geq 0$ pedig egy független, stacionárius növekményű folyamat.

Ekkor fennáll az alábbi

$$\frac{1}{\log(T)} \int_1^T \delta_{\xi(t,\omega)} \frac{dt}{t} \xrightarrow{w} \mu_Z, \quad \text{ha } T \to \infty$$

konvergencia majdnem biztosan, ahol a Z egy p-stabilis valószínűségi változót jelöl.

Annak bizonyításához, hogy fennáll a fenti majdnem biztos határeloszlástétel szükségünk lesz a fejezetben ismertetésre kerülő 5.1 .tételre is. A szóban forgó tétel kimondja, hogy ha adott az $\xi_1, \xi_2, \ldots$ Banach-térbeli független, azonos eloszlású valószínűségi változó sorozat és létezik olyan $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton növekvő, pozitív, valós sorozat, amelyre $\alpha \in]0,2[$ esetén fennáll, hogy

$$\frac{a_{nm}}{a_n} \leq C m^{\frac{1}{\alpha}+\tau_n} \quad n, m = 1, 2, \ldots$$

valamely $(\tau_n)_{n\geq 1}$ egy nemnegatív egész számokból álló sorozat esetén úgy, hogy $\lim_{n\to\infty} \tau_n = 0$, továbbá fennáll az

$$\mathbb{E}\|\xi_n\|^\beta < \infty$$

összefüggés bármely $\beta \in]0, \alpha[$ esetén és az

$$\left(\frac{S_{l_n}}{a_{l_n}} - b_{l_n} \right)_{n\geq 1},$$

azaz a valószínűségi változók részletösszegeinek részsorozatának valamely alkalmas sorozattal való normálása sztochasztikusan korlátos sorozatot képez, akkor bármely $\beta \in]0, \alpha[$ esetén fennáll a

$$\sup_n \mathbb{E}\left\|\frac{S_{l_n}}{a_{l_n}} - b_{l_n}\right\|^{\beta} < \infty$$

összefüggés, azaz a valószínűségi változók részletösszegeiből álló normált sorozat momentumainak szuprémuma véges.
A fejezet eredményei Túri [70]-ben publikált eredményein alapulnak.

A 6. fejezetben vizsgált problémák a pénzfeldobással kapcsolatosak: érmét dobunk fel egymás után[12] és az érmefeldobás során kialakuló leghosszabb tiszta szériák számát, illetve ezek határeloszlását vizsgáljuk. A fejezet első részében feltételezzük, hogy a pénzfeldobásnál használt érmék szabályosak (azaz $p = q = \frac{1}{2}$), majd a fejezet második részében vizsgáljuk azt az esetet, amikor a feldobott érmék nem szabályosak (azaz $p \neq q$).

Jelöljük N-nel azt, hogy hányszor dobunk az érmével.

A fejezetben először belátjuk, hogy ha $N \to \infty$ és $n \to \infty$ úgy, hogy

$$\frac{N}{2^{n+1}} \to \lambda > 0,$$

akkor fennáll az alábbi

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(\tilde{\xi}^*(n,N) = k) = \frac{e^{-2\lambda}(2\lambda)^k}{k!}$$

összefüggés, ahol $k = 0, 1, 2 \dots$, továbbá $\tilde{\xi}^*(n,N) = \tilde{\xi}^*(n,N,\omega)$ jelöli a legalább n hosszúságú diszjunkt tiszta fej vagy tiszta írás sorozatok számát.

A következő eredmény is a 6. fejezetben található: ha fennáll az előzőekben ismertetett $\frac{N}{2^{n+1}} \to \lambda > 0$ konvergencia $N \to \infty$ és $n \to \infty$ esetén, akkor teljesül a

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}(z^{\xi^*(n,N)}) = \exp\left(2\lambda\left(\frac{(1-\frac{1}{2})z}{1-\frac{1}{2}z} - 1\right)\right)$$

összefüggés, ahol $\xi^*(n,N) = \xi^*(n,N,\omega)$ jelöli az n hosszúságú tiszta fej vagy tiszta írás sorozatok számát.

A 6. fejezetben azt is belátjuk, hogy $0 < x < \infty$ esetén fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\tau^*(n)}{2^{n+1}} \le x\right) = 1 - e^{-2x}$$

[12]Mindezt formalizálva: tekintsük a $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változókat, ahol a $\{\xi_i = 1\}, i = 1, 2, \dots$ azt az eseményt jelöli, hogy fejet dobunk, míg az $\{\xi_i = 0\}, i = 1, 2, \dots$ azt az eseményt, hogy írást kapunk, továbbá legyen $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = p, i = 1, 2, \dots$ és $\mathbb{P}(\xi_i = 0) = q = 1 - p, i = 1, 2, \dots$.

összefüggés, ahol $\tau^*(n)$ az a legkisebb dobásszám, amely esetén a dobássorozatban egy n hosszúságú tiszta fej vagy egy n hosszúságú tiszta írás szériát kapunk, azaz

$$\tau^*(n) = \min\{N \mid \xi^*(n, N) > 0\}.$$

Ebben a fejezetben kerül ismertetésre az alábbi eredmény is: bármely k egész esetén fennáll a

$$\mathbb{P}(\mu^*(N) - [\mathrm{Log}(N-1)] < k) = \exp(-2^{-(k-\{\mathrm{Log}(N-1)\})}) + o(1)$$

összefüggés,[13] ahol $\mu^*(N) = \mu^*(N, \omega)$-val jelöltük a leghosszabb tiszta fej sorozatok vagy a leghosszabb tiszta írás sorozatok hosszát az N dobásból, azaz

$$\mu^*(N) = \max\{n \mid \xi^*(n, N) > 0\}.$$

A hatodik fejezet második részében nem szabályos érmékkel végezzük a pénzfeldobást, azaz azt az esetet vizsgáljuk, amikor a $p > q$ eset áll fenn.

Belátjuk, hogy bármely $0 < x < \infty$ esetén fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\tau^*(n) q p^n \le x) = 1 - e^{-x}$$

összefüggés.

A fejezet végén igazoljuk az alábbi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \mathbb{I}(\mu^*(i) - \mathrm{Log}\, i < t) = \begin{cases} \int_t^{t+1} \exp\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^y\right] dy, & \text{ha } \ p = \frac{1}{2} \\ \int_t^{t+1} \exp\left[-qp^y\right] dy, & \text{ha } \ p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

majdnem biztos határeloszlás-tételt.

A fejezetben ismertetésre kerülő eredmények Földes [35], Móri [54], Muselli [57] továbbá Túri [69] eredményeire támaszkodnak.

A 7. fejezetben a véletlen elhelyezésekkel foglalkozunk (Fazekas-Chuprunov-Túri [30]). A véletlen elhelyezést a következőképpen modellezhetjük: n darab labdát helyezzünk el egymásután, egymástól függetlenül N darab dobozba és jelöljük $\mu_r(n, N)$-nel azon dobozok számát, amelyek pontosan r darab labdát tartalmaznak.

[13] A dolgozatban Log jelöli az $1/p$ alakú logaritmust, ahol p annak a valószínűsége, hogy fejet dobunk az érmével. Természetesen, ha az érme szabályos, akkor a kérdéses logaritmus kettes alapú.

$\mu_r(n,N)$ reprezentálható $\xi,\xi_i, i\in\mathbb{N}$ független, a $[0,1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változókkal: legyen $n\in\mathbb{N}$ és $A_{(0)}=\{1,2,\dots,n\}$. Ekkor a

$$\mu_r(n,N)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{|A|=r,A\subset A_{(0)}}\prod_{j\in A}\mathbb{I}_{\{\xi_j\in\triangle_i\}}\prod_{j\in A_{(0)}\setminus A}\mathbb{I}_{\{\xi_j\notin\triangle_i\}}$$

kifejezés – összhangban a bevezetésben leírtakkal – azon dobozok számát adja, amelyek pontosan r darab golyót tartalmaznak, ahol $\mathbb{I}_B$-vel jelöltük a B halmaz indikátorfüggvényét, továbbá $\triangle_i$ jelöli a $[0,1]$ intervallum $\triangle_i=\triangle_{N,i}=\left[\frac{i-1}{N},\frac{i}{N}\right[, 1\le i\le N$ beosztását, a $\triangle_i, i=1,2\dots,N$ intervallumokra úgy tekintünk, mint dobozokra, továbbá a ξ_i-ket tekintjük a ξ realizációinak. Mindegyik realizáció egy véletlen elhelyezés valamelyik dobozba: a $\xi_j\in\triangle_i$ jelentése, hogy a j-edik labda az i-edik dobozba esik.

Belátjuk a fejezetben az alábbi egyenlőtlenséget, amely segítségével – felhasználva a Fazekas-Chuprunov eredményt – több majdnem biztos határeloszlás-tételt is bizonyítunk. Az egyenlőtlenség a következő: tegyük fel, hogy $0<k<n$, $0<r\le n$ és az N rögzített. Ekkor fennáll, hogy

$$\mathbb{E}(\zeta_n-\zeta_n^k)^2\le ck\alpha^{r-1}\left[\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n+k}\alpha^r+\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-r}\right](\alpha+1),$$

ahol $c<\infty$ és nem függ n-től, N-től és k-tól, azonban függhet r-től, továbbá $\zeta_n=\mu_r(n,N)-\mathbb{E}\mu_r(n,N)$ és $\zeta_n^k=\mathbb{E}(\zeta_n|\mathcal{F}_{nk})$ és $\mathcal{F}_{nk}$ jelöli az $\xi_{k+1},\dots,\xi_n$ valószínűségi változók által generált σ-algebrát.

A fejezet 7.4. tétele az alábbi majdnem biztos határeloszlás-tétel.

Legyen az $r\ge 2$, $0<\lambda_1<\lambda_2<\infty$ rögzített, továbbá tekintsük az alábbi

$$T_n=\left\{(k,K)\in\mathbb{N}^2: k\le n, \lambda_1\le\frac{k}{K^{1-\frac{1}{r}}}\le\lambda_2\right\}$$

tartományt $\mathbb{N}^2$-ben.

Legyen

$$Q_n(\omega)=\frac{1}{\frac{r}{r-1}(\lambda_2-\lambda_1)\log n}\sum_{(k,K)\in T_n}\frac{1}{K^{2-\frac{1}{r}}}\delta_{\mu_r(n,N)(\omega)}.$$

Ekkor $n\to\infty$ esetén

$$Q_n(\omega)\Rightarrow\mu_\tau$$

majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén, ahol τ olyan valószínűségi változó, amelynek eloszlása az alábbi

$$\mathbb{P}(\tau = l) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{l!} \left(\frac{x^r}{r!} \right)^l e^{-\frac{x^r}{r!}} dx,$$

alakú, ahol $l = 0, 1, \ldots$.

Ebben a fejezetben kerül bizonyításra a következő majdnem biztos határeloszlástétel is.

Legyen az $r \geq 0$ rögzített, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$ és

$$Q^{(r)}_{n,N}(\omega) = \frac{1}{(\log \alpha_2 - \log \alpha_1) \log n} \sum_{k \leq n} \sum_{\{K : K \leq N, \alpha_1 \leq \frac{k}{K} \leq \alpha_2\}} \frac{1}{kK} \delta_{S^{(r)}_{k,K}(\omega)}.$$

Ekkor, ha $n, N \to \infty$ úgy, hogy $\alpha_1 \leq \frac{n}{N} \leq \alpha_2$, akkor

$$Q^{(r)}_{n,N}(\omega) \Rightarrow \gamma$$

majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén, ahol γ-val jelöltük a sztenderd normális eloszlást.

A 8. fejezetben is a véletlen elhelyezéssel foglalkozunk, itt azonban többszöri véletlen elhelyezést tekintünk. A következő modellt vizsgáljuk: helyezzünk el N dobozban egymás után, egymástól függetlenül labdákat. A golyók elhelyezése során a golyók minden egyes elhelyezésnél minden dobozba $1/N$ valószínűséggel esnek. Egy rögzített periódus alatt (például ez a rögzített periódus lehet egy nap) elhelyezünk m darab labdát és ezt a kísérletet ismételjük n napon keresztül. Jelölje p_q annak a valószínűségét, hogy nem sikerült q darab labdánál többet elhelyezni az N darab doboz egyikében sem az n nap során.

Belátjuk, hogy ha $m, n, N \to \infty$ úgy, hogy fennállnak az $\frac{n}{N^q}\binom{m}{q+1} \to \alpha$ és az $\frac{m^2}{N} \to 0$ feltételek, ahol q egy rögzített egész szám, akkor teljesül a

$$\lim p_l = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad 0 \leq l < q, \\ e^{-\alpha}, & \text{ha} \quad l = q, \\ 1, & \text{ha} \quad l > q. \end{cases}$$

határérték összefüggés (a dolgozat 8.2. tétele).

Ebben a fejezetben alsó- és felső becslést is adunk a fenti valószínűségekre, azaz belátjuk, hogy teljesülnek a

$$\left(1 - \frac{1}{N^l}\binom{m}{l+1}\right)^n \leq p_l \leq \left(1 - \frac{1}{N^l}\binom{m}{l+1}(1-\varepsilon)\right)^n.$$

összefüggések.

A 8. fejezet eredményei a Fazekas-Túri [34] eredményeken alapulnak.

A 9. fejezetben megmutatjuk, hogy a Brosamler-Schatte-féle klasszikus eredmény hogyan következik az újabb Berkes-Csáki, illetve Fazekas-Rychlik-féle eredményekből.

A dolgozat végén található az összegzés, a dolgozat szerzőjének összes publikációja, a témával kapcsolatban megjelent publikációi, a szerző munkáira történt eddigi hivatkozások, a tudományos előadások, valamint a doktori értekezés során felhasznált összes irodalom.

2. fejezet

Majdnem biztos határeloszlás-tételek az $L^p(]0,1[)$ térben, ahol $1 \leq p < \infty$

Ebben a fejezetben két folyamatot vizsgálunk.

Az egyik az

$$Y_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k \leq [tn]} \xi_k \tag{2.1}$$

folyamat, ahol $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású, valós értékű valószínűségi változók úgy, hogy $\mathbb{E}\xi_1 = 0$, $\mathbb{D}^2\xi_1 = \sigma^2$ és $\mathbb{E}|\xi_1|^p < \infty$, továbbá $[.]$ jelöli az egészrészfüggvényt.

A másik a

$$Z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i) - t), \tag{2.2}$$

empirikus folyamat, ahol az U_i-k ($i = 1, 2, \ldots$) független, a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók.

A fejezetben mindkét folyamattal kapcsolatban majdnem biztos határeloszlás-tételt bizonyítunk.

Megjegyezzük, hogy a fejezetben ismertetésre kerülő eredmények először az $L^2(]0,1[)$ térben lettek bizonyítva (Túri, [74]), majd ezután sikerült belátni az eredményeket az $L^p(]0,1[)$, $1 \leq p < \infty$ térben is (Túri, [73]).

A két folyamattal kapcsolatos majdnem biztos határeloszlás-tételek belátásához szükségünk lesz az alábbi eredményre is.

2.1. tétel. *(Fazekas, Rychlik, [32], Theorem 1.1) Jelölje δ_x az $x \in \mathbb{R}$ pontra koncentrált eloszlást* [14]*, jelölje továbbá μ_ξ a ξ valószínűségi változó eloszlását. Legyen (M,ρ) egy teljes, szeparábilis metrikus tér és ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ egy M-beli valószínűségi változó sorozat. Tegyük fel, hogy léteznek olyan $C > 0$, $\varepsilon > 0$ valós számok és $(c_n)_{n\geq 1}$ egy pozitív tagú, monoton növekvő sorozat úgy, hogy $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ és $c_{n+1}/c_n = O(1)$. Továbbá tegyük fel, hogy léteznek $\xi_{k,l}$, $k,l \in \mathbb{N}$, $k < l$, M-értékű valószínűségi változók úgy, hogy a ξ_k és a $\xi_{k,l}$ valószínűségi változók függetlenek, ha $k < l$ és fennáll az alábbi*

$$\mathbb{E}\rho(\xi_{k,l}, \xi_l) \leq C \left(\frac{c_k}{c_l}\right)^\beta \tag{2.3}$$

összefüggés $k < l$ esetén, ahol $\beta > 0$. Legyen továbbá a $(d_k)_{k\geq 1}$ olyan sorozat, hogy $0 \leq d_k \leq \log(c_{k+1}/c_k)$ és tegyük fel, hogy $\sum_{k=1}^\infty d_k = \infty$. Legyen $D_n = \sum_{k=1}^n d_k$.

Ekkor bármely, az M Borel szigma-algebráján értelmezett μ eloszlás esetén a következő két állítás ekvivalens

$$\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^n d_k \delta_{\xi_k(\omega)} \Rightarrow \mu, \quad \text{ha } n \to \infty$$

$\mathbb{P}$-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén;

$$\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^n d_k \mu_{\xi_k} \Rightarrow \mu, \quad \text{ha } n \to \infty.$$

□

[14] Az egy pontra koncentrált eloszlás jelentése: $\delta_x(B) = 1$, ha $x \in B$ és $\delta_x(B) = 0$, ha $x \notin B$ bármely M-beli B Borel-halmaz esetén.

2.1. A majdnem biztos Donsker-tétel az $L^p(]0,1[)$ térben

Tekintsük tehát az

$$Y_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]} \tag{2.4}$$

folyamatot, ahol $S_0 = 0$, $S_k = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_k$, $k \geq 1$ és $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású, valós értékű valószínűségi változók úgy, hogy $\mathbb{E}\xi_1 = 0$, $\mathbb{D}^2\xi_1 = \sigma^2$ és $\mathbb{E}|\xi_1|^p < \infty$, ahol $1 \leq p < \infty$. Itt is $[.]$ jelöli az egészrészfüggvényt.

Ebben az alfejezetben az $L^p(]0,1[)$ térben bizonyítunk be majdnem biztos határeloszlás-tételt az $Y_n(t)$ folyamatra.

A bizonyításokhoz szükségünk lesz az alábbi eredményekre, amelyek közül az első a Marcinkiewicz-Zygmund-egyenlőtlenség.

2.2. tétel. *(Marcinkiewicz, Zygmund, [15]) Tegyük fel, hogy $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független valószínűségi változók úgy, hogy $\mathbb{E}\xi_n = 0$. Ekkor bármely $p \geq 1$ esetén létezik olyan csak p-től függő C_p pozitív konstans, amellyel* [15]

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_p \leq C_p \left\| \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right)^{1/2} \right\|_p .$$

□

A következő eredmény is felhasználásra kerül a fejezetben a későbbiekben.

2.3. tétel. *(Araujo, Giné, [2]) Tegyük fel, hogy $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók úgy, hogy $\mathbb{E}\xi_n = 0$, $\mathbb{E}|\xi_1|^p < \infty$, ha $2 \leq p < \infty$ és $\mathbb{E}|\xi_1|^2 < \infty$, ha $1 \leq p \leq 2$ továbbá legyen $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$. Ekkor $\mathbb{E}|S_n| = O(n^{p/2})$.*

□

[15] Itt a norma $\|\xi\|_p = (\mathbb{E}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}}$ alakú.

Az Oliveira-Suquet-féle állítás is felhasználjuk a bizonyítások során.

2.4. tétel. *(Oliveira, Suquet, [58]) Legyen $(\xi_n(t), 1 \le n)$ egy $L^p(]0,1[)$-beli $(1 \le p < \infty)$ véletlen sorozat. Tegyük fel továbbá, hogy teljesülnek az alábbi*
(i) valamely $\gamma > 1$ esetén $\sup_{n\ge 1} \mathbb{E}\|\xi_n\|_1^\gamma < \infty$,
(ii) $\lim_{h\to 0} \sup_{n\ge 1} \mathbb{E}\|\xi_n(.+h) - \xi_n(.)\|_p^p = 0$
összefüggések.
Ekkor a $(\xi_n(t), 1 \le n)$ folyamat-sorozat feszes az $L^p(]0,1[)$ térben.

□

2.5. tétel. *(Túri, [73], Proposition 2.1.) A (2.4)-ben definiált $(Y_n(t),\ 1 \le n)$ folyamat gyengén konvergál a sztenderd Wiener-folyamathoz az $L^p(]0,1[)$ térben, ahol $1 \le p < \infty$.*

Bizonyítás. A [40]-ban található 6.2.2. tétel miatt elegendő azt belátnunk, hogy az $(Y_n(t), 1 \le n)$ család feszes, továbbá azt, hogy fennáll az $\langle f, Y_n(t)\rangle \Rightarrow \langle f, W\rangle$ konvergencia bármely $f \in L^q(]0,1[)$ esetén, ahol $L^q(]0,1[)$ az $L^p(]0,1[)$ tér duális tere.

A $\int_0^1 Y_n(t)f(t)dt$ eloszlásbeli konvergenciája a $\int_0^1 W(t)f(t)dt$-hez bármely $L^q(]0,1[)$ duális térbeli f függvény esetén abból adódik, hogy az $\int_0^1 Y_n(t)f(t)dt$ gyengén konvergál a nulla várható értékű és $\int_0^1\int_0^1 \min\{s,t\}f(s)f(t)dsdt$ varianciájú normális eloszláshoz. Azonban éppen ez az eloszlása a $\int_0^1 W(t)f(t)dt$ valószínűségi változónak.

A feszesség bizonyítását pedig úgy végezzük, hogy belátjuk, hogy teljesülnek a 2.4. tétel feltételei, azaz megmutatjuk, hogy fennál (i) és (ii).

Először megmutatjuk, hogy (i) feltétel a $\gamma = 2$ választással teljesül, azaz $\sup_{n\ge 1} \mathbb{E}\|Y_n\|_1^2 < \infty$, ami az alábbi

$$\sup_{n\ge 1} \mathbb{E}\|Y_n\|_1^2 = \sup_{n\ge 1} \mathbb{E}\left\|\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_{[nt]}\right\|_1^2 = \sup_{n\ge 1} \mathbb{E}\left(\int_0^1 \left|\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_{[nt]}\right| dt\right)^2$$
$$= \sup_{n\ge 1} \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\int_{i/n}^{(i+1)/n} \left|\frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}}\right| dt\right)^2 = \sup_{n\ge 1} \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|S_i|\right)^2$$
$$\le \sup_{n\ge 1} \frac{1}{\sigma^2 n}\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n-1}|S_i|^2\right) = \sup_{n\ge 1}\frac{1}{\sigma^2 n^2}\sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{E}|S_i|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma^2 n^2}\sigma^2 \sum_{i=0}^{n-1} i = \sup_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}\right)\\
&= \sup_{n\geq 1}\left(\frac{n-1}{2n}\right) < \infty
\end{aligned}
$$

számolásból adódik.

Az (ii) feltétel teljesülése pedig az alábbi

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\|Y_n(t+h)-Y_n(t)\|_p^p &= \mathbb{E}\int_0^1 |Y_n(t+h)-Y_n(t)|^p dt = \\
&= \mathbb{E}\int_0^{1-h}\left|\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_{[n(t+h)]} - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_{[nt]}\right|^p dt + \\
&\quad + \mathbb{E}\int_{1-h}^1 \left|\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_{[nt]}\right|^p dt = \\
&= \int_0^{1-h}\mathbb{E}\left|\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(\xi_{[n(t+h)]}+\cdots+\xi_{[nt]+1})\right|^p dt + \\
&\quad + \int_{1-h}^1 \mathbb{E}\left|\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_{[nt]}\right|^p dt = \\
&= \int_0^{1-h}\frac{1}{n^{p/2}\sigma^p}\mathbb{E}|\xi_{[n(t+h)]}+\cdots+\xi_{[nt]+1}|^p dt + \\
&\quad + \int_{1-h}^1 \frac{1}{n^{p/2}\sigma^p}\mathbb{E}|S_{[nt]}|^p dt \leq \\
&\leq \int_0^{1-h}\frac{1}{n^{p/2}\sigma^p}C([n(t+h)]-[nt])^{p/2} dt \\
&\quad + \int_{1-h}^1 \frac{1}{n^{p/2}\sigma^p}C[nt]^{p/2} dt \leq \\
&\leq \frac{C}{n^{p/2}\sigma^p}\int_0^1 ([\{nt\}+\{nh\}]+[nh])^{p/2} dt + \frac{C}{n^{p/2}}hn^{p/2} \leq \\
&\leq C^* h \to 0,
\end{aligned}
$$

ha $h \to 0$ kalkulációból adódik, amivel a bizonyítás teljes.

□

Ezután kimondhatjuk a következő a majdnem biztos határeloszlás-tételt (2.4) sorozatra az $L^p(]0,1[)$ $(1 \leq p < \infty)$ térben.

2.6. tétel. *(Túri, [73], Theorem 2.1) Tegyük fel, hogy $1 \le p < \infty$. Ekkor fennáll az alábbi*

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\delta_{Y_k(.,\omega)} \Rightarrow \mu_W$$

konvergencia $n \to \infty$ esetén $\mathbb{P}$-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén az $L^p(]0,1[)$ térben, ahol W a sztenderd Wiener-folyamat és $Y_k(t,\omega) = Y_k(t)$ a (2.4)-ben definiált folyamat.

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a 2.1. tétel feltételei teljesülnek. Az ismeretes, hogy az $L^p(]0,1[)$ tér szeparábilis és teljes.

Definiáljuk a következő

$$Y_{k,n}(t) = \left(Y_n(t) - \frac{S_k}{\sigma\sqrt{n}}\right)\mathbb{I}_{]k/n,1]}(t), \qquad k = 1,2,\ldots,n-1,\ t \in [0,1]$$

folyamatot, ahol $\mathbb{I}_A$ jelöli az A halmaz indikátorfüggvényét. Ekkor az $Y_{k,n}$ és az Y_k folyamatok $k < n$ esetén függetlenek. Teljesül továbbá a (2.3) feltétel, hiszen

$$\mathbb{E}\rho(Y_n, Y_{k,n}) = \mathbb{E}\left(\int_0^1 \left|Y_n(t) - \left(Y_n(t) - \frac{S_k}{\sigma\sqrt{n}}\right)\mathbb{I}_{]k/n,1]}(t)\right|^p dt\right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\mathbb{E}\int_0^1 \left|Y_n(t) - \left(Y_n(t) - \frac{S_k}{\sigma\sqrt{n}}\right)\mathbb{I}_{]k/n,1]}(t)\right|^p dt\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\mathbb{E}\left(\left|\frac{S_1}{\sigma\sqrt{n}}\right|^p \frac{1}{n} + \left|\frac{S_2}{\sigma\sqrt{n}}\right|^p \frac{1}{n} + \cdots + \left|\frac{S_{k-1}}{\sigma\sqrt{n}}\right|^p \frac{1}{n} + \left|\frac{S_k}{\sigma\sqrt{n}}\right|^p \frac{n-k}{n}\right)\right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{\sigma^p n^{p/2} n} C(1^{p/2} + 2^{p/2} + \cdots + (k-1)^{p/2} + k^{p/2}(n-k)\right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\frac{C}{\sigma^p n^{p/2} n} k^{p/2}[(k-1) + (n-k)]\right)^{1/p} \le$$

$$\le C^* \left(\frac{k^{p/2}}{n^{p/2}}\right)^{1/p} = C^* \sqrt{\frac{k}{n}},$$

azaz beláttuk, hogy teljesülnek a 2.1. tétel feltételei, így a tétel bizonyítása teljes.

□

2.2. Az empirikus folyamat az $L^p(]0,1[)$ térben

Ebben a fejezetben a (2.2)-ben definiált

$$Z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i) - t) \tag{2.5}$$

empirikus folyamatot vizsgáljuk.

Először a Z_n folyamattal kapcsolatban belátjuk az alábbi állítást, amelyre szükségünk lesz a későbbiekben.

2.7. tétel. *(Túri, [73], Proposition 3.1) A $(Z_n(t), n \geq 1)$ folyamat gyengén konvergál a Brown-hídhoz az $L^p(]0,1[)$ térben.*

Bizonyítás. Tekintsük az alábbi kalkulációt

$$\mathbb{E}\|Z_n\|_2^2 = \mathbb{E}\left\|\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i) - t)\right\|_2^2 = \mathbb{E}\int_0^1 \left|\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i) - t)\right|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{n}\mathbb{E}\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{n} (\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i) - t)\right|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^1 \mathbb{E}(\xi - nt)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^1 nt(1-t) dt = \frac{1}{6},$$

ahol a ξ valószínűségi változó t és n paraméterű binomiális eloszlást követ.

Ezután megmutatjuk, hogy a 2.4. tétel (ii) feltételei is fennállnak.

Valóban, hiszen

$$\mathbb{E}\|Z_n(.+h) - Z_n(.)\|_p^p = \mathbb{E}\int_0^1 |Z_n(t+h) - Z_n(t)|^p dt =$$

$$= \mathbb{E}\int_0^{1-h} |Z_n(t+h) - Z_n(t)|^p dt + \mathbb{E}\int_{1-h}^{1} |Z_n(t)|^p dt =$$

$$= \mathbb{E}\int_0^{1-h}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{I}_{[0,t+h]}(U_i)-(t+h))-\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i)-t)\right|^p dt+$$

$$+\mathbb{E}\int_{1-h}^{1}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i)-t)\right|^p dt=$$

$$=\mathbb{E}\frac{1}{n^{p/2}}\int_0^{1-h}\left|\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{I}_{]t,t+h]}(U_i)-h)\right|^p dt+$$

$$+\mathbb{E}\frac{1}{n^{p/2}}\int_{1-h}^{1}\left|\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i)-t)\right|^p dt=$$

$$=\frac{1}{n^{p/2}}\int_0^{1-h}\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{I}_{]t,t+h]}(U_i)-h)\right|^p dt+$$

$$+\frac{1}{n^{p/2}}\int_{1-h}^{1}\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i)-t)\right|^p dt$$

$$\le\frac{1}{n^{p/2}}\int_0^{1-h}A_p^p\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{I}_{]t,t+h]}(U_i)-h)^2\right)^{1/2}\right)^p dt+$$

$$+\frac{1}{n^{p/2}}\int_{1-h}^{1}B_p^p\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i)-t)^2\right)^{1/2}\right)^p dt=$$

$$=\frac{1}{n^{p/2}}\int_0^{1-h}A_p^p\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{I}_{]t,t+h]}(U_i)-h)^2\right)^{p/2} dt+$$

$$+\frac{1}{n^{p/2}}\int_{1-h}^{1}B_p^p\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i)-t)^2\right)^{p/2} dt,$$

ahol felhasználásra került a Marcinkiewicz-Zygmund-egyenlőtlenség (2.2. tétel).

Ezután két esetet különböztetünk meg.

Az első esetben feltesszük, hogy $1 \leq p \leq 2$.

Ekkor

$$\frac{1}{n^{p/2}} \int_0^{1-h} A_p^p \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n (\mathbb{I}_{]t,t+h]}(U_i) - h)^2 \right)^{p/2} dt +$$

$$+ \frac{1}{n^{p/2}} \int_{1-h}^1 B_p^p \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n (\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i) - t)^2 \right)^{p/2} dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^{p/2}} \int_0^{1-h} A_p^p \left(\mathbb{E} \sum_{i=1}^n (\mathbb{I}_{]t,t+h]}(U_i) - h)^2 \right)^{p/2} dt +$$

$$+ \frac{1}{n^{p/2}} \int_{1-h}^1 B_p^p \left(\mathbb{E} \sum_{i=1}^n (\mathbb{I}_{]0,t]}(U_i) - t)^2 \right)^{p/2} dt =$$

$$= \frac{A_p^p}{n^{p/2}} \int_0^{1-h} (\mathbb{E}(\xi - nh)^2)^{p/2} dt + \frac{B_p^p}{n^{p/2}} \int_{1-h}^1 (\mathbb{E}(\eta - nt)^2)^{p/2} dt =$$

$$= \frac{A_p^p}{n^{p/2}} \int_0^{1-h} (nh(1-h))^{p/2} dt + \frac{B_p^p}{n^{p/2}} \int_{1-h}^1 (nt(1-t))^{p/2} dt =$$

$$= A_p^p h^{p/2} (1-h)^{\frac{p+2}{2}} + B_p^p \int_{1-h}^1 (t(1-t))^{p/2} dt \leq$$

$$\leq A_p^p h^{p/2} (1-h)^{\frac{p+2}{2}} + B_p^p h^{\frac{p+2}{2}} \to 0,$$

ha $h \to 0$, ahol a ξ h és n paraméterű, míg az η t és n paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változók.

A második esetben feltesszük, hogy fennáll a $2 < p < \infty$ összefüggés.

Ekkor

$$\frac{1}{n^{p/2}} \int_0^{1-h} A_p^p \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n (\mathbb{I}_{]t,t+h]}(U_i) - h)^2 \right)^{p/2} dt +$$

$$+ \frac{1}{n^{p/2}} \int_{1-h}^1 B_p^p \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n (\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i) - t)^2 \right)^{p/2} dt \leq$$

$$\frac{1}{n^{p/2}}\int_0^{1-h} A_p^p \mathbb{E}\left(n\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (\mathbb{I}_{]t,t+h]}(U_i)-h)^2\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{p/2} dt+$$

$$+\frac{1}{n^{p/2}}\int_{1-h}^{1} B_p^p \mathbb{E}\left(n\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i)-t)^2\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{p/2} dt \leq$$

$$\leq \frac{A_p^p}{n^{p/2}}\int_0^{1-h} \mathbb{E}\left(n^{\frac{p-2}{p}}\left(\sum_{i=1}^n |\mathbb{I}_{]t,t+h]}(U_i)-h|^p\right)^{2/p}\right)^{p/2} dt+$$

$$+\frac{B_p^p}{n^{p/2}}\int_{1-h}^{1} \mathbb{E}\left(n^{\frac{p-2}{p}}\left(\sum_{i=1}^n |\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i)-t|^p\right)^{2/p}\right)^{p/2} dt =$$

$$= \frac{A_p^p}{n^{p/2}}n^{\frac{p-2}{2}}\int_0^{1-h} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n |\mathbb{I}_{]t,t+h]}(U_i)-h|^p\right) dt+$$

$$+\frac{B_p^p}{n^{p/2}}n^{\frac{p-2}{2}}\int_{1-h}^{1} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n |\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i)-t|^p\right) dt =$$

$$= \frac{A_p^p}{n}\int_0^{1-h}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}|\mathbb{I}_{]t,t+h]}(U_i)-h|^p dt+$$

$$+\frac{B_p^p}{n}\int_{1-h}^{1}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}|\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i)-t|^p dt =$$

$$= A_p^p\int_0^{1-h} \mathbb{E}|\mathbb{I}_{]t,t+h]}(U_i)-h|^p dt + B_p^p\int_{1-h}^{1} \mathbb{E}|\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i)-t|^p dt$$

$$= A_p^p\int_0^{1-h} \mathbb{E}|\xi-h|^p dt + B_p^p\int_{1-h}^{1} \mathbb{E}|\eta-t|^p dt$$

$$= A_p^p[(1-h)^{p+1}h+h^p(1-h)^2] + B_p^p\int_{1-h}^{1}[(1-t)^p t+t^p(1-t)]dt \leq$$

$$\leq A_p^p[(1-h)^{p+1}h+h^p(1-h)^2] + B_p^p\int_{1-h}^{1} 2dt =$$

$$= A_p^p[(1-h)^{p+1}h + h^p(1-h)^2] + 2B_p^p h \to 0,$$

ha $h \to 0$, ahol a ξ és az η valószínűségi változók h és t paraméterű Bernoulli-eloszlást követnek. Ezzel a 2.7. tétel bizonyítása teljes.

□

Ezután rátérhetünk az empirikus folyamatra vonatkozó majdnem biztos határeloszlás-tétel ismertetésére.

2.8. tétel. *(Túri, [73], Theorem 3.1) Az $L^p(]0,1[)$ térben fennáll az alábbi*

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\delta_{Z_{k(.,\omega)}} \Rightarrow \mu_B,$$

konvergencia $\mathbb{P}$-majdnem biztosan, ahol B a Brown-híd és $Z_k(t,\omega) = Z_k(t)$ a (2.5)-ben definiált folyamat.

Bizonyítás. A bizonyításban belátjuk, hogy 2.1. tétel feltételei fennállnak. Az $L^p(]0,1[)$ tér szeparábilis és teljes, ezért a tétel ezen feltétele teljesül.

Definiáljuk az alábbi

$$Z_{k,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i) - t) - \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{k}(\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i) - t)$$

folyamatot.

Ekkor a $Z_{k,n}$ és a Z_k folyamatok függetlenek, ha $k < n$.

Az 2.1. tétel (2.3) feltétele is fennáll, hiszen

$$\mathbb{E}\rho(Z_n, Z_{k,n}) = \mathbb{E}\left(\int_0^1 \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{k}(\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i) - t)\right|^p dt\right)^{1/p}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{E}\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{k}(\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i) - t)\right|^p dt\right)^{1/p}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\int_0^1 \mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^{k}(\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i) - t)\right|^p dt\right)^{1/p}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\int_0^1 C_p^p \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{k}(\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i) - t)^2\right)^{1/2}\right)^p dt\right)^{1/p}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\int_0^1 C_p^p \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^k (\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i) - t)^2 \right)^{p/2} dt \right)^{1/p},$$

ahol felhasználtuk a Marcinkiewicz-Zygmund-egyenlőtlenséget.

Ezután két esetet különböztetünk meg.

Először az $1 \leq p \leq 2$ esetet vizsgáljuk.

Ekkor

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\int_0^1 C_p^p \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^k (\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i) - t)^2 \right)^{p/2} dt \right)^{1/p}$$
$$\leq \frac{C_p}{\sqrt{n}} \left(\int_0^1 \left(\mathbb{E} \sum_{i=1}^k (\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i) - t)^2 \right)^{p/2} dt \right)^{1/p}$$
$$= \frac{C_p}{\sqrt{n}} \left(\int_0^1 (\mathbb{E}(\xi - kt)^2)^{p/2} dt \right)^{1/p}$$
$$= \frac{C_p}{\sqrt{n}} \left(\int_0^1 (kt(1-t))^{p/2} dt \right)^{1/p} = C^* \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}},$$

ahol a ξ valószínűségi változó t és k paraméterű binomiális eloszlást követ.

Tekintsük most a második esetet, amikor $2 < p < \infty$.

Ekkor

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\int_0^1 C_p^p \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^k (\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i) - t)^2 \right)^{p/2} dt \right)^{1/p}$$
$$\leq \frac{C_p}{\sqrt{n}} \left(\int_0^1 \mathbb{E} \left(k \left(\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i) - t)^2 \right)^{p/2} \right)^{2/p} \right)^{p/2} dt \right)^{1/p}$$
$$= \frac{C_p}{\sqrt{n}} \left(\int_0^1 \mathbb{E} \left(k^{\frac{p-2}{p}} \left(\sum_{i=1}^k |\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i) - t|^p \right)^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{p}{2}} dt \right)^{1/p}$$

$$= \frac{C_p}{\sqrt{n}} \left(\int_0^1 \mathbb{E} \left(k^{\frac{p-2}{2}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i) - t|^p \right) \right) dt \right)^{1/p}$$

$$= \frac{C_p}{\sqrt{n}} \left(\int_0^1 k^{\frac{p-2}{2}} \left(\sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}|\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i) - t|^p \right) dt \right)^{1/p}$$

$$= \frac{C_p}{\sqrt{n}} \left(\int_0^1 k^{p/2} \mathbb{E}|\xi - t|^p dt \right)^{1/p}$$

$$= C_p \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}} \left(\int_0^1 \mathbb{E}|\xi - t|^p dt \right)^{1/p}$$

$$= C_p \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}} \left(\int_0^1 [(1-t)^p t + (1-t) t^p] dt \right)^{1/p}$$

$$= C_p \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}} 2^{1/p} = C^* \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}},$$

ahol a ξ valószínűségi változó t paraméterű Bernoulli-eloszlást követ. Ezzel a bizonyításunk teljes.

$\square$

3. fejezet

Majdnem biztos határeloszlás-tételek az $L^p([0,1]^d)$, $1 \le p < \infty$ térben

A dolgozat ezen része az előző fejezet általánosításának tekinthető, hiszen itt már mezőkön végezzük a vizsgálatokat: mezőkön bizonyítjuk be a Donsker-tétel majdnem biztos változatát, illetőleg az empirikus folyamatra is majdnem biztos határeloszlás-tételt bizonyítunk.

Fontosnak tartjuk azonban megjegyezni, hogy az itt kapott tételek bizonyításai teljesen más technikával történnek mint az előző fejezetekben megismert módszerek, továbbá az itt leírt eredmények időrendben később keletkeztek, illetve lettek publikálva (Túri, [72]), mint az előző fejezet eredményei (Túri, [74] és [73]). Természetesen a dolgozat előző, 2. fejezetében kapott eredmények speciális esetei az itt leírtaknak.

Vezessük be a szükséges jelöléseket, amelyek felhasználásra kerülnek a fejezetben. Legyenek $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_d)$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d)$, $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$. A $\mathbf{k}$ és az $\mathbf{n}$ vektorok szorzatát a $\mathbf{kn} = (k_1 n_1, k_2 n_2, \dots, k_d n_d)$ módon határozzuk meg. A $\mathbf{k} \le \mathbf{n}$ jelentése $k_i \le n_i$ minden $i = 1, \dots, d$ esetén. Az $[\mathbf{nt}]$ pedig jelentse a $([n_1 t_1], \dots, [n_d t_d])$ vektort. A max és a min függvények jelentése a következő: $\max \mathbf{k} = (\max k_1, \max k_2, \dots \max k_d)$ és $\min \mathbf{k} = (\min k_1, \min k_2, \dots \min k_d)$. Az $\mathbf{n} \to \infty$ jelentése: $n_i \to \infty$ minden $i = 1, \dots, d$ esetén. Legyen továbbá $|\mathbf{n}| = \prod_{i=1}^d n_i$ és $|\log \mathbf{n}| = \prod_{i=1}^d \log_+ n_i$, ahol $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, továbbá $x \ge e$ esetén $\log_+ x = \log x$ és $\log_+ x = 1$, ha $x < e$.

Először definiáljuk azokat a folyamatokat, amelyeknek a konvergenciáját vizsgáljuk a fejezetben.

Legyenek $\xi_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$ többindexes, független, azonos eloszlású valószínűségi változók úgy, hogy $\mathbb{E}\xi_{\mathbf{k}} = 0$ és $\mathbb{D}^2\xi_{\mathbf{k}} = 1$. Az $Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})$ folyamatot definiáljuk az alábbi módon:

$$Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{k} \leq [\mathbf{nt}]} \xi_{\mathbf{k}}, \tag{3.1}$$

ahol $\mathbf{t} \in [0,1]^d$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$.

A fejezetben a

$$Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{i} \leq \mathbf{n}} (\mathbb{I}\{\mathbf{U}_{\mathbf{i}} \leq \mathbf{t}\} - |\mathbf{t}|) \tag{3.2}$$

folyamatot is vizsgáljuk, ahol d és h rögzítettek, $\mathbf{t} \in [0,1]^d$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^h$ és az $\mathbf{U}_{\mathbf{i}}$-k, $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^h$ független, a $[0,1]^d$ d-dimenziós kockán egyenletes eloszlású valószínűségi vektorváltozók.

Ebben a fejezetben a fentiekben definiált $Y_{\mathbf{n}}$ és $Z_{\mathbf{n}}$ folyamatokra bizonyítunk majdnem biztos határeloszlás-tételt az $L^p([0,1]^d)$, $1 \leq p < \infty$ térben, ahol az előbbi folyamat esetén a határeloszlás a d-paraméterű Wiener-folyamat, míg az utóbbi folyamatnál a d-paraméterű Brown-híd lesz.

3.1. Majdnem biztos Donsker-tétel az $L^p([0,1]^d)$, $1 \le p < \infty$ térben

Ebben az alfejezetben a (3.1) folyamatot vizsgáljuk, amelyet célszerű az

$$Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} S_{[\mathbf{nt}]} \tag{3.3}$$

alakba írni, ahol $S_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{i} \le \mathbf{k}} \xi_{\mathbf{i}}$.

A továbbiakhoz szükségünk lesz a következő, Ivanovtól származó eredményre.

3.1. tétel. *(Ivanov, [44]) Tekintsük az $Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ és az $Y(\mathbf{t})$ folyamatokat az $L^p([0,1]^d)$, $p \ge 1$ térben. Tegyük fel, hogy teljesülnek a következő feltételek:*

(i) Az $Y_{\mathbf{n}}$ véges dimenziós eloszlásai gyengén konvergálnak az Y-hoz;

(ii) $\mathbb{E}|Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})|^p \to \mathbb{E}|Y(\mathbf{t})|^p$, ha $\mathbf{n} \to \infty$ bármely $\mathbf{t} \in [0,1]^d$ esetén;

(iii) $\sup_{\mathbf{n}} \sup_{\mathbf{t} \in [0,1]^d} \mathbb{E}|Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})|^p < \infty$.

Ekkor $f(Y_{\mathbf{n}}) \Rightarrow f(Y)$, ha $\mathbf{n} \to \infty$ bármely $f\colon L^p([0,1]^d) \to \mathbb{R}$ folytonos függvény esetén.

$\square$

A következőkben felhasználásra kerül az alábbi, Rosenthaltól származó egyenlőtlenség.

3.2. tétel. *(Rosenthal-egyenlőtlenség, [2]) Tegyük fel, hogy a $\xi_{\mathbf{i}}$, $\mathbf{i} \le \mathbf{n}$ olyan független, centrált valószínűségi változók, amelyekre $p \ge 2$ esetén fennáll, hogy $\mathbb{E}|\xi_{\mathbf{i}}|^p < \infty$. Ekkor létezik egy olyan csak p-től függő $K_p > 0$ konstans, amellyel fennáll, hogy*

$$\left(\mathbb{E} \left| \sum_{\mathbf{i} \le \mathbf{n}} \xi_{\mathbf{i}} \right|^p \right)^{1/p} \le K_p \max \left\{ \left(\sum_{\mathbf{i} \le \mathbf{n}} \mathbb{E}|\xi_{\mathbf{i}}|^p \right)^{1/p}, \left(\sum_{\mathbf{i} \le \mathbf{n}} \mathbb{E}|\xi_{\mathbf{i}}|^2 \right)^{1/2} \right\}.$$

$\square$

Az alábbi eredményre is szükségünk lesz a továbbiakban.

3.3. tétel. *(Araujo, Giné, [2]) Tegyük fel, hogy az* $\xi_{\mathbf{i}}, \mathbf{i} \in \mathbb{N}^d$ *centrált, független, azonos eloszlású valószínűségi változók úgy, hogy fennáll a* $\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{i} \leq \mathbf{n}} \xi_{\mathbf{i}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$ *konvergencia.*

Ekkor $\mathbb{E}|\xi_{\mathbf{1}}|^p < \infty$, $p \geq 1$ *esetén fennáll az*

$$\mathbb{E}\left|\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{i} \leq \mathbf{n}} \xi_{\mathbf{i}}\right|^p \to \mathbb{E}|\xi|^p,$$

ha $\mathbf{n} \to \infty$ *konvergencia.*

□

A továbbiakhoz szükségünk lesz az alábbi eredményre is, amely a $Y_{\mathbf{n}}$ folyamat gyenge konvergenciáját mondja ki az $L^p([0,1]^d)$ térben.

3.4. tétel. *(Túri, [72], Proposition 2.1) A (3.3)-ban definiált* $Y_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ *folyamat gyengén konvergál a d-paraméterű* W *sztenderd Wiener-folyamathoz az* $L^p([0,1]^d)$ *térben, ahol* $1 \leq p < \infty$.

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a 3.1. tétel feltételei teljesülnek. Az (i) feltétel, azaz a véges dimenziós eloszlások konvergenciája a Wiener-folyamathoz ismert. A (ii) feltétel is teljesül, ha alkalmazzuk a 3.3. tételt. Ezután belátjuk, hogy a (iii) feltétel is fennáll. Két esetet különböztetünk meg. Az első esetben feltételezzük, hogy $1 \leq p \leq 2$.

Az első esetben érvényes az alábbi kalkuláció:

$$\mathbb{E}|Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})|^p = \mathbb{E}\left|\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{i} \leq [\mathbf{n}\mathbf{t}]} \xi_{\mathbf{i}}\right|^p \leq \frac{1}{(|\mathbf{n}|)^{p/2}} \left(\mathbb{E}\left|\sum_{\mathbf{i} \leq [\mathbf{n}\mathbf{t}]} \xi_{\mathbf{i}}\right|^2\right)^{p/2} \leq$$

$$\leq \frac{(|\mathbf{n}|)^{p/2}}{(|\mathbf{n}|)^{p/2}} = 1 < \infty.$$

A második esetben feltételezzük, hogy $2 < p < \infty$. Itt felhasználjuk a 3.2. tételben foglalt eredményt is.

Ha

$$\sum_{\mathbf{i}\le[\mathbf{nt}]} \mathbb{E}|\xi_{\mathbf{i}}|^p \ge \left(\sum_{\mathbf{i}\le[\mathbf{nt}]} \mathbb{E}|\xi_{\mathbf{i}}|^2\right)^{p/2},$$

akkor

$$\mathbb{E}|Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})|^p = \mathbb{E}\left|\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}}\sum_{\mathbf{i}\le[\mathbf{nt}]}\xi_{\mathbf{i}}\right|^p \le \frac{K_p}{(|\mathbf{n}|)^{p/2}}\sum_{\mathbf{i}\le[\mathbf{nt}]} \mathbb{E}|\xi_{\mathbf{i}}|^p \le$$
$$\le C\frac{|\mathbf{n}|}{(|\mathbf{n}|)^{p/2}} = C^* < \infty.$$

Ha az

$$\sum_{\mathbf{i}\le[\mathbf{nt}]} \mathbb{E}|\xi_{\mathbf{i}}|^p < \left(\sum_{\mathbf{i}\le[\mathbf{nt}]} \mathbb{E}|\xi_{\mathbf{i}}|^2\right)^{p/2},$$

összefüggés áll fenn, akkor

$$\mathbb{E}|Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})|^p = \mathbb{E}\left|\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}}\sum_{\mathbf{i}\le[\mathbf{nt}]}\xi_{\mathbf{i}}\right|^p \le \frac{K_p}{(|\mathbf{n}|)^{p/2}}\left(\sum_{\mathbf{i}\le[\mathbf{nt}]} \mathbb{E}|\xi_{\mathbf{i}}|^2\right)^{p/2} \le$$
$$\le K_p\frac{|\mathbf{n}|^{p/2}}{(|\mathbf{n}|)^{p/2}} = K_p < \infty.$$

amivel az 3.4. tétel bizonyítása teljes.

$\square$

A majdnem biztos Donsker-tétel bizonyításához szükségünk lesz a következő eredményre.

3.5. tétel. *(Fazekas, Rychlik, [33], Theorem 2.1) Jelöljük δ_x-szel az x pontra koncentrált eloszlást, legyen továbbá μ_ξ az ξ valószínűségi változó eloszlása. Legyen (M, ρ) egy teljes, szeparábilis metrikus tér, $\xi_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ pedig egy többindexes valószínűségi változó sorozat a M térben. Tegyük fel továbbá, hogy bármely $\mathbf{h}, \mathbf{l} \in \mathbb{N}^d$, $\mathbf{h} \leq \mathbf{l}$ esetén léteznek olyan M-értékű $\xi_{\mathbf{h},\mathbf{l}}$ valószínűségi változók, amelyekre fennáll, hogy $\xi_{\mathbf{h},\mathbf{l}} = 0$, ha $\mathbf{h} = \mathbf{l}$, továbbá, ha $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{N}^d$, akkor $\mathbf{h} = \min\{\mathbf{k}, \mathbf{l}\}$ esetén $\xi_{\mathbf{k}}$ és $\xi_{\mathbf{h},\mathbf{l}}$ függetlenek, $\xi_{\mathbf{l}}$ és $\xi_{\mathbf{h},\mathbf{k}}$ függetlenek, továbbá $\xi_{\mathbf{h},\mathbf{k}}$ és $\xi_{\mathbf{h},\mathbf{l}}$ függetlenek.*

Tegyük fel, hogy léteznek olyan $C > 0$, $\beta > 0$ valós konstansok és léteznek pozitív tagú, mononoton növekvő $(c_n^{(i)})_{n\geq 1}, i = 1, \ldots, d$ sorozatok úgy, hogy $\lim_{n\to\infty} c_n^{(i)} = \infty, c_{n+1}^{(i)}/c_n^{(i)} = O(1)$ bármely $i = 1, \ldots, d$ esetén úgy, hogy fennáll az

$$\mathbb{E}\{\rho^2(\xi_{\mathbf{l}}, \xi_{\mathbf{h},\mathbf{l}}) \wedge 1\} \leq C \prod_{i=1}^{d} \left(\frac{c_{h_i}^{(i)}}{c_{l_i}^{(i)}} \right)^{\beta} \tag{3.4}$$

összefüggés bármely $\mathbf{h} \leq \mathbf{l}$ esetén. Legyen $0 \leq d_k^{(i)} \leq \log(c_{k+1}^{(i)}/c_k^{(i)})$ és tegyük fel, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(i)} = \infty$ minden $i = 1, \ldots, d$ esetén. Legyen továbbá $d_{\mathbf{k}} = \prod_{i=1}^{d} d_{k_i}^{(i)}$ és $D_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} d_{\mathbf{k}}$.

Ekkor bármely, az M Borel-halmazain értelmezett μ eloszlás esetén a következő két állítás ekvivalens:

$$\frac{1}{D_{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} d_{\mathbf{k}} \delta_{\xi_{\mathbf{k}}(\omega)} \Rightarrow \mu, \quad \text{ha } \mathbf{n} \to \infty$$

majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén;

$$\frac{1}{D_{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} d_{\mathbf{k}} \mu_{\xi_{\mathbf{k}}} \Rightarrow \mu, \quad \text{ha } \mathbf{n} \to \infty.$$

□

Ezek után kimondhatjuk a majdnem biztos Donsker-tételt az $L^p([0,1]^d), (1 \leq p < \infty)$ térben.

3.6. tétel. *(Túri, [72], Theorem 2.1) Tegyük fel, hogy $1 \leq p < \infty$. Legyen $Y_{\mathbf{k}}(\mathbf{t}, \omega) = Y_{\mathbf{k}}(\mathbf{t})$. Ekkor*

$$\frac{1}{|\log \mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{k}|} \delta_{Y_{\mathbf{k}}}(., \omega) \Rightarrow \mu_W$$

az $L^p([0,1]^d)$ térben, ha $\mathbf{n} \to \infty$ $\mathbb{P}$-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén, ahol W-vel jelöltük a d-paraméterű sztenderd Wiener-folyamatot.

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a 3.5. tétel feltételei teljesülnek. Az $L^p([0,1]^d), 1 \leq p < \infty$ tér szeparábilitása és teljessége jól ismert tény.

Definiáljuk a következő

$$Y_{\mathbf{k},\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} \left\{ S_{[\mathbf{nt}]} - S_{\min\{\mathbf{k},[\mathbf{nt}]\}} \right\}$$

folyamatot, ahol $\mathbf{k} \leq \mathbf{n}$ és $\mathbf{t} \in [0,1]^d$.

Ekkor fennállnak a 3.5. tételben megkövetelt függetlenségi feltételek az $Y_{\mathbf{k}}(\mathbf{t})$ és az $Y_{\mathbf{k},\mathbf{n}}(\mathbf{t})$ folyamatokra vonatkozóan. Belátjuk, hogy a teljesül a (3.4) feltétel is. Ehhez két esetet szükséges megkülönböztetnünk.

Először vizsgáljuk a $2 \leq p < \infty$ esetet. A Jensen-egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\rho^2(Y_{\mathbf{n}}, Y_{\mathbf{k},\mathbf{n}})) = \mathbb{E}\left(\int_{[0,1]^d} |Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) - Y_{\mathbf{k},\mathbf{n}}(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t} \right)^{2/p} =$$

$$= \mathbb{E}\left(\int_{[0,1]^d} \left| \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} S_{\min\{\mathbf{k},[\mathbf{nt}]\}} \right|^p d\mathbf{t} \right)^{2/p} \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\mathbf{n}|} \left(\int_{[0,1]^d} \mathbb{E} \left| S_{\min\{\mathbf{k},[\mathbf{nt}]\}} \right|^p d\mathbf{t} \right)^{2/p} = A.$$

Ismét két esetet különböztetünk meg és felhasználjuk a 3.2. tételt is. Ha fennáll az alábbi

$$\sum_{\mathbf{i}\le\min\{\mathbf{k},[\mathbf{nt}]\}} \mathbb{E}|\xi_{\mathbf{i}}|^p \ge \left(\sum_{\mathbf{i}\le\min\{\mathbf{k},[\mathbf{nt}]\}} \mathbb{E}|\xi_{\mathbf{i}}|^2 \right)^{p/2}$$

egyenlőtlenség, akkor

$$A \le \frac{1}{|\mathbf{n}|} \left(\int_{[0,1]^d} K_p \sum_{\mathbf{i}\le\min\{\mathbf{k},[\mathbf{nt}]\}} \mathbb{E}|\xi_{\mathbf{i}}|^p d\mathbf{t} \right)^{2/p} \le$$

$$\le \frac{1}{|\mathbf{n}|} \left(\int_{[0,1]^d} K_p \sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{k}} \mathbb{E}|\xi_{\mathbf{i}}|^p d\mathbf{t} \right)^{2/p} \le \frac{K_p^{2/p}}{|\mathbf{n}|}(C|\mathbf{k}|)^{2/p} \le C^* \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{n}|}.$$

Ha pedig az

$$\sum_{\mathbf{i}\le\min\{\mathbf{k},[\mathbf{nt}]\}} \mathbb{E}|\xi_{\mathbf{i}}|^p < \left(\sum_{\mathbf{i}\le\min\{\mathbf{k},[\mathbf{nt}]\}} \mathbb{E}|\xi_{\mathbf{i}}|^2 \right)^{p/2}$$

összefüggés teljesül, akkor

$$A \le \frac{1}{|\mathbf{n}|} \left(\int_{[0,1]^d} K_p \left(\sum_{\mathbf{i}\le\min\{\mathbf{k},[\mathbf{nt}]\}} \mathbb{E}|\xi_{\mathbf{i}}|^2 \right)^{p/2} d\mathbf{t} \right)^{2/p} \le$$

$$\le \frac{1}{|\mathbf{n}|} \left(\int_{[0,1]^d} K_p \left(\sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{k}} \mathbb{E}|\xi_{\mathbf{i}}|^2 \right)^{p/2} d\mathbf{t} \right)^{2/p} = C^* \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{n}|}.$$

Abban az esetben, ha $1 \le p < 2$, akkor a Jensen-egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\rho^2(Y_{\mathbf{n}}, Y_{\mathbf{k},\mathbf{n}})) = \mathbb{E} \left(\int_{[0,1]^d} \left| \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} S_{\min\{\mathbf{k},[\mathbf{nt}]\}} \right|^p d\mathbf{t} \right)^{2/p} \le$$

$$\leq \frac{1}{|\mathbf{n}|} \int_{[0,1]^d} \mathbb{E} \left| S_{\min\{\mathbf{k},[\mathbf{nt}]\}} \right|^2 d\mathbf{t} = \frac{1}{|\mathbf{n}|} \int_{[0,1]^d} \mathbb{E} \left| \sum_{\mathbf{i} \leq \min\{\mathbf{k},[\mathbf{nt}]\}} \xi_{\mathbf{i}} \right|^2 d\mathbf{t} \leq C \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{n}|}.$$

Ha alkalmazzuk a 3.5. tételt a $c_k^{(i)} = k, k = 1, 2, \ldots, i = 1, \ldots, d$ választással és felhasználjuk a 3.4. tételt, akkor adódik a 3.6. tétel állítása amivel a bizonyítás teljes.

$\square$

3.2. Az empirikus folyamat az $L^p([0,1]^d)$ térben

Ebben a részben a korábban már ismertetett

$$Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{i} \leq \mathbf{n}} (\mathbb{I}\{\mathbf{U_i} \leq \mathbf{t}\} - |\mathbf{t}|), \quad \text{ha } \mathbf{t} \in [0,1]^d \tag{3.5}$$

folyamatot vizsgáljuk, ahol a $d, h \in \mathbb{N}$ rögzítettek, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^h$, $\mathbf{U_i}$, $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^h$ független, egyenletes eloszlású valószínűségi változók a $[0,1]^d$ d-dimenziós kockán.

A fenti folyamattal kapcsolatban rögtön kimondhatjuk a következő állítást.

3.7. tétel. *(Túri, [72], Proposition 3.1) A (3.5)-ben definiált többindexes $Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}), \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ sorozat gyengén konvergál a d-paraméterű B Brown-hídhoz az $L^p([0,1]^d)$ térben, ahol $1 \leq p < \infty$.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a 3.1. tétel feltételei teljesülnek. Az (i) feltétel teljesül, hiszen a véges dimenziós eloszlások konvergenciája a Brown-hídhoz ismert tény. Az (ii) feltétel is teljesül, ha alkalmazzuk 3.3. tételt. Ezután belátjuk, hogy fennáll a 3.1. tétel (iii)-adik feltétele is. Itt két esetet különböztetünk meg. Először vizsgáljuk az $1 \leq p \leq 2$ esetet. Ekkor

$$\mathbb{E}|Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})|^p \leq \frac{1}{(|\mathbf{n}|)^{p/2}} \left(\mathbb{E} \left| \sum_{\mathbf{i} \leq \mathbf{n}} (\mathbb{I}\{\mathbf{U_i} \leq \mathbf{t}\} - |\mathbf{t}|) \right|^2 \right)^{p/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(|\mathbf{n}|)^{p/2}} (|\mathbf{n}||\mathbf{t}|(1 - |\mathbf{t}|))^{p/2} \leq 1 < \infty.$$

Ezután vizsgáljuk a $2 < p < \infty$ esetet, amelyen belül két alesetet kell vizsgálni. Először tekintsük azt, amikor fennáll az

$$\sum_{\mathbf{i} \leq \mathbf{n}} \mathbb{E} \left| (\mathbb{I}\{\mathbf{U_i} \leq \mathbf{t}\} - |\mathbf{t}|) \right|^p \geq \left(\sum_{\mathbf{i} \leq \mathbf{n}} \mathbb{E} \left| (\mathbb{I}\{\mathbf{U_i} \leq \mathbf{t}\} - |\mathbf{t}|) \right| \right)^{p/2}$$

összefüggés.

A Rosenthal-egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}|Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})|^p \leq \frac{K_p}{(|\mathbf{n}|)^{p/2}} \sum_{\mathbf{i}\leq\mathbf{n}} \mathbb{E}|\mathbb{I}\{U_{\mathbf{i}} \leq \mathbf{t}\} - |\mathbf{t}||^p \leq \frac{K_p}{(|\mathbf{n}|)^{p/2}} C|\mathbf{n}| < C^* < \infty.$$

Ha pedig a

$$\sum_{\mathbf{i}\leq\mathbf{n}} \mathbb{E}\left|\mathbb{I}\{\mathbf{U}_{\mathbf{i}} \leq \mathbf{t}\} - |\mathbf{t}|\right|^p < \left(\sum_{\mathbf{i}\leq\mathbf{n}} \mathbb{E}\left|\mathbb{I}\{\mathbf{U}_{\mathbf{i}} \leq \mathbf{t}\} - |\mathbf{t}|\right|^2\right)^{p/2}$$

összefüggés áll fenn, akkor

$$\mathbb{E}|Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})|^p \leq \frac{(K_p)^p}{(|\mathbf{n}|)^{p/2}} (|\mathbf{n}||\mathbf{t}|(1 - |\mathbf{t}|))^{p/2} \leq K_p^{p/2} < \infty,$$

amivel a 3.7. tétel bizonyítása teljes. □

Ezután kimondhatjuk a (3.5) folyamatra vonatkozó majdnem biztos határeloszlás-tételt az $L^p([0,1]^d)$ térben.

3.8. tétel. *(Túri, [72], Theorem 3.1) Tegyük fel, hogy $1 \leq p < \infty$ és legyen $Z_{\mathbf{k}}(\mathbf{t})$ a (3.5)-ben definiált empirikus folyamat. Ekkor fennáll a*

$$\frac{1}{|\log \mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{i}\leq\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{k}|} \delta_{Z_{\mathbf{k}}(.,\omega)} \Rightarrow \mu_B$$

konvergencia az $L^p([0,1]^d)$ térben $\mathbf{n} \to \infty$ esetén $\mathbb{P}$-majdnem minden $\omega \in \Omega$-ra, ahol B-vel jelöltük a d-paraméterű Brown-hidat.

Bizonyítás. Az állítás bizonyításához belátjuk, hogy teljesülnek a 3.5. tétel feltételei.

Definiáljuk a következő

$$Z_{\mathbf{k},\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{i}\leq\mathbf{n}} (\mathbb{I}\{\mathbf{U}_{\mathbf{i}} \leq \mathbf{t}\} - |\mathbf{t}|) - \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{i}\leq\mathbf{k}} (\mathbb{I}\{\mathbf{U}_{\mathbf{i}} \leq \mathbf{t}\} - |\mathbf{t}|)$$

folyamatot, ahol $\mathbf{k} \leq \mathbf{n}, \mathbf{k}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^h, \mathbf{t} \in [0,1]^d$.
Ekkor a 3.5. tételben előírt függetlenségi feltétel teljesül a $Z_{\mathbf{k}}$ és a $Z_{\mathbf{k},\mathbf{n}}$ folyamatokra. Ezután belátjuk, hogy a (3.5) folyamatra fennáll a (3.4) egyenlőtlenség.

Két esetet különböztetünk meg. Először vizsgáljuk a $2 < p < \infty$ esetet. Ekkor

$$\mathbb{E}(\rho^2(Z_{\mathbf{n}}, Z_{\mathbf{k},\mathbf{n}})) = \mathbb{E}\left(\int_{[0,1]^d} |Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) - Z_{\mathbf{k},\mathbf{n}}(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t}\right)^{2/p} =$$

$$\mathbb{E}\left(\int_{[0,1]^d} \left|\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{k}} (\mathbb{I}\{\mathbf{U}_{\mathbf{i}} \le \mathbf{t}\} - |\mathbf{t}|)\right|^p d\mathbf{t}\right)^{2/p} \le$$

$$\le \frac{1}{|\mathbf{n}|}\left(\int_{[0,1]^d} \mathbb{E}\left|\sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{k}} (\mathbb{I}\{\mathbf{U}_{\mathbf{i}} \le \mathbf{t}\} - |\mathbf{t}|)\right|^p d\mathbf{t}\right)^{2/p} = A$$

Ezután ismét két esetet különböztetünk meg.
Először a

$$\sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{k}} \mathbb{E}|\mathbb{I}\{\mathbf{U}_{\mathbf{i}} \le \mathbf{t}\} - |\mathbf{t}||^p \ge \left(\sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{n}} \mathbb{E}|\mathbb{I}\{\mathbf{U}_{\mathbf{i}} \le \mathbf{t}\} - |\mathbf{t}||^2\right)^{p/2}$$

esetet vizsgáljuk.
Ekkor a Rosenthal-egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$A \le \frac{1}{|\mathbf{n}|}\left(\int_{[0,1]^d} K_p \sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{k}} \mathbb{E}|\mathbb{I}\{\mathbf{U}_{\mathbf{i}} \le \mathbf{t}\} - |\mathbf{t}||^p d\mathbf{t}\right)^{2/p} \le K_p^{2/p} \frac{|\mathbf{k}|^{2/p}}{|\mathbf{n}|} \le C^* \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{n}|}.$$

Ha a

$$\sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{k}} \mathbb{E}|\mathbb{I}\{\mathbf{U}_{\mathbf{i}} \le \mathbf{t}\} - |\mathbf{t}||^p < \left(\sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{n}} \mathbb{E}|\mathbb{I}\{\mathbf{U}_{\mathbf{i}} \le \mathbf{t}\} - |\mathbf{t}||^2\right)^{p/2}$$

reláció áll fenn, akkor kapjuk, hogy

$$A \le \frac{1}{|\mathbf{n}|}\left(\int_{[0,1]^d} K_p \left(\sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{k}} \mathbb{E}|\mathbb{I}\{\mathbf{U}_{\mathbf{i}} \le \mathbf{t}\} - |\mathbf{t}||^2\right)^{p/2} d\mathbf{t}\right)^{2/p} =$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{n}|}\left(\int_{[0,1]^d} K_p(|\mathbf{k}||\mathbf{t}|(1-|\mathbf{t}|))^{p/2} d\mathbf{t}\right)^{2/p} \le K_p \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{n}|}.$$

Ezután vizsgáljuk azt az esetet, amikor az $1 \leq p \leq 2$ összefüggés áll fenn. Ekkor

$$\mathbb{E}(\rho^2(Z_{\mathbf{n}}, Z_{\mathbf{k},\mathbf{n}})) \leq \mathbb{E} \int_{[0,1]^d} |Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) - Z_{\mathbf{k},\mathbf{n}}(\mathbf{t})|^2 d\mathbf{t} =$$

$$= \mathbb{E} \int_{[0,1]^d} \left| \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{i} \leq \mathbf{k}} (\mathbb{I}\{\mathbf{U}_{\mathbf{i}} \leq \mathbf{t}\} - |\mathbf{t}|) \right|^2 d\mathbf{t} =$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{n}|} \int_{[0,1]^d} \mathbb{E} \left(\sum_{\mathbf{i} \leq \mathbf{k}} (\mathbb{I}\{\mathbf{U}_{\mathbf{i}} \leq \mathbf{t}\} - |\mathbf{t}|) \right)^2 d\mathbf{t} \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\mathbf{n}|} \int_{[0,1]^d} |\mathbf{k}||\mathbf{t}|(1 - |\mathbf{t}|) d\mathbf{t} \leq \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{n}|},$$

amivel a bizonyítás teljes. □

4. fejezet

Integrál alakú majdnem biztos határeloszlás-tételek

A fejezetben két folyamatot vizsgálunk és ezekkel kapcsolatban adunk meg és bizonyítunk integrál alakú majdnem biztos határeloszlás-tételeket.

Az első tétel az

$$\xi'(t) = \sum_{i=1}^{[t]} \mathbb{I}_{\left[0,\frac{1}{t}\right]}(\xi_i), \quad 1 \leq t$$

folyamatról, illetve annak bizonyos – később ismertetésre kerülő – transzformáltjával kapcsolatban állít majdnem biztos határeloszlás-tételt, ahol a ξ_i, $i \in \mathbb{N}$ független, egyenletes eloszlású valószínűségi változók a $[0, 1]$ intervallumon.

A fejezet másik tétele az

$$\xi(t) = \frac{V(f(t))}{(f(t))^{1/2}}, \quad 0 \leq t$$

folyamatról állít majdnem biztos határeloszlás-tételt, ahol normális eloszlást követ a határeloszlás, a $V(t), t > 0$ egy centrált, homogén véletlen folyamat, míg az $f(t)$ egy, a fejezetben ismertetésre kerülő függvény.

A fentieken kívül a fejezet tartalmaz még néhány fontos következményt is.

A tételek bizonyításához szükségünk lesz Chuprunov-Fazekas tételnek az alábbi változatára, amely a következő állítást tartalmazza.

4.1. tétel. *(Chuprunov, Fazekas, [18], Theorem 2.1.) Legyen (M, ρ) egy teljes, szeparábilis metrikus tér, jelölje $\mathcal{B}(M)$ az M Borel-halmazainak σ-algebráját. Legyen a $\xi(t), t \geq 0$ egy, az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$-n értelmezett és M értékű, mérhető folyamat. Tegyük fel, hogy léteznek olyan $C < \infty$ és $\beta > 0$ konstansok, egy monoton növekvő pozitív $(c_n)_{n\geq 1}$ sorozat, hogy $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ és fennáll, hogy $c_{n+1}/c_n = O(1)$, továbbá létezik egy olyan szigorúan monoton növekvő, nemkorlátos, nemnegatív $(v_n)_{n\geq 1}$ sorozat úgy, hogy minden olyan $(l, k), k, l \in \mathbb{N}$ pár esetén, amelyre $k < l$ létezik egy M-értékű $\xi_{lk}(t), v_k \leq t < v_{k+1}$ folyamat a következő tulajdonságokkal: $l < k$ esetén $\{\xi(t) : v_l \leq t < v_{l+1}\}$ és $\{\xi_{lk}(t) : v_k \leq t < v_{k+1}\}$ egymástól független valószínűségi változó családok úgy, hogy minden olyan t esetén, amelyre $v_k \leq t < v_{k+1}$ fennáll, hogy*

$$\mathbb{E}\varrho\left(\xi(t), \xi_{lk}(t)\right) \leq C\left(\frac{c_l}{c_k}\right)^{\beta}. \tag{4.1}$$

Tegyük fel, hogy létezik egy monoton csökkenő pozitív $d(t)$ függvény $v_1 \leq t$ úgy, hogy $\int_{v_k}^{v_{k+1}} d(t)\,dt \leq \log(c_{k+1}/c_k)$ minden k esetén és $\int_{v_1}^{\infty} d(t)\,dt = \infty$.

Legyen $D(T) = \int_{v_1}^{T} d(t)\,dt$ és

$$Q_{T,\omega}(A) = \frac{1}{D(T)} \int_{v_1}^{T} \delta_{\xi(t,\omega)}(A) d(t)\,dt, \qquad A \in \mathcal{B}(M).$$

Ekkor bármely, a $\mathcal{B}(M)$ Borel-σ-algebrán értelmezett μ valószínűségi mérték esetén a következő két állítás ekvivalens

$$Q_{T,\omega} \xrightarrow{w} \mu, \quad ha \quad T \to \infty \tag{4.2}$$

$\mathbb{P}$-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén,

$$\frac{1}{D(T)} \int_{v_1}^{T} \mu_{\xi(t)} d(t)\,dt \xrightarrow{w} \mu, \quad ha\ T \to \infty. \tag{4.3}$$

$\square$

4.1. korollárium. *Legyenek* $(c_n)_{n\geq 1}, (v_n)_{n\geq 1}, d(t)$ *és* $D(t)$ *a 4.1. tételben szereplő sorozatok, illetve függvények, továbbá legyen* $\xi(t)$ *az ott szereplő folyamat. Tegyük fel továbbá, hogy a* ζ *olyan* (M,ρ)*-beli valószínűségi változó, amelyre fennáll, hogy*

$$\xi(t) \xrightarrow{d} \zeta, \quad \text{ha } t \to \infty. \tag{4.4}$$

Ekkor teljesül a

$$Q_{T,\omega} \xrightarrow{w} \mu_\zeta, \quad \text{ha } T \to \infty, \tag{4.5}$$

konvergencia majdnem minden $\omega \in \Omega$ *esetén.*

□

4.2. korollárium. *Tegyük fel, hogy* $M = \mathbb{R}$ *és legyenek* $\varphi_{\xi(t)}(x)$ *és* $\varphi_\mu(x)$ *a* $\xi(t)$*, illetve a* μ *karakterisztikus függvénye. Ekkor a 4.1. tétel (4.3) feltétele helyettesíthető az alábbi*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{D(T)} \int_{v_1}^{T} \varphi_{\xi(t)}(x) d(t) dt = \varphi_\mu(\xi), \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.6}$$

összefüggéssel.

4.1. megjegyzés. *A következő* $v_k = k^\alpha, c_k = k^\beta, k = 1, 2, \dots$ *(*$0 < \alpha, 0 < \beta$ *rögzítettek),* $d(t) = \frac{1}{t}, t \geq 1$ *és* $D(T) = \log(T), T \geq 1$ *választással a 4.1. tétel fennáll.*

4.1. Konvergencia a Poisson-eloszláshoz

Ebben a részben a bevezetőben említett

$$\xi'(t) = \sum_{i=1}^{[t]} \mathbb{I}_{\left[0,\frac{1}{t}\right]}(\xi_i), \quad 1 \le t \tag{4.7}$$

folyamat ($\xi_i, i \in \mathbb{N}$ független, egyenletes eloszlású valószínűségi változók a $[0,1]$ intervallumon) egy bizonyos transzformációjáról látunk be majdnem biztos határeloszlás-tételt, ahol a határeloszlás a sztenderd Poisson-eloszlás (amelyet π-vel jelölünk és $\mathbb{E}\pi = 1$).
A megfogalmazandó állítás a következő.

4.2. tétel. *(Túri, [71], Theorem 2.1.) Legyen az $f(t)$, $1 \le t$ olyan pozitív függvény, amelyre fennáll, hogy*

$$\frac{f(t)}{t^\beta} \tag{4.8}$$

monoton növekvő valamely $\beta > 0$ esetén, továbbá legyen $\xi(t) = \xi'(f(t))$, $(1 \le t)$.

Ekkor

$$\frac{1}{\log(T)} \int_1^T \delta_{\xi(t,\omega)} \frac{dt}{t} \xrightarrow{w} \mu_\pi, \quad \text{ha } T \to \infty$$

$\mathbb{P}$-majdnem biztosan.

Bizonyítás. Az $\xi(t)$ eloszlása $n = [f(t)]$ és $p = 1/f(t)$ paraméterű binomiális eloszlást követ. Ezért $\xi(t) \xrightarrow{d} \pi$, ha $t \to \infty$.

Legyen

$$\xi'_{l,k}(t) = \sum_{i=l+1}^{[t]} \mathbb{I}_{\left[0,\frac{1}{t}\right]}(\xi_i), \quad l < k \le t < k+1.$$

Legyen továbbá $\xi_{l,k}(t) = \xi'_{l,k}(f(t))$. Ekkor, ha $l < k$, akkor a következő $\{\xi(t) : l < t \le l+1\}$ és $\{\xi_{l,k}(t) : k \le t < k+1\}$ családok függetlenek és $k \le t < k+1$ esetén fennáll, hogy

$$\mathbb{E}|\xi(t) - \xi_{l,k}(t)| = \frac{f(l)}{f(t)} \le \left(\frac{l}{k}\right)^\beta,$$

így felhasználva a 4.1. tételt adódik a tétel állítása. □

4.2. Konvergencia a normális eloszláshoz

Legyen a $V(t), t > 0$ centrált, homogén, korlátlanul osztható, független növekményű folyamat véges szórásnégyzettel. A Kolmogorov-reprezentációt ([37], 18. fejezet) felhasználva a $V(t)$ folyamat karakterisztikus függvényére kapjuk, hogy

$$\varphi_{V(t)}(x) = \mathbb{E}\left(e^{ixV(t)}\right) =$$

$$= \exp\left(t\int_{-\infty}^{\infty}(e^{ixy} - 1 - ixy)\frac{1}{y^2}dK(y)\right), \tag{4.9}$$

ahol $x \in \mathbb{R}$ és a $K(y)$ monoton növekvő, korlátos függvény úgy, hogy fennáll a $K(-\infty) = 0$ összefüggés.

Definiáljuk a következő

$$\xi(t) = \frac{V(f(t))}{(f(t))^{1/2}}, \quad 0 \le t \tag{4.10}$$

folyamatot, ahol $f(t)$ rendelkezik a 4.2. tételben leírt tulajdonságokkal.

Ekkor kimondhatjuk az alábbi állítást.

4.3. tétel. *(Túri, [71], Theorem 3.1.) Tekintsük a (4.10)-ban definiált $\xi(t)$ folyamatot, ahol a $V(t)$ folyamat karakterisztikus függvénye a (4.9)-ben definiált és az $f(t)$ függvényre teljesül az 4.2. tétel (4.8) feltétele.*

Ekkor

$$\frac{1}{\log(T)}\int_1^T \delta_{\frac{V(f(t),\omega)}{\sqrt{f(t)}}}\frac{dt}{t} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, K(\infty)), \quad ha\ T \to \infty, \tag{4.11}$$

$\mathbb{P}$*-majdnem biztosan.*

Bizonyítás. Definiáljuk az alábbi

$$\xi_{l,k}(t) = \frac{V(f(t)) - V(f(l+1))}{(f(t))^{1/2}}, \quad l < k \le t$$

folyamatot.

Ekkor $l < k$ esetén az $\{\xi(t) : l \le t < l+1\}$ és az $\{\xi_{l,k}(t) : k \le t < k+1\}$ családok függetlenek.

Ha alkalmazzuk a (4.9) formulát, akkor $k \leq t < k+1$ esetén az alábbi

$$\mathbb{E}|\xi(t) - \xi_{l,k}(t)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(\xi(t) - \xi_{l,k}(t))^2} = \sqrt{\frac{\mathbb{E}[V(f(l+1))]^2}{f(t)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{f(l+1)}{f(t)} K(\infty)} \leq \sqrt{K(\infty)} \left(\frac{2l}{k}\right)^{\beta/2}$$

összefüggéseket kapjuk.

A konvergencia kritériumot alkalmazva ([37], 19. fejezet) kapjuk, hogy $\xi(t) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, K(\infty))$, ha $t \to \infty$, amivel a tétel bizonyítása teljes.

$\square$

4.3. korollárium. *(Túri, lásd [71], Corollary 3.1)*

(a) Legyen $\pi(t)$, $0 \leq t$ a sztenderd Poisson-folyamat, azaz $\mathbb{E}\pi(t) = t$. Ekkor

$$\frac{1}{\log(T)} \int_1^T \delta_{\frac{\pi(f(t),\omega) - f(t)}{\sqrt{f(t)}}} \frac{dt}{t} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0,1), \quad ha\ T \to \infty,$$

$\mathbb{P}$-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén.

(b) Legyen $W(t)$ a sztenderd Wiener-folyamat. Ekkor fennáll, hogy

$$\frac{1}{\log(T)} \int_1^T \delta_{\frac{W(f(t),\omega)}{\sqrt{f(t)}}} \frac{dt}{t} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0,1), \quad ha\ T \to \infty,$$

$\mathbb{P}$-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén.

(c) Legyen $U(t)$ az Ornstein-Uhlenbeck folyamat. Ekkor az $U(t)$ felírható az $U(t) = Ce^{-mt/2}W(e^{mt})$, $t > 0$ alakban, ahol $C, m > 0$, $W(t)$ pedig a sztenderd Wiener-folyamat. Legyen $f(t) = e^{mt}$. Mivel $\frac{f(t)}{t} = \frac{e^{mt}}{t}$, $1 \leq t$, egy monoton növekvő függvény, így (b) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\log(T)} \int_1^T \delta_{U(t,\omega)} \frac{dt}{t} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, C^2), \quad ha\ T \to \infty,$$

$\mathbb{P}$-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén.

$\square$

5. fejezet

Egy majdnem biztos határeloszlás-tétel p-stabilis eloszláshoz

Ebben a fejezetben Chuprunov-Fazekas egy tételére ([18], Proposition 3.5) adunk egy alternatív bizonyítást.

A

$$\xi(t) = \frac{V(f(t))}{A(t)} - B(t), \quad 0 < t < \infty$$

folyamatra bizonyítunk majdnem biztos határeloszlás-tételt (a dolgozatban lásd a 5.2. tételt), ahol az $f\colon [0, \infty[\to [0, \infty[$ rögzített, szigorúan monoton növekvő függvény, az $A\colon [0, \infty[\to]0, \infty[$ szintén rögzített függvény, míg a $B(t)$ függvényt úgy választjuk meg, hogy a $\xi(t)$ folyamat karakterisztikus függvényére bizonyos – később részletezendő – tulajdonságok teljesüljenek, a $V(t)$, $t \geq 0$ pedig egy független, stacionárius növekményű folyamat.

Ekkor fennáll az alábbi

$$\frac{1}{\log(T)} \int_1^T \delta_{\xi(t,\omega)} \frac{dt}{t} \xrightarrow{w} \mu_Z, \quad \text{ha } T \to \infty$$

majdnem biztos határeloszlás-tétel, ahol a Z p-stabilis valószínűségi változót jelöl.

A fenti folyamat esetén a majdnem biztos határeloszlás-tétel bizonyításához szükségünk lesz a fejezetben ismertetésre kerülő eredményre (lásd a dolgozat 5.1. tétele). A szóban forgó tétel kimondja, hogy ha adott a $\xi_1, \xi_2, \ldots$

Banach-térbeli független, azonos eloszlású valószínűségi változó sorozat és létezik olyan $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat, amelyre ($\alpha \in]0, 2[$) esetén fennáll, hogy

$$\frac{a_{nm}}{a_n} \leq Cm^{\frac{1}{\alpha}+\tau_n}, \quad n, m = 1, 2, \ldots$$

valamely τ_n egy nemnegatív egész számokból álló sorozat esetén úgy, hogy $\lim_{n\to\infty} \tau_n = 0$, továbbá fennáll az

$$\mathbb{E}\|\xi_n\|^\beta < \infty$$

összefüggés bármely $\beta \in]0, \alpha[$ esetén és a

Legyen az $(a_{l_n})_{n\geq 1}$ az $(a_n)_{n\geq 1}$ olyan részsorozata, amelyre valamely $c < \infty$ esetén fennáll, hogy $a_{l_n} \leq ca_{l_{n-1}}, n = 1, 2, \ldots,$ a $(b_n)_{n\geq 1}$ pedig egy olyan B értékű sorozat, amelyre a

$$\left(\frac{S_{l_n}}{a_{l_n}} - b_{l_n}\right)_{n\geq 1}$$

sztochasztikusan korlátos.

Ekkor bármely $\beta \in]0, \alpha[$ esetén fennáll a

$$\sup_n \mathbb{E}\left\|\frac{S_{l_n}}{a_{l_n}} - b_{l_n}\right\|^\beta < \infty$$

összefüggés.

A fejezetben a majdnem biztos konvergencia bizonyításához a fentebb leírt eredményen kívül szükségünk lesz még a Chuprunov-Fazekas-tételre (a dolgozat 4. fejezetében a 4.1. tétel), illetve a Lévy-formulát is felhasználjuk, amely a $V(t)$ folyamat előállítását adja meg.

5.1. Egy tétel a momentumok végességéről

Az alábbi tételre szükségünk lesz a majdnem biztos határeloszlás-tétel bizonyításánál. Az tétel kimondja, hogy bizonyos – a tételben ismertetésre kerülő – feltételek teljesülése estén a valószínűségi változók részletösszegeiből álló normált részsorozat sorozat momentumainak a szuprémuma véges. Az állítás a következő.

5.1. tétel. *(Túri, [70], Theorem 2.1.) Legyen B egy valós, szeparábilis Banach-tér a $\|.\|$ normával ellátva, legyen továbbá $\mathcal{B}$ a B halmaz Borel-halmazaiból álló σ-algebra. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású B-értékű valószínűségi változók, legyen továbbá $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Tekintsünk egy $a_1, a_2, \ldots$ monoton növekvő, pozitív, valós számsorozatot és legyen $\alpha \in]0, 2]$ rögzített.*

Tegyük fel, hogy fennáll az alábbi

$$\frac{a_{nm}}{a_n} \leq C m^{\frac{1}{\alpha} + \tau_n} \quad n, m = 1, 2, \ldots \tag{5.1}$$

összefüggés, ahol $(\tau_n)_{n \geq 1}$ egy nemnegatív egész számokból álló sorozat úgy, hogy $\lim_{n \to \infty} \tau_n = 0$.

Tegyük fel továbbá, hogy bármely $\beta \in]0, \alpha[$ esetén fennáll, hogy

$$\mathbb{E}\|\xi_n\|^\beta < \infty. \tag{5.2}$$

Legyen az $(a_{l_n})_{n \geq 1}$ az $(a_n)_{n \geq 1}$ olyan részsorozata, amelyre valamely $c < \infty$ esetén fennáll, hogy $a_{l_n} \leq c a_{l_{n-1}}, n = 1, 2, \ldots,$ a $(b_n)_{n \geq 1}$ pedig egy olyan B értékű sorozat, amelyre a

$$\left(\frac{S_{l_n}}{a_{l_n}} - b_{l_n} \right)_{n \geq 1} \tag{5.3}$$

sztochasztikusan korlátos.

Ekkor bármely $\beta \in]0, \alpha[$ esetén fennáll a

$$\sup_n \mathbb{E} \left\| \frac{S_{l_n}}{a_{l_n}} - b_{l_n} \right\|^\beta < \infty \tag{5.4}$$

összefüggés.

Bizonyítás. Legyen $S_0 = 0$ és $\xi_1', \xi_2', \dots$ független másolatai a $\xi_1, \xi_2, \dots$ valószínűségi változóknak. Ekkor a $\tilde{\xi}_n = \xi_n - \xi_n'$, $n = 1, 2, \dots$ a ξ_n szimmetrizáltja, legyen továbbá $S_n' = \xi_1' + \xi_2' + \dots + \xi_n'$. Ekkor az $\tilde{S}_n = S_n - S_n'$, $n = 1, 2, \dots$ az S_n-nek $(n = 1, 2, \dots)$ a szimmetrizáltja.

Legyen az r egy tetszőleges pozitív egész szám úgy, hogy fenáll az $l_{n-1} < r \le l_n$ reláció. Ekkor bármely $d > 0$ esetén teljesül, hogy

$$\mathbb{P}\left(\frac{\|\tilde{S}_r\|}{a_r} > d\right) \le \mathbb{P}\left(\max_{1\le i\le l_n} \|\tilde{S}_i\| > d a_r\right) \le \mathbb{P}\left(\max_{1\le i\le l_n} \|\tilde{S}_i\| > \frac{d}{c} a_{l_n}\right) \le$$

$$\le 2\mathbb{P}\left(\|\tilde{S}_{l_n}\| > \frac{d}{c} a_{l_n}\right) \le 4\mathbb{P}\left(\|S_{l_n} - b_{l_n} a_{l_n}\| > \frac{1}{2}\frac{d}{c} a_{l_n}\right) =$$

$$= 4\mathbb{P}\left(\left\|\frac{S_{l_n}}{a_{l_n}} - b_{l_n}\right\| > \frac{1}{2}\frac{d}{c}\right).$$

Az előzőekben felhasználtuk a Lévy-egyenlőtlenséget ([42] vagy [39]), a szimmetrizációs egyenlőtlenséget ([39]) és az $(a_{l_n})_{n\ge 1}$ sorozat tulajdonságát.

A fentiekből és az (5.3) összefüggésből következik, hogy az $(\tilde{S}_n/a_n)_{n\ge 1}$ sorozat sztochasztikusan korlátos. Ezért bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $d > 0$ valós szám, hogy bármely $r \in \mathbb{N}$ esetén fennáll, hogy

$$\mathbb{P}\left(\frac{\|\tilde{S}_r\|}{a_r} \ge \frac{d}{2}\right) \le \varepsilon. \tag{5.5}$$

Az

$$\tilde{S}_{nk} - \tilde{S}_{n(k-1)} = \tilde{\xi}_{n(k-1)+1} + \dots + \tilde{\xi}_{nk}, \quad n = 1, 2, \dots, m,$$

valószínűségi változók függetlenek és azonos eloszlásúak, ezért

$$\left[\mathbb{P}\left(\frac{\|\tilde{S}_n\|}{a_{nm}} < d\right)\right]^m = \mathbb{P}\left(\frac{\max_{1\le k\le m} \|\tilde{S}_{nk} - \tilde{S}_{n(k-1)}\|}{a_{nm}} < d\right) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\max_{1\le k\le m} \|\tilde{S}_{nk} - \tilde{S}_{n(k-1)}\|}{a_{nm}} \ge d\right) \ge 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\max_{1\le k\le m} \|\tilde{S}_{nk}\|}{a_{nm}} \ge \frac{d}{2}\right) \ge$$

$$\ge 1 - 2\mathbb{P}\left(\frac{\|\tilde{S}_{nm}\|}{a_{nm}} \ge \frac{d}{2}\right) \ge 1 - 2\varepsilon,$$

ahol alkalmaztuk a Lévy-egyenlőtlenséget.

Ha alkalmazzuk a középértéktételt, akkor kapjuk, hogy $1-(1-2\varepsilon)^{\frac{1}{m}} \leq H(\varepsilon)\frac{1}{m}$, ahol $H(\varepsilon) \to 0$, ha $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon > 0)$.

Az előzőeket felhasználva kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(\frac{\|\tilde{S}_n\|}{a_{mn}} \geq d\right) \leq 1-(1-2\varepsilon)^{\frac{1}{m}} \leq H(\varepsilon)\frac{1}{m},$$

ahol a $H(\varepsilon)$ csak a ε-tól függ.

Ezért

$$H(\varepsilon)\frac{1}{m} \geq \mathbb{P}\left(\frac{\|\tilde{S}_n\|}{a_n} \geq d\frac{a_{mn}}{a_n}\right),$$

így (5.1)-et figyelembe véve kapjuk, hogy

$$H(\varepsilon)\frac{1}{m} \geq \mathbb{P}\left(\frac{\|\tilde{S}_n\|}{a_n} \geq dCm^{\frac{1}{\alpha}+\tau_n}\right).$$

Helyettesítsük a $dCm^{\frac{1}{\alpha}+\tau_n}$-t t-vel. Ekkor kapjuk, hogy $m = \left(\frac{t}{dC}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{\alpha}+\tau_n}} = \left(\frac{1}{dC}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{\alpha}+\tau_n}} t^{\alpha-\delta}$, ahol $\delta > 0, \delta \to 0$, ha $n \to \infty$.

Ekkor

$$H(\varepsilon)(dC)^{\frac{1}{\frac{1}{\alpha}+\tau_n}} \geq t^{\alpha-\delta}\mathbb{P}\left(\frac{\|\tilde{S}_n\|}{a_n} \geq t\right). \tag{5.6}$$

Vizsgáljuk meg az (5.6) összefüggést. A C és az α rögzítettek, $\tau_n > 0$, $\tau_n \to 0$. $\varepsilon > 0$-ra a d értékét úgy választottuk meg, hogy az (5.6) teljesüljön. Ekkor $H(\varepsilon)$ csak ε-tól függ és $\lim_{\varepsilon\to 0} H(\varepsilon) = 0$. Ezért a baloldal korlátos. Mivel $t = dCm^{\frac{1}{\alpha}+\tau_n}$, ezért az (5.6) fennáll, ha $t > t_0$, ahol $t_0 > 0$ elegendően nagy (azaz tulajdonképpen m-et választjuk elegendően nagyra).

Ezért bármely $t > t_0$ esetén érvényes a következő: bármely $\delta > 0$ esetén létezik egy n_δ úgy, hogy ha $n > n_\delta$, akkor fennáll az

$$A \geq t^{\alpha-\delta}\mathbb{P}\left(\frac{\|\tilde{S}_n\|}{a_n} \geq t\right) \tag{5.7}$$

összefüggés.

Ezért rögzített és elegendően kicsiny $\delta > 0$ esetén bármely $n > n_\delta$-ra fennáll, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{\|\tilde{S}_n\|}{a_n}\right)^{\alpha-2\delta} &= \int_0^\infty (\alpha-2\delta)t^{\alpha-2\delta-1}\mathbb{P}\left(\frac{\|\tilde{S}_n\|}{a_n} \geq t\right)dt \leq \\
\leq (\alpha-2\delta)\int_0^{t_0} t^{\alpha-2\delta-1}dt &+ (\alpha-2\delta)\int_{t_0}^\infty t^{\alpha-2\delta-1}\mathbb{P}\left(\frac{\|\tilde{S}_n\|}{a_n} \geq t\right)dt \leq \\
\leq (\alpha-2\delta)\int_0^{t_0} t^{\alpha-2\delta-1}dt &+ (\alpha-2\delta)\int_{t_0}^\infty At^{-\delta-1}dt = \\
&= (\alpha-2\delta)\frac{t_0^{\alpha-2\delta}}{\alpha-2\delta} + (\alpha-2\delta)A\frac{t_0^{-\delta}}{\delta} = \\
&= t_0^{\alpha-2\delta} + (\alpha-2\delta)A\frac{t_0^{-\delta}}{\delta}.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Az (5.2)-ből adódik, hogy

$$\max_{n \leq n_\delta}\mathbb{E}\left(\frac{\|\tilde{S}_n\|}{a_n}\right)^{\alpha-2\delta} < \infty.$$

Így az (5.8)-t felhasználva kicsiny $\delta > 0$ esetén adódik, hogy

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}\left(\frac{\|\tilde{S}_n\|}{a_n}\right)^{\alpha-2\delta} < \infty. \tag{5.9}$$

A desszimmetrizálási eljáráshoz az alábbi egyenlőtlenséget használjuk:

$$\mathbb{P}\left(\|\tilde{X}\| > \frac{t}{2}\right) \geq \mathbb{P}\left(\|X-a\| > t\right)\mathbb{P}\left(\|X'-a\| > \frac{t}{2}\right)$$

minden $t \geq 0$ esetén.

Behelyettesítve az előzőekbe kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(\frac{\|\tilde{S}_{l_n}\|}{a_{l_n}} \geq \frac{t}{2}\right) \geq \mathbb{P}\left(\left\|\frac{S_{l_n}}{a_{l_n}} - b_{l_n}\right\| \geq t\right) \mathbb{P}\left(\left\|\frac{S'_{l_n}}{a_{l_n}} - b_{l_n}\right\| \leq \frac{t}{2}\right).$$

Az (5.3)-ből következik, hogy fennáll a $\mathbb{P}\left(\left\|\frac{S'_{l_n}}{a_{l_n}} - b_{l_n}\right\| \leq \frac{t}{2}\right) > \frac{1}{2}$ összefüggés minden n esetén, ha t elegendően nagy.

Alkalmazzuk ismét az $\mathbb{E}\|X_n\|^s = \int_0^\infty su^{s-1}\mathbb{P}(\|X\| \geq u)du$ formulát és a (5.9)-et, így megkapjuk a bizonyítandó (5.4) összefüggést.

□

5.2. Egy alkalmazás: majdnem biztos határeloszlás-tétel p-stabilis eloszláshoz

Tekintsük a $V(t), t \geq 0$ független, stacionárius növekményű folyamatot és tegyük fel, hogy $V(0) = 0$, a $\{V(t, \omega) : t \geq 0, \omega \in \Omega\}$ halmaz mérhető, a $V(t)$ trajektóriái jobbról folytonosak és létezik a baloldali határértékük.

Ekkor a Lévy-formulát felhasználva (Gnedenko-Kolmogorov, [37]) a $V(t)$ karakterisztikus függvénye az alábbi

$$\varphi_{V(t)}(x) = \mathbb{E}\left(e^{ixV(t)}\right) = \psi\left(t, x, b, \sigma^2, L(y), R(y)\right) = \tag{5.10}$$

$$= \exp\left(t\left\{ibx - \frac{\sigma^2}{2}x^2 + \int_{-\infty}^0 \left(e^{ixy} - 1 - \frac{ixy}{1+y^2}\right) dL(y) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_0^\infty \left(e^{ixy} - 1 - \frac{ixy}{1+y^2}\right) dR(y)\right\}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

alakú, ahol $L(y)$ balról folytonos, monoton növekvő, a $]-\infty, 0[$-án úgy, hogy $L(-\infty) = 0$, $R(y)$ jobbról folytonos és monoton növekvő a $]0, \infty[$ intervallumon, továbbá $R(\infty) = 0$ és $L(y)$, illetve $R(y)$ kielégítik az $\int_{-\varepsilon}^0 y^2 dL(y) + \int_0^\varepsilon y^2 dR(y) < \infty$ összefüggést bármely $\varepsilon > 0$ esetén.

A $b = 0$ és a $\sigma = 0$ esetet fogjuk vizsgálni. Tekintsük az alábbi

$$\xi(t) = \frac{V(f(t))}{A(t)} - B(t), \quad 0 < t < \infty \tag{5.11}$$

folyamatot, ahol $f\colon [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$ egy rögzített, szigorúan monoton növekvő függvény, az $A\colon [0, \infty[\longrightarrow]0, \infty[$ szintén rögzített, pozitív függvény, továbbá a $B(t)$ folyamatot válasszuk meg úgy, hogy a $\xi(t)$ folyamat karakterisztikus függvénye az alábbi

$$\varphi_{\xi(t)}(x) = \psi(1, x, 0, 0, f(t)L(A(t)y), f(t)R(A(t)y)) =$$
$$\overline{\psi}(x, f(t)L(A(t)y), f(t)R(A(t)y)) \tag{5.12}$$

alakú legyen (a $V(t)$ folyamatnál a $b = 0$ és a $\sigma = 0$ választással éltünk).

Ekkor

$$B(t) = \int_{-\infty}^{0} g(t, y)dL(y) + \int_{0}^{\infty} g(t, y)dR(y), \tag{5.13}$$

ahol

$$g(t, y) = \frac{f(t)}{A(t)} \frac{y^3}{(1 + y^2)(1 + y^2/A^2(t))} \left(1 - \frac{1}{A^2(t)}\right). \tag{5.14}$$

Ha az$f(x) \equiv x$ választással élünk, akkor a $\xi(t)$ folyamat karakterisztikus függvénye

$$\varphi_{\xi(t)}(x) = \overline{\psi}(x, tL(A(t)y), tR(A(t)y)) \tag{5.15}$$

alakú lesz.

Az $L(t)$, illetve az $R(t)$ függvényekről is felteszünk még néhány, az alábbiakban ismertetendő tulajdonságot, amely biztosítani fogja, hogy a később ismertetésre kerülő majdnem biztos határeloszlástételben szereplő eloszlás stabilis legyen.

Először legyen $0 < p < 2$. Tekintsük a $V(t)$ folyamat (5.10)-ben definiált Lévy-reprezentációját és tegyük fel, hogy az $L(y)$ és az $R(t)$ függvények kielégítik az

$$\frac{L(-t)}{|R(t)|} \to \frac{c_1}{c_2}, \quad \text{ha } t \to \infty \tag{5.16}$$

és az

$$\frac{L(-t) + |R(t)|}{L(-tx) + |R(tx)|} \to x^p, \quad \text{ha } t \to \infty \tag{5.17}$$

feltételeket minden $x > 0$ esetén, ahol $c_1, c_2 \geq 0$ úgy, hogy $c_1 + c_2 > 0$.

5.1. lemma. *(Gnedenko, Kolmogorov, [37]) Ha az $F(x)$ olyan eloszlásfüggvény, hogy valamely $x_0 > 0$ esetén $F(x) = L(x)$, ha $x < -x_0$ és $F(x) - 1 = R(x)$, ha $x > x_0$, akkor az F pontosan akkor van az $L_p(t) = c_1/|t|^p$ és az $R_p(t) = c_2/(-t^p)$ alakú Lévy-reprezentációval rendelkező p-stabilis eloszlás vonzási tartományában, ha fennállnak a (5.16) és a (5.17) összefüggések.*

□

A (5.16) és a (5.17) feltételekből adódik, hogy az $1/L(-t)$, illetve $1/|R(t)|$ reguláris változású függvény p kitevővel, ha $c_1 \neq 0$, illetve $c_2 \neq 0$.

5.2. lemma. *(Bingham, Goldie, Teugels, [11], Theorem 1.5.12) Legyen az $A(t)$ egy pozitív, monoton csökkenő függvény úgy, hogy teljesül a*

$$tL(-A(t)) \to c_1 > 0, \quad \text{ha } t \to \infty, \tag{5.18}$$

konvergencia. A (5.18) összefüggésből következik, hogy az $A(t)$ aszimptotikus inverze az $1/L(-t)$-nek, ezért az $A(t)$ reguláris változású $1/p$ kitevővel.

□

5.3. lemma. *(Gnedenko, Kolmogorov, [37]) Az (5.16), (5.17) és az (5.18) feltételek fennállása esetén*

$$\xi(t) \to V(t), \quad \text{ha } t \to \infty,$$

ahol a V egy p-stabilis valószínűségi változó az alábbi

$$\varphi_V(x) = \bar{\psi}\left(x, \frac{c_1}{|y|^p}, -\frac{c_2}{y^p}\right). \tag{5.19}$$

karakterisztikus függvénnyel.

□

Most tételezzük fel, hogy $p = 2$. Tekintsük a $V(t)$ folyamatot a (5.10) reprezentációval.

5.4. lemma. *(Gnedenko, Kolmogorov, lásd [37], Sect. 35) Legyen az $F(x)$ olyan eloszlásfüggvény, amelyre valamely $x_0 > 0$ esetén $F(x) = L(x)$, ha $x < -x_0$, míg $F(x) - 1 = R(x)$, ha $x > x_0$.*

Ekkor az F eloszlásfüggvény akkor és csak akkor van a normális eloszlás vonzási tartományában, ha teljesül az alábbi

$$\frac{t^2(L(-t) - R(t))}{\int_{-t}^{0} x^2 dL(x) + \int_0^t x^2 dR(x)} \to 0, \quad \text{ha } t \to \infty, \tag{5.20}$$

összefüggés.

□

5.5. lemma. *(Bingham, Goldie, Teugels, [11], Theorem 8.3.1) A (5.20)-ból következik, hogy*

$$G(t) = \int_{-t}^{0} x^2 dL(x) + \int_0^t x^2 dR(x) \tag{5.21}$$

lassú változású függvény.

□

5.6. lemma. *(Bingham, Goldie, Teugels, [11], Theorem 1.5.12) Tegyük fel, hogy a $A(t)$ egy pozitív, monoton növekvő függvény, továbbá fennáll a*

$$t\left(\int_{-A(t)}^{0} \left(\frac{x}{A(t)}\right)^2 dL(x) + \int_0^{-A(t)} \left(\frac{x}{A(t)}\right)^2 dR(x)\right) \to 1, \quad \text{ha } t \to \infty \tag{5.22}$$

összefüggés.

A fenti (5.22) konvergenciából következik, hogy az $A(t)$ reguláris változású $1/2$ kitevővel.

□

5.7. lemma. *(Gnedenko, Kolmogorov, [37]) Az (5.20) és az (5.22) feltételek fennállása esetén a $\xi(t)$ konvergál a sztenderd normális eloszláshoz.*

□

Ezután kimondhatjuk a $\xi(t)$ folyamatra vonatkozó majdnem biztos határeloszlás-tételt, amely a Chuprunov-Fazekas tétel ([18], Proposition 3.1.) és belátására pedig egy alternatív bizonyítást adunk. A bizonyításához szükségünk lesz az előzőekben ismertetésre került 5.1. tételre is.

5.2. tétel. *(Chuprunov-Fazekas, [18], Proposition 3.1.) Tegyük fel, hogy a $\xi(t)$ folyamat karakterisztikus függvénye (5.15) alakú, tegyük fel továbbá, hogy $0 < p < 2$ esetén fennállnak az (5.16), (5.17) és az (5.18) feltételek, míg $p = 2$ esetén az (5.20) és az (5.22) tulajdonságok.*

Ekkor fennáll a

$$\frac{1}{\log(T)} \int_1^T \delta_{\xi(t,\omega)} \frac{dt}{t} \xrightarrow{w} \mu_Z, \quad \text{ha } T \to \infty$$

konvergencia majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén, ahol a Z egy p-stabilis valószínűséi változót jelöl jelöl: $p = 2$ esetén Z sztenderd normális eloszlást követ, míg $0 < p < 2$ esetén a Z eloszlása a V eloszlásával egyezik meg (V karakterisztikus függvénye (5.19) alakú).

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható Túri [70] cikkében. A 4. fejezet 4.1. tételében szereplő segédfolyamatot definiáljuk a következő módon

$$\xi_{lk}(t) = \frac{V(f(t)) - V(f(l+1))}{A(t)} - B_l(t),$$

ahol $k \le t < k+1$ és

$$B_l(t) = B(t) + \frac{A(t)}{A(l+1)} \left[\int_{-\infty}^0 g(l,y)dL(y) + \int_0^\infty g(l,y)dR(y) \right], \qquad (5.23)$$

továbbá g a (5.14)-ben definiált függvény.

Ekkor $l < k$ esetén az $\{\xi(t) : l < t \le l+1\}$ és az $\{\xi_{lk}(t) : k \le t < k+1\}$ függetlenek.

Legyen $k > l$ és az l elegendően nagy. Belátjuk, hogy

$$\mathbb{E}|\xi(t) - \xi_{l,k}(t)|^\beta \le \left(C\frac{l}{t}\right)^{\beta/p'} \le \left(C\frac{l}{k}\right)^{\beta/p'}, \quad \text{ahol, } k \le t \le k+1, \quad (5.24)$$

a p' olyan tetszőleges valós szám, amelyre fennáll, hogy $p' > p$, továbbá a C olyan konstans, amely független az l-től, a k-tól és a t-től.

Az $\frac{A(t)}{A(l+1)}[\xi(t) - \xi_{l,k}(t)]$ karakterisztikus függvénye az alábbi

$$\varphi_{\frac{A(t)}{A(l+1)}[\xi(t)-\xi_{l,k}(t)]}(x) = \bar{\psi}(x, f(l+1)L(A(l+1)y), f(l+1)R(A(l+1)y))$$

alakot ölti. Ezért az $\frac{A(t)}{A(l+1)}[\xi(t) - \xi_{l,k}(t)]$ eloszlása megegyezik az $\xi(l+1) = S_{l+1}/A(l+1) - B_{l+1}$ eloszlásával, ahol $S_{l+1} = \xi_1 + \cdots + \xi_{l+1}$ és a $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók a $\psi(1, x, b, 0, L(y), R(y))$ együttes karakterisztikus függvénnyel. Ezért ez egy p-stabilis eloszláshoz konvergál. Így sztochasztikusan korlátos ezért az (5.3) feltétel teljesül.

Az (5.1) bizonyításához felhasználjuk, hogy az 5.2. és az 5.6. lemmákból következően az $A(t)$ függvény $1/p$ exponensű reguláris változású függvény. Ekkor létezik egy $B > 0$ konstans úgy, hogy minden $x \geq B$ esetén fennáll az

$$A(t) = t^{\frac{1}{p}} \exp\left(\eta(t) + \int_B^t \frac{\varepsilon(x)}{x} dx\right),$$

összefüggés, ahol az η korlátos, mérhető függvény a $[B, \infty[$ intervallumon úgy, hogy $\eta(x) \to c, (|c| < \infty)$, továbbá az $\varepsilon(x)$ egy folytonos függvény a $[B, \infty[$ intervallumon úgy, hogy $\varepsilon(x) \to 0$, ha $x \to \infty$ ([67], Theorem 1.2).

Ekkor

$$\frac{A(mn)}{A(n)} = m^{\frac{1}{p}} \exp\left(\eta(mn) - \eta(n) + \int_n^{mn} \frac{\varepsilon(x)}{x} dx\right) \leq$$
$$\leq C m^{\frac{1}{p}} \exp\left(\tau_n \int_n^{mn} \frac{1}{x} dx\right) = C m^{\frac{1}{p} + \tau_n},$$

ahol $\tau_n \to 0$, ha $n \to \infty$.

Belátjuk, hogy teljesül a 5.1. tétel (5.2) feltétele is. Ehhez felhasználjuk azt, hogy egy F korlátlanul osztható eloszlásfüggvénynek pontosan akkor van véges p-dik momentuma, ha fennáll az $\int_{]-\infty,-1[} |x|^p dL(x) + \int_{]1,\infty[} x^p dR(x) < \infty$ összefüggés ([61], 8. tétel).

Először vizsgáljuk meg a $0 < p < 2$ esetet. $c_1 \neq 0$ esetén az $L(t)$ reguláris változású $-p$ paraméterrel.

Ekkor

$$\int_{-\infty}^{-1} |x|^\beta dL(u) = [(|x|^\beta L(x)]_{-\infty}^{-1} - \int_{-\infty}^{-1} L(x) d|x|^\beta < \infty,$$

ha $\beta < p$. Ezért fennáll az $\mathbb{E}\|\xi_1\|^\beta < \infty$ összefüggés.

Ezután vizsgáljuk meg a $p = 2$ esetet. A (5.21)-ben megadott $G(t)$ függvény lassú változású.

Ekkor

$$\int_{-\infty}^{-1} |x|^\beta dL(x) + \int_1^\infty x^\beta dR(x) = \int_1^\infty x^\beta d(R(x) - L(-x)) =$$

$$\int_1^\infty x^\beta \frac{1}{x^2} dG(x) < \infty,$$

ha $\beta < 2$.

Ezért, ha fennáll az $l < k \le t \le k+1$ összefüggés, akkor

$$\mathbb{E}|\xi(t) - \xi_{l,k}(t)|^\beta = \mathbb{E}\left|\frac{A(l+1)}{A(t)}\left(\frac{S_{l+1}}{A(l+1)} - B(l+1)\right)\right|^\beta \le$$

$$\le C\left(\frac{A(l+1)}{A(t)}\right)^\beta \le C\left(\left(\frac{l+1}{t}\right)^{\frac{1}{p'}}\right)^\beta$$

elegendően nagy l esetén, ahol $p' > p$. Itt felhasználtuk, hogy az $A(t)$ reguláris változású $1/p$ paraméterrel. Ezzel a 5.2. tétel bizonyítása teljes.

□

6. fejezet

Határeloszlás-tételek a leghosszabb szériára

A fejezetben vizsgált problémák a pénzfeldobással kapcsolatosak: érmét dobunk fel egymás után és az érmefeldobás során kialakuló leghosszabb tiszta szériák számát, illetve azok határeloszlását vizsgáljuk. A fejezet első részében feltételezzük, hogy a pénzfeldobásnál használt érmék szabályosak, majd a második részben áttérünk azon esetek vizsgálatára, amikor a feldobott érmék nem szabályosak. A fejezet végén majdnem biztos határeloszlást is kimondunk, illetve bizonyítunk.

Az eredmények Túri cikkén [69] alapulnak, továbbá felhasználjuk a Földes [35], Móri [54] , Schilling [65], Gordon-Schilling-Waterman [38] és a Muselli [57] eredményeket is.

A leghosszabb tiszta fej dobás vizsgálatával már Erdős és Rényi [25] is foglalkozott: a szerzők belátták, hogy tetszőleges $0 < c_1 < 1 < c_2 < \infty$ esetén majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén létezik olyan $N_0 = N_0(\omega, c_1, c_2)$ szám úgy, hogy $[c_1 \operatorname{Log} N] \leq \mu(N) \leq [c_2 \operatorname{Log} N]$, ha $N \geq N_0$, ahol $\mu(N)$ jelöli az N dobás során kialakuló leghosszabb fej sorozat hosszát, továbbá $\operatorname{Log} N$ az N szám kettes alapú logaritmusát.[16]

Később Erdős és Révész [24] is adott alsó, illetve felső korlátot a $\mu(N)$-re.

Földes [35] a szabályos érméket vizsgálta és adott határeloszlás-tételeket a leghosszabb fej széria eloszlásával kapcsolatban.

[16] A fejezetben, amikor a szabályos érmefeldobást tárgyaljuk, akkor a $\operatorname{Log} N$ jelöli az N szám kettes alapú logaritmusát, a szabálytalan érmefeldobás tárgyalása esetén pedig a kérdéses logaritmus alapja $1/p$, ahol p annak valószínűsége, hogy fejet dobunk az érmével.

Binswagner és Embrechts [12] játékelméleti és pénzügyi szempontból vizsgálta a kérdéskört.

Schilling áttekintő cikket [65] közölt a témakörrel kapcsolatban, publikációjában a téma algoritmuselméleti vonatkozásait is közli és az alkalmazási lehetőségeket is bemutatja.

Fazekas és Noszály [31] vizsgálták a leghosszabb T-szennyezett fej szériáknak a határeloszlását és adtak rekurzív algoritmust a szabálytalan érmék esetén.

A fejezet elején a szabályos érmefeldobások során kialakuló szériákat vizsgáljuk, a fejezet második felében pedig a szabálytalan érmefeldobások során kialakuló szériákat vizsgáljuk és ezzel kapcsolatban majdnem biztos határeloszlás-tételt is kimondunk, illetőleg bizonyítunk.

Tegyük fel, hogy $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók úgy, hogy $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = p$, illetve $\mathbb{P}(\xi_i = 0) = q = 1 - p$. Állapodjunk meg abban, hogy ha 1-et írunk az azt jelenti, hogy fejet dobtunk, míg a 0 jelentése az, hogy írást dobtunk.

A fejezetben először belátjuk, hogy ha $N \to \infty$ és $n \to \infty$ úgy, hogy

$$\frac{N}{2^{n+1}} \to \lambda > 0,$$

akkor fennáll az alábbi

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(\tilde{\xi}^*(n,N) = k) = \frac{e^{-2\lambda}(2\lambda)^k}{k!}$$

összefüggés, ahol $k = 0, 1, 2 \ldots$, továbbá $\tilde{\xi}^*(n,N) = \tilde{\xi}^*(n,N,\omega)$ jelöli a legalább n hosszúságú diszjunkt tiszta fej vagy tiszta írás sorozatok számát.

A következő eredmény is a fejezetben található: ha fennáll az $\frac{N}{2^{n+1}} \to \lambda > 0$ konvergencia $N \to \infty$ és $n \to \infty$ esetén – hasonlóan az előzekhez –, akkor teljesül a

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}(z^{\xi^*(n,N)}) = \exp\left(2\lambda\left(\frac{(1-\frac{1}{2})z}{1-\frac{1}{2}z} - 1\right)\right)$$

összefüggés, ahol $\xi^*(n,N) = \xi^*(n,N,\omega)$ jelöli az n hosszúságú tiszta fej vagy tiszta írás sorozatok számát.

Ebben a fejezetben belátjuk, hogy $0 < x < \infty$ esetén fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\tau^*(n)}{2^{n+1}} \le x\right) = 1 - e^{-2x}$$

összefüggés, ahol $\tau^*(n)$ az a legkisebb dobásszám, amely esetén a dobássorozatban egy n hosszúságú tiszta fej vagy egy n hosszúságú tiszta írás szériát kapunk, azaz

$$\tau^*(n) = \min\{N \mid \xi^*(n, N) > 0\}.$$

A fejezetben kerül ismertetésre az alábbi eredmény is: bármely k egész esetén fennáll a

$$\mathbb{P}(\mu^*(N) - [\mathrm{Log}(N-1)] < k) = \exp(-2^{-(k-\{\mathrm{Log}(N-1)\})}) + o(1)$$

összefüggés, ahol $\mu^*(N) = \mu^*(N, \omega)$-val jelöltük a leghosszabb tiszta fej sorozatok vagy a leghosszabb tiszta írás sorozatok hosszát az N dobásból, azaz

$$\mu^*(N) = \max\{n \mid \xi^*(n, N) > 0\}.$$

A fejezet második részében nem szabályos érmékkel végezzük a feldobást, azaz azt az esetet vizsgáljuk, amikor a $p > q$ eset áll fenn.

Belátjuk, hogy bármely $0 < x < \infty$ esetén fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\tau^*(n)qp^n \le x) = 1 - e^{-x}$$

összefüggés.

A fejezet végén igazoljuk az alábbi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \mathbb{I}(\mu^*(i) - \mathrm{Log}\, i < t) = \begin{cases} \int_t^{t+1} \exp\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^y\right] dy, & \text{ha } \ p = \frac{1}{2} \\ \int_t^{t+1} \exp\left[-qp^y\right] dy, & \text{ha } \ p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

majdnem biztos határeloszlás-tételt.

6.1. Határeloszlás-tételek a leghosszabb szériára

A fejezetben szükségünk lesz az alábbi jelölésekre.

Jelöljük N-el azt, hogy hányszor dobtunk az érmével.

Jelöljük $\xi(n, N) = \xi(n, N, \omega)$-val az n hosszúságú tiszta fej sorozatok számát.

Jelöljük $\xi^*(n, N) = \xi^*(n, N, \omega)$-val az n hosszúságú tiszta fej vagy tiszta írás sorozatok számát.

Jelöljük $\tilde{\xi}(n, N) = \tilde{\xi}(n, N, \omega)$-val a legalább n hosszúságú diszjunkt tiszta fej sorozatok számát.

Jelöljük $\tilde{\xi}^*(n, N) = \tilde{\xi}^*(n, N, \omega)$-val a legalább n hosszúságú diszjunkt tiszta fej vagy tiszta írás sorozatok számát.

Legyen $\tau(n) = \tau(n, \omega)$ az a legkisebb dobásszám, amely esetén a dobássorozatban egy n hosszúságú tiszta fej szériát kapunk, azaz

$$\tau(n) = \min\{N \mid \xi(n, N) > 0\}.$$

Legyen $\tau^*(n) = \tau^*(n, \omega)$ az a legkisebb dobásszám, amely esetén a dobássorozatban egy n hosszúságú tiszta fej vagy egy n hosszúságú tiszta írás szériát kapunk, azaz

$$\tau^*(n) = \min\{N \mid \xi^*(n, N) > 0\}.$$

Jelölje $\mu(N) = \mu(N, \omega)$ a leghosszabb tiszta fej sorozat hosszát az N dobásból, azaz

$$\mu(N) = \max\{n \mid \xi(n, N) > 0\}.$$

Jelölje $\mu^*(N) = \mu^*(N, \omega)$ a leghosszabb tiszta fej sorozat vagy a leghosszabb tiszta írás sorozat hosszát az N dobásból, azaz

$$\mu^*(N) = \max\{n \mid \xi^*(n, N) > 0\}.$$

Elevenítsük fel először a Földes-féle eredményeket, amelyek arra vonatkoznak, amikor a pénzfeldobásokat szabályos érmével végezzük.

6.1. tétel. *(Földes, [35], Theorem 1) Ha $N \to \infty$ és $n \to \infty$ úgy, hogy*

$$\frac{N}{2^{n+1}} \to \lambda > 0, \tag{6.1}$$

akkor fennáll az alábbi

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(\tilde{\xi}(n,N) = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \tag{6.2}$$

összefüggés, ahol $k = 0, 1, 2 \dots$.

6.2. tétel. *(Földes, [35], Theorem 2) Az előző tétel feltételeinek a fennállása esetén a $\xi(n,N)$ eloszlása konvergál az összetett Poisson-eloszláshoz*[17]

$$\mathbb{E}(z^{\xi(n,N)}) \to \exp\left(\lambda\left(\frac{(1-\frac{1}{2})z}{1-\frac{1}{2}z} - 1\right)\right). \tag{6.3}$$

6.3. tétel. *(Földes, [35], Theorem 3) A $0 < x < \infty$ feltétel teljesülése esetén fennáll, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\tau(n)}{2^{n+1}} \le x\right) = 1 - e^{-x}. \tag{6.4}$$

6.4. tétel. *(Földes, [35], Theorem 4) Bármely egész k esetén fennáll a*

$$\mathbb{P}(\mu(N) - [\mathrm{Log}N] < k) = \exp(-2^{-(k+1-\{\mathrm{Log}N\})}) + o(1) \tag{6.5}$$

összefüggés, ahol $[a]$ jelöli az 'a' egészrészét és $\{a\} = a - [a]$.

A következőkben felhasználjuk az alábbi Schillingtől [65] származó eredményt, amely a legalább n hosszúságú diszjunkt tiszta fej sorozatok száma és a legalább n hosszúságú diszjunkt tiszta fej vagy tiszta írás sorozatok száma, azaz a $\tilde{\xi}(n,N)$ és a $\tilde{\xi}^*(n,N)$ valószínűségi változók között teremt kapcsolatot, amely a következő.

[17] A ξ valószínűségi változó összetett Poisson-eloszlású, ha léteznek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók és egy tőlük független Poisson-eloszlású $N = N(\omega)$ valószínűségi változó úgy, hogy a ξ eloszlása megegyezik az $S_N = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$ összeg eloszlásával.

6.5. tétel. *(Schilling, [65]) Fennáll az alábbi*

$$2\,\mathrm{card}\{\tilde{\xi}(n-1,N-1)=k\}=\mathrm{card}\{\tilde{\xi}^*(n,N)=k\} \tag{6.6}$$

$(k=1,2\dots)$ összefüggés.[18]

□

Ezután az előbbiekben ismertetett eredmények felhasználásával kimondhatjuk és bizonyíthatjuk a következő tételeket.

6.6. tétel. *(Túri, [69], Theorem 2.6) Ha $N\to\infty$ és $n\to\infty$ úgy, hogy*

$$\frac{N}{2^{n+1}}\to\lambda>0, \tag{6.7}$$

akkor fennáll az alábbi

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(\tilde{\xi}^*(n,N)=k)=\frac{e^{-2\lambda}(2\lambda)^k}{k!} \tag{6.8}$$

összefüggés, ahol $k=0,1,2\dots$.

Bizonyítás. Ha felhasználjuk a (6.6) összefüggést, akkor $k=0,1,2\dots$ esetén kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\tilde{\xi}^*(n,N)=k)=\frac{\mathrm{card}\{\tilde{\xi}^*(n,N)=k)\}}{2^N}=\frac{2\,\mathrm{card}\{\tilde{\xi}(n-1,N-1)=k)\}}{2^N}=$$

$$=\mathbb{P}(\tilde{\xi}(n-1,N-1)=k).$$

Ha fennáll a $\frac{N}{2^{n+1}}\to\lambda$ reláció, akkor igaz az alábbi

$$\frac{N-1}{2^{(n-1)+1}}=2\frac{N-1}{N}\frac{N}{2^{n+1}}\to 2\lambda.$$

összefüggés is.

A 6.1. tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\tilde{\xi}^*(n,N)=k)=e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^k}{k!},$$

amivel a 6.6. tétel bizonyítása teljes.

□

[18] card A-val jelöltük az 'A' halmaz számosságát.

6.7. tétel. *(Túri, [69], Theorem 2.7) A (6.7) feltétel teljesülése esetén fennáll az alábbi*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}(z^{\xi^*(n,N)}) = \exp\left(2\lambda\left(\frac{(1-\frac{1}{2})z}{1-\frac{1}{2}z} - 1\right)\right) \tag{6.9}$$

összefüggés.

Bizonyítás. A (6.6) feltétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(z^{\xi^*(n,N)}) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbb{P}(\xi^*(n,N) = k) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \operatorname{card}\{\xi^*(n,N) = k\}/2^N =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^k 2 \operatorname{card}\{\xi(n-1,N-1) = k\}/2^N = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbb{P}(\xi(n-1,N-1) = k) =$$

$$\mathbb{E}(z^{\xi(n-1,N-1)}).$$

A 6.2. tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(z^{\xi(n-1,N-1)}) = \exp\left(2\lambda\left(\frac{(1-\frac{1}{2})z}{1-\frac{1}{2}z} - 1\right)\right),$$

amivel a bizonyítás teljes.

□

A következő tétel szerint a $\frac{\tau^*}{2^{n+1}}$ valószínűségi változó exponenciális eloszlást követ, amelynek a paramétere 2.

6.8. tétel. *(Túri, [69], Theorem 2.8) Bármely* $0 < x < \infty$ *esetén fennáll a*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\tau^*(n)}{2^{n+1}} \le x\right) = 1 - e^{-2x} \tag{6.10}$$

összefüggés.

Bizonyítás. A tétel az alábbi számolás és a 6.3. tétel közvetlen következménye

$$\mathbb{P}\left(\frac{\tau^*(n)}{2^n} > x\right) = \mathbb{P}(\text{ a } [2^n x] \text{ darab dobás során nem jön}$$

$$\text{létre } n \text{ hosszúságú széria}) =$$

$$\frac{\text{card}\{\text{a } [2^n x] \text{ darab dobás során nem jön létre } n \text{ hosszúságú széria}\}}{2^{[2^n x]}} =$$

$$\frac{2\ \text{card}\{\text{a } [2^n x]-1 \text{ darab dobás során nem jön létre } n-1 \text{ hosszúságú fej széria}\}}{2^{[2^n x]}} =$$

$$= \mathbb{P}(\tau(n-1) > [2^n x] - 1) = \mathbb{P}\left(\frac{\tau(n-1)}{2^n} > \frac{[2^n x]-1}{2^n}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{\tau(n-1)}{2^n} > x + a_n\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\tau(n-1)}{2^n} - a_n > x\right),$$

ahol $\frac{[2^n x]-1}{2^n} = x + a_n$ és $a_n \to 0$. A Szluckij-lemma és a 6.3. tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\tau(n-1)}{2^n} - a_n > x\right) = e^{-x},$$

amiből adódik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\tau^*(n)}{2^{n+1}} \le x\right) = 1 - e^{-2x},$$

amivel a bizonyítás teljes.

□

6.9. tétel. *(Túri, [69], 2.9.tétel) Bármely k egész esetén fennáll a*

$$\mathbb{P}(\mu^*(N) - [\text{Log}(N-1)] < k) = \exp(-2^{-(k-\{\text{Log}(N-1)\})}) + o(1). \tag{6.11}$$

összefüggés.

Bizonyítás. A 6.5. tételből kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\mu^*(N) - [\text{Log}(N-1)] < k) = \frac{\text{card}\{\mu^*(N) - [\text{Log}(N-1)] < k\}}{2^N} =$$

$$2\,\text{card}\{\mu(N-1) - [\text{Log}(N-1)] < k-1\}/2^N =$$

$$\mathbb{P}(\mu(N-1) - [\text{Log}(N-1)] < k) =$$

$$\exp\left(-2^{-(k-\{\text{Log}(N-1)\})}\right) + o(1),$$

ahol alkalmaztuk a 6.4. tételt, amivel a bizonyítás teljes.

□

6.2. Határeloszlás-tétel a nem szimmetrikus esetben

Ebben a részben vizsgáljuk azt az esetet, amikor az érme nem szimmetrikus.

Jelöljük p-vel annak a valószínűségét, hogy fejet dobunk, míg $q = 1 - p$ jelölje az írás valószínűségét. Jelöljük $V_N(p)$-vel a valószínűségét annak, hogy az N kísérlet során a leghosszabb széria fej dobásokból áll. Ekkor Musselli [57]-ben közölt 5. tételéből[19] adódóan

$$\lim_{N\to\infty} V_N(p) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \le p < \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{ha } \frac{1}{2} < p \le 1. \end{cases} \tag{6.12}$$

6.10. tétel. *(Túri, [69], Theorem 2.10) Tegyük fel, hogy $p > q$. Ekkor bármely $0 < x < \infty$ esetén fennáll a*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\tau^*(n)qp^n \le x) = 1 - e^{-x}. \tag{6.13}$$

összefüggés.

Bizonyítás. Az alábbi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\tau(n)qp^n \le x) = 1 - e^{-x}. \tag{6.14}$$

összefüggés bizonyítás nélkül megtalálható a Móri [54] cikkben, bizonyítással együtt pedig a Fazekas-Noszály közleményben [31]. Ha felhasználjuk a (6.12) és a (6.14)-et, akkor megkapjuk a (6.13)-at, amivel a 6.10. tétel bizonyítása teljes. □

6.11. tétel. *(Túri, [69], Theorem 2.11) Tegyük fel, hogy $1 > p > q$. Ekkor bármely k egész esetén fennáll az*

$$\mathbb{P}(\mu^*(N) - [\operatorname{Log} N] < k) = \exp(-qp^{k-\{\operatorname{Log} N\}}) + o(1). \tag{6.15}$$

összefüggés.

Bizonyítás. A Gordon-Schilling-Waterman [38] vagy a Fazekas-Noszály [31] eredményből adódik a

[19] Musselli tétele szerint a nagyobb valószínűségű érmeoldal a kialakuló szériák szempontjából teljesen dominánsá válik $N \to \infty$ esetén, azaz a kisebb valószínűségű érmeoldal nem befolyásoló tényező és 1 valószínűséggel a leghosszabb széria a nagyobb valószínűségű érmeoldalból fog állni, még akkor is, ha a kisebb valószínűség csak "egy kicsivel kisebb" 1/2-nél.

$$\mathbb{P}(\mu(N) - [\operatorname{Log} N] < k) = \exp(-qp^{k-\{\operatorname{Log} N\}}) + o(1) \tag{6.16}$$

összefüggés.

Ha felhasználjuk a (6.12)-t és a (6.16)-ot, akkor kapjuk (6.15)-öt, amivel a bizonyítás teljes.

□

6.3. Egy majdnem biztos határeloszlás-tétel a leghosszabb szériára

Ebben a részben is szabálytalan érméket vizsgálunk és majdnem biztos határeloszlás-tétel kerül ismertetésre a leghosszabb szériára.

6.1. lemma. *(részesete a Móri [54]-ben a corollary 5.1-nek) Fennáll az*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \mathbb{I}(\mu(i) - \operatorname{Log} i < t) = \int_t^{t+1} \exp(-qp^z)dz \tag{6.17}$$

konvergencia majdnem biztosan.

□

Az $\mathbb{E}(\tau^*(n))$-et jelöljük egyszerűen $E(n)$-nel, míg a $\mathbb{P}(\tau^*(n) = n)$-et $p(n)$-nel.

A majdnem biztos tétel bizonyításához szükségünk lesz az alábbi eredményekre.

6.2. lemma. *(Móri, [54], lemma 2.2.) Fennáll a*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\tau^*(n)}{E(n)} > t\right) = e^{-t} \tag{6.18}$$

konvergencia $t \geq 0$-ban egyenletesen.

□

6.1. propozició. *(részesete a Móri [54]-ben a Theorem 3.1-nek)*
Tegyük fel, hogy az f egy pozitív, monoton növekvő, differenciálható függvény úgy, hogy fennáll az $E(m) \sim f(m)$ összefüggés és létezik a

$$c = \lim_{t\to\infty} (\log f(t))' \tag{6.19}$$

határérték. Legyen $g = f^{-1}$. Tegyük fel, hogy $0 < c < \infty$.
Ekkor minden $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \mathbb{I}(\mu^*(i) - g(i) < t) = \int_0^1 F(c(t+z))dz \tag{6.20}$$

majdnem biztosan, ahol $F(z) = \exp(-\exp(-z))$.

$\square$

A következő tétel a majdnem biztos határeloszlás-tétel a leghosszabb szériára.

6.12. tétel. *(Túri, [69], Theorem 3.4.) Fennáll a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \mathbb{I}(\mu^*(i) - \operatorname{Log} i < t) = \tag{6.21}$$
$$\begin{cases} \int_t^{t+1} \exp\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^y\right] dy, & ha \;\; p = \frac{1}{2} \\ \int_t^{t+1} \exp\left[-qp^y\right] dy, & ha \;\; p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

konvergencia $\mathbb{P}$-majdnem biztosan.

Bizonyítás. A bizonyítás során két esetet különböztetünk meg.
Először legyen $p = 1/2$. A 6.8. tételből adódóan a $\frac{\tau^*(n)}{2^{n+1}}$ valószínűségi változó $1/2$ várható értékű exponenciális eloszláshoz tart, azaz $\mathbb{P}(\frac{\tau^*(n)}{2^n} > t) \to e^{-t}$, ha $n \to \infty$.

Megmutatjuk, hogy fennáll az $\mathbb{E}\mu^*(n) \sim 2^n$ összefüggés. A 6.2. lemmából adódik, hogy $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\tau^*(n)}{E(n)} > t\right) = e^{-t}$. Ha felhasználjuk a típusokra vonatkozó konvergenciatételt (Gnedenko, Kolmogorov, [37], Theorem 2, Section 10), akkor kapjuk, hogy $\frac{E(n)}{2^n} \to 1$, ha $n \to \infty$.

A 6.1. propozícióban a függvények választhatók a következőképpen: $f(x) = 2^x$ és $g(x) = \operatorname{Log} x$, így kapjuk, hogy $c = \lim_{t\to\infty}(\log f(t))' = \log 2 \in]0, \infty[$, ezért alkalmazhatjuk a 6.1. propozíciót.

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\mathbb{I}(\mu^*(i)-\operatorname{Log} i<t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\mathbb{I}(\mu^*(i)-g(i)<t)=$$

$$\int_0^1 \exp\left[-\exp(-c(t+z))\right]dz=\int_0^1 \exp\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^{t+z}\right]dz=$$

$$=\int_t^{t+1}\exp\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^{y}\right]dy.$$

Most tegyük fel, hogy $p>1/2$. A 6.10. tételből adódóan fennáll a

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\tau^*(n)qp^n>x)=e^{-x}. \tag{6.22}$$

összefüggés.

A 6.2. lemmából adódik, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{\tau^*(n)}{E(n)}>x\right)=e^{-x}. \tag{6.23}$$

Így $\frac{E(n)}{(qp^n)^{-1}}\to 1$, ha $n\to\infty$. Ezért fennáll, hogy $E(n)\sim(qp^n)^{-1}$. Így $f(x)=q^{-1}p^{-x}=\frac{1}{q}\left(\frac{1}{p}\right)^x$. Ezért $g(x)=\operatorname{Log} x+\operatorname{Log} q$ és $c=\log\frac{1}{p}$, amivel a bizonyítás teljes.

$\square$

7. fejezet

Majdnem biztos határeloszlás-tételek és egy egyenlőtlenség a véletlen elhelyezésre

A dolgozat ezen fejezetében a véletlen elhelyezéssel kapcsolatban megjelenő határeloszlásokat vizsgáljuk. A véletlen elhelyezést a következőképpen modellezhetjük: helyezzünk el egymásután n darab labdát egymástól függetlenül N darab dobozba és számoljuk meg azon dobozok számát – jelölve ezt $\mu_r(n, N)$-nel –, amelyek pontosan r darab labdát tartalmaznak.

A fejezetben a $\mu_r(n, N)$ tulajdonságait vizsgáljuk: több majdnem biztos határeloszlás-tételt fogalmazunk meg vele kapcsolatban, mindenekelőtt azonban belátunk egy egyenlőtlenséget, amely felhasználásával (és a Fazekas-Chuprunov tétel segítségével) kerülnek bizonyításra az előbb említett határeloszlás-tételek.

A $\mu_r(n, N)$ kifejezésre a szakirodalomban számos határeloszlás-tétel ismert (Weiss [77], Rényi [62], Békéssy [5], illetve a Kolchin-Sevastyanov-Chistyakov monográfia [46]). Ismert, hogy ha a paraméterek az úgynevezett központi tartományon találhatóak, akkor a $\mu_r(n, N)$ kifejezés sztenderdizáltjának a határeloszlása sztenderd normális. Azonban bizonyos tartományokon a határeloszlás Poisson-eloszlást követ.

7.1. A véletlen elhelyezés néhány alapvető tulajdonsága

Ebben a részben először formalizáljuk a véletlen elhelyezést, majd felsoroljuk a vele kapcsolatos alaptulajdonságokat, úgy mint a várható értéket, a szórást és a kovarianciát.

Tegyük fel, hogy a $\xi, \xi_i, i \in \mathbb{N}$ független, a $[0,1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Legyen $N \in \mathbb{N}$ és tekintsük a $[0,1[$ intervallum $\triangle_i = \triangle_{N,i} = \left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right[, 1 \leq i \leq N$ beosztását.

A $\triangle_i, i = 1, 2, \ldots, N$ intervallumokra úgy tekintünk, mint dobozokra, továbbá a ξ_i-ket tekintjük a ξ realizációinak. Mindegyik realizációt úgy tekintjük, mint véletlen elhelyezést N dobozba. A $\xi_j \in \triangle_i$ jelentése: a j-edik labda az i-edik dobozba esik.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $A_{(0)} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Ekkor a

$$\mu_r(n,N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{|A|=r, A \subset A_{(0)}} \prod_{j \in A} \mathbb{I}_{\{\xi_j \in \triangle_i\}} \prod_{j \in A_{(0)} \setminus A} \mathbb{I}_{\{\xi_j \notin \triangle_i\}} \tag{7.1}$$

kifejezés – összhangban a bevezetésben leírtakkal – azon dobozok számát adja, amelyek pontosan r darab golyót tartalmaznak, ahol $\mathbb{I}_B$-vel jelöltük a B halmaz indikátorfüggvényét.

Könnyen látható, hogy

$$\mathbb{E}\mu_r(n,N) = NC_n^r \frac{1}{N^r}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-r},$$

ahol $C_n^r = \binom{n}{r}$ a binomiális együttható.

Ha $n, N \in \mathbb{N}$, akkor legyen $\alpha = \frac{n}{N}$ és $p_r(\alpha) = (\alpha^r/r!)e^{-\alpha}$. Ismertek az alábbi (7.2) és (7.3) határérték-relációk ([46], 2. fejezet, 1. rész, 1. tétel), ha r és t rögzítettek, továbbá, ha $n, N \to \infty$ úgy, hogy $\alpha = o(N)$.

Ekkor tehát

$$\mathbb{E}\mu_r(n,N) = Np_r(\alpha) + p_r(\alpha)(r - \alpha/2 - C_r^2/\alpha) + O(1/N), \tag{7.2}$$

továbbá a kovarianciára fennáll, hogy

$$\operatorname{cov}(\mu_r(n,N), \mu_t(n,N)) \sim N\sigma_{rt}(\alpha), \tag{7.3}$$

ahol

$$\sigma_{rr}(\alpha) = p_r(\alpha)(1 - p_r(\alpha) - p_r(\alpha)(\alpha - r)^2/\alpha)$$

és

$$\sigma_{rt}(\alpha) = -p_r(\alpha)p_t(\alpha)(1 + (\alpha - r)(\alpha - t)/\alpha),$$

ha $t \neq r$.

Vezessük be a következő jelölést

$$\mathbb{D}^{(r)}_{n,N} = \sqrt{\mathbb{D}^2\mu_r(n, N)} = \sqrt{\operatorname{cov}(\mu_r(n, N), \mu_r(n, N))}.$$

Szükségünk lesz az alábbi összefüggésre is.

7.1. megjegyzés. *Fennáll az alábbi*

$$1 - p_r(\alpha) - p_r(\alpha)\frac{(\alpha - r)^2}{\alpha} \geq c_r > 0,$$

összefüggés, ha $r \geq 2$ rögzített és α tetszőleges vagy ha $r = 0$ vagy $r = 1$ és fennáll, hogy $\alpha \geq \alpha_0 > 0$.

A véletlen elhelyezéssel kapcsolatos tételeknél az n és az N szerepe rögzített, ezért a $(n, N), (k, K) \in \mathbb{N}^2$ jelölést használjuk.

Legyen

$$S^{(r)}_{n,N} = \frac{\mu_r(n, N) - \mathbb{E}\mu_r(n, N)}{\mathbb{D}^{(r)}_{n,N}}$$

a $\mu_r(n, N)$ valószínűségi változó sztenderdizáltja, ahol $(n, N) \in \mathbb{N}^2$.

7.2. Az egyenlőtlenség

Legyen $n, N, r \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$, ahol a korábban említett modellnek megfelelően n jelöli a labdák számát, N a dobozok számát, továbbá a ξ_j valószínűségi változó jelöli a j-edik labdát és $\triangle_i$ jelöli az i-edik dobozt. Vezessük be a következő $A_{(k)} = \{k + 1, \ldots, n\}, k = 0, 1, \ldots, n - 1$ halmazokat és legyen

$$\zeta_n = \zeta_{n,N} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{|A|=r, A\subseteq A_{(0)}} \prod_{j\in A} \mathbb{I}_{\{\xi_j\in\triangle_i\}} \prod_{j\in A_{(0)}\setminus A} \mathbb{I}_{\{\xi_j\notin\triangle_i\}} -$$
$$-NC_n^r \frac{1}{N^r}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-r}.$$

Látható, hogy $\zeta_n = \mu_r(n,N) - \mathbb{E}\mu_r(n,N)$, továbbá fennáll, hogy

$$\zeta_n = \sum_{i=1}^{N} \sum_{|A|=r, A\subseteq A_{(0)}} (\eta_{iA} - \mathbb{E}\eta_{iA}),$$

ahol

$$\eta_{iA} = \prod_{j\in A} \mathbb{I}_{\{\xi_j\in\triangle_i\}} \prod_{j\in A_{(0)}\setminus A} \mathbb{I}_{\{\xi_j\notin\triangle_i\}}$$

annak az eseménynek az indikátora, hogy az i-edik doboz tartalmazza azokat (és csak azokat) a golyókat, amelyeknek az indexei az A halmazban találhatóak. Jelöljük $\mathcal{F}_{k,n}$-vel a $\xi_{k+1},\ldots,\xi_n$ valószínűségi változók által generált σ-algebrát.

A továbbiak során szükségunk lesz az $\eta_{iA}^{(k)} = \mathbb{E}(\eta_{iA}|\mathcal{F}_{k,n})$ és a

$$\zeta_n^k = \zeta_{nN}^k = \mathbb{E}(\zeta_n|\mathcal{F}_{k,n}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{|A|=r, A\subseteq A_{(0)}} (\eta_{iA}^{(k)} - \mathbb{E}\eta_{iA}^{(k)}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{|A|=r, A\subseteq A_{(0)}} \frac{1}{N^{r-|A\cap A_{(k)}|}} \left(1-\frac{1}{N}\right)^{k-(r-|A\cap A_{(k)}|)} \tag{7.4}$$

$$\times \prod_{j\in A\cap A_{(k)}} \mathbb{I}_{\{\xi_j\in\triangle_i\}} \prod_{j\in A_{(k)}\setminus A} \mathbb{I}_{\{\xi_j\notin\triangle_i\}} - \frac{1}{N^r}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-r}$$

feltételes várható értékekre.

A következő egyenlőtlenség fontos szerepet játszik a későbbi állításaink bizonyításakor.

7.1. tétel. *(Fazekas, Chuprunov, Túri, [30], Theorem 2.1) Tegyük fel, hogy $0 < k < n, 0 < r \leq n$ és az N rögzített. Ekkor fennáll, hogy*

$$\mathbb{E}(\zeta_n - \zeta_n^k)^2 \leq ck\alpha^{r-1}\left[\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n+k}\alpha^r + \left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-r}\right](\alpha+1), \qquad (7.5)$$

ahol $c < \infty$ és nem függ n-től, N-től és k-tól, azonban függhet r-től.

Bizonyítás. Mivel fennállnak az $\mathbb{E}\eta_{iA} = \mathbb{E}\eta_{iA}^{(k)}$ és az

$$\mathbb{E}(\eta_{i_1A_1} - \eta_{i_1A_1}^{(k)})(\eta_{i_2A_2} - \eta_{i_2A_2}^{(k)}) = \mathbb{E}(\eta_{i_1A_1}\eta_{i_2A_2}) - \mathbb{E}(\eta_{i_1A_1}^{(k)}\eta_{i_2A_2}^{(k)})$$

összefüggések bármely A_1 és A_2 halmazok esetén, így kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\zeta_n - \zeta_n^k)^2 = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{|A|=r, A\subseteq A_{(0)}}(\eta_{iA} - \eta_{iA}^{(k)})\right]^2 =$$

$$= \sum_{i_1,i_2=1}^{N}\left[\sum_{|A_1|=|A_2|=r, A_1,A_2\subset A_{(0)}}\mathbb{E}(\eta_{i_1A_1} - \eta_{i_1A_1}^{(k)})(\eta_{i_2A_2} - \eta_{i_2A_2}^{(k)})\right]$$

$$= \sum_{i_1\neq i_2}\left[\sum_{A_1\cap A_2\neq\emptyset, |A_1|=|A_2|=r, A_1,A_2\subset A_{(0)}}\Big(\mathbb{E}(\eta_{i_1A_1}\eta_{i_2A_2}) - \mathbb{E}(\eta_{i_1A_1}^{(k)}\eta_{i_2A_2}^{(k)})\Big)\right] +$$

$$\sum_{i_1\neq i_2}\left[\sum_{A_1\cap A_2=\emptyset, |A_1|=|A_2|=r, A_1,A_2\subset A_{(0)}}\Big(\mathbb{E}(\eta_{i_1A_1}\eta_{i_2A_2}) - \mathbb{E}(\eta_{i_1A_1}^{(k)}\eta_{i_2A_2}^{(k)})\Big)\right] +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{A_1\neq A_2, |A_1|=|A_2|=r, A_1,A_2\subset A_{(0)}}\Big(\mathbb{E}(\eta_{iA_1}\eta_{iA_2}) - \mathbb{E}(\eta_{iA_1}^{(k)}\eta_{iA_2}^{(k)})\Big)\right]$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{|A|=r, A\subset A_{(0)}}\Big(\mathbb{E}(\eta_{iA})^2 - \mathbb{E}(\eta_{iA}^{(k)})^2\Big)\right] = B_1 + B_2 + B_3 + B_4.$$

Vizsgáljuk most a B_1, B_2, B_3, B_4 tagokat külön-külön.

Először tekintsük a B_1-et.

Legyen $i_1 \neq i_2$, $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ és $j \in A_1 \cap A_2$.

Ekkor kapjuk, hogy

$$\mathbb{I}_{\{\xi_j \in \triangle_{i_1}\}} \mathbb{I}_{\{\xi_j \in \triangle_{i_2}\}} = 0,$$

amiből következik, hogy $\mathbb{E}(\eta_{i_1 A_1} \eta_{i_2 A_2}) = 0$. Ezért fennáll, hogy $B_1 \leq 0$.

Tekintsük most a B_3 tagot. Ekkor $i_1 = i_2$ és $A_1 \neq A_2$. Ha $j \in A_1 \setminus A_2$ vagy $j \in A_2 \setminus A_1$, akkor az

$$\mathbb{I}_{\{\xi_j \in \triangle_{i_1}\}} \mathbb{I}_{\{\xi_j \notin \triangle_{i_2}\}} = 0,$$

vagy az

$$\mathbb{I}_{\{\xi_j \notin \triangle_{i_1}\}} \mathbb{I}_{\{\xi_j \in \triangle_{i_2}\}} = 0,$$

összefüggés áll fenn, amiből következik, hogy $\mathbb{E}(\eta_{i_1 A_1} \eta_{i_2 A_2}) = 0$, azaz fennáll a $B_3 \leq 0$ reláció.

Most vizsgáljuk meg a B_2-es tagot. Legyen tehát $i_1 \neq i_2$ és $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Ekkor

$$\mathbb{E}(\eta_{i_1 A_1} \eta_{i_2 A_2}) - \mathbb{E}(\eta^{(k)}_{i_1 A_1} \eta^{(k)}_{i_2 A_2}) = \frac{1}{N^{2r}} \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n-2r} -$$

$$- \frac{1}{N^{2r}} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{2k - (2r - |A_{(k)} \cap A_1| - |A_{(k)} \cap A_2|)} \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n-k-|A_{(k)} \cap A_1| - |A_{(k)} \cap A_2|} =$$

$$= \frac{1}{N^{2r}} \left(\left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n-2r} - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{2k-2r+x} \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n-k-x} \right).$$

Itt $x = |A_{(k)} \cap A_1| + |A_{(k)} \cap A_2|$, ezért $0 \leq x \leq \min\{2r, n-k\}$.

Legyen most $a = \left(1 - \frac{2}{N}\right)$ és $b = \left(1 - \frac{1}{N}\right)$. Ekkor $0 < a < b < 1$, továbbá $b^2 - a = \frac{1}{N^2}$.

A B_2-t először az $x = 2r$ esetben vizsgáljuk meg, ami azt jelenti, hogy $A_1, A_2 \subset A_{(k)}$.

Ennek a tagnak a számossága $N(N-1)(n-k)!/(r!r!(n-k-2r)!)$
A kérdéses tagot az alábbiakban becsüljük

$$\left|\frac{1}{N^{2r}}\left(\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-2r}-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2k}\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-k-2r}\right)\right|=$$
$$=\left|\frac{1}{N^{2r}}a^{n-k-2r}(a^k-b^{2k})\right|\leq\frac{1}{N^{2r}}a^{n-k-2r}kb^{2(k-1)}\frac{1}{N^2},$$

ahol felhasználtuk a középérték-tételt.

Ezért B_2 szóban forgó része nem nagyobb mint

$$N(N-1)\frac{(n-k)!}{r!r!(n-k-2r)!}\frac{1}{N^{2r}}\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-k-2r}k\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2(k-1)}\frac{1}{N^2}=B_{21}.$$

Ezután vizsgáljuk meg a B_2-es tagból visszamaradt részt, azaz azt, ahol $x<2r$. Ezen tagok száma

$$N(N-1)\left(\frac{n!}{r!r!(n-2r)!}-\frac{(n-k)!}{r!r!(n-k-2r)!}\right)\leq N(N-1)\frac{2rkn^{2r-1}}{r!r!}=B_{221}.$$

A fentiekben felhasználtuk a következő tényt: ha fennállnak a $0\leq b_i\leq a_i\leq c$ és az $a_i-b_i\leq l$ összefüggések minden $i=1,2,\dots s$ esetén, akkor érvényes a $\prod_{i=1}^s a_i-\prod_{i=1}^s b_i\leq slc^{s-1}$ reláció.

Ha alkalmazzuk a középérték tételt, akkor ezen részbeli tagok nagyságrendjére az alábbi becsléssorozatot kapjuk:

$$\left|\frac{1}{N^{2r}}\left(a^{n-2r}-b^{2k-2r+x}a^{n-k-x}\right)\right|=$$
$$=\left|\frac{1}{N^{2r}}a^{n-k-2r}\left(\left(a^k-b^{2k}\right)+b^{2k}\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2r-x}\right)\right)\right|\leq$$
$$\leq\frac{1}{N^{2r}}a^{n-k-2r}\left(\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2(k-1)}k\frac{1}{N^2}+b^{2k}(2r-x)\frac{1}{N-1}\right)=$$
$$=\frac{1}{N^{2r}}\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-k-2r}\left(\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2(k-1)}k\frac{1}{N^2}+\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2k}(2r-x)\frac{1}{N-1}\right)=$$
$$=B_{222}.$$

Összegezve az előbbieket adódik, hogy

$$B_2 \leq B_{21} + B_{221} B_{222} \leq$$

$$\leq c\frac{n^{2r}}{N^{2r}}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n+k-2r-2} k + c\frac{n^{2r-1}}{N^{2r}}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n+k-2r-2} k^2 +$$

$$+c\frac{n^{2r-1}}{N^{2r-1}}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n+k-2r} k \leq c\alpha^{2r-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n+k} k(\alpha+1).$$

Végül vizsgáljuk meg a B_4-es tagot. Legyen $r_1 = |\{1,2,\ldots,k\} \cap A| = r - |A \cap A_{(k)}|$.

Ekkor

$$B_4 = N \sum_{|A|=r, A\subset A_{(0)}} \left(\mathbb{E}(\eta_{iA})^2 - \mathbb{E}(\eta_{iA}^{(k)})^2\right) =$$

$$= N \sum_{|A|=r, A\subset A_{(0)}} \left(\frac{1}{N^r}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-r} - \frac{1}{N^{2r_1}}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2(k-r_1)} \frac{1}{N^{r-r_1}}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k-(r-r_1)}\right)$$

$$= N \sum_{r_1=\max\{r-(n-k),0\}}^{\min\{k,r\}} C_k^{r_1} C_{n-k}^{r-r_1}\left(\frac{1}{N^r}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-r} - \frac{1}{N^{r+r_1}}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n+k-r-r_1}\right) =$$

$$= N \sum_{r_1=\max\{r-(n-k),0\}}^{\min\{k,r\}} C_k^{r_1} C_{n-k}^{r-r_1} \frac{1}{N^r}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-r}\left(1-\frac{1}{N^{r_1}}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{k-r_1}\right) \leq$$

$$\leq N \sum_{r_1=\max\{r-(n-k),0\}}^{\min\{k,r\}} \frac{k^{r_1}}{r_1!}\frac{n^{r-r_1}}{(r-r_1)!}\frac{1}{N^r}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-r}\left(1-\frac{1}{N^{r_1}}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{k-r_1}\right) \leq$$

$$\leq N \sum_{r_1=0}^{r} \frac{k^{r_1}}{r_1!}\frac{n^{r-r_1}}{(r-r_1)!}\frac{1}{N^r}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-r}\left(1-\frac{1}{N^{r_1}}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{k-\min\{k,r_1\}}\right).$$

Ha elkülönítjük az $r_1 = 0$ részt és alkalmazzuk a középértéktételt, akkor kapjuk, hogy

$$B_4 \le N \sum_{r_1=1}^{r} \frac{k^{r_1}}{r_1!} \frac{n^{r-r_1}}{(r-r_1)!} \frac{1}{N^r} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-r} +$$

$$+N \frac{n^r}{r!} \frac{1}{N^r} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-r} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^k\right) \le$$

$$\le k\alpha^{r-1} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-r} \sum_{r_1=1}^{r} \left(\frac{k}{n}\right)^{r_1-1} \frac{1}{r_1!} + N \frac{\alpha^r}{r!} \frac{k}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-r} \le$$

$$\le k\alpha^{r-1} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-r} \left(e + \frac{\alpha}{r!}\right), \tag{7.6}$$

amivel a bizonyítás teljes.

□

7.3. Majdnem biztos határeloszlás-tételek a véletlen elhelyezésre

A tételek bizonyításához szükségünk lesz az alábbi állításra.

7.2. tétel. *(Fazekas, Chuprunov, [28], Theorem 2.1)) Legyenek $(\alpha_1(k))_{k\geq 1}$ és $(\alpha_2(k))_{k\geq 1}$ egész értékű sorozatok úgy, hogy $1 \leq \alpha_1(k) \leq \alpha_2(k) < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Legyen továbbá (M, ϱ) egy tetszőleges teljes, szeparábilis metrikus tér és a $\zeta_{k,i}$, $\alpha_1(k) \leq \alpha_2(k)$ M értékű valószínűségi változók és μ_ζ jelölje a ζ valószínűségi változó eloszlását.*

Tegyük fel továbbá, hogy léteznek olyan $C > 0$ és $\beta > 0$ konstansok és egy pozitív, monoton növekvő $(c_n)_{n\geq 1}$ sorozat úgy, hogy $\lim_{n\to\infty} c_n \to \infty$, $c_{n+1}/c_n = O(1)$ és ζ_{lj}^{ki} $(k, i, l, j \in \mathbb{N}, k < l)$ M értékű valószínűségi változók úgy, hogy fennáll az

$$\mathbb{E}\left(\varrho(\zeta_{lj}, \zeta_{lj}^{ki}) \wedge 1\right) \leq C\left(\frac{c_k}{c_l}\right)^\beta \tag{7.7}$$

$k < l$ és bármely i, j esetén. Legyen $0 \leq d_k \leq \log(c_{k+1}/c_k)$ és $\sum_{k=1}^\infty d_k = \infty$. Tegyük fel, hogy

$$d_k = \sum_{i=\alpha_1(k)}^{\alpha_2(k)} d_{ki}$$

bármely k esetén, ahol d_{ki} nemnegatív számok. Legyen továbbá $D_n = \sum_{k=1}^n d_k$. Ekkor bármely, az M Borel szigma-algebráján értelmezett μ valószínűségi mérték esetén az alábbi két állítás ekvivalensek

$$\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^n \sum_{i=\alpha_1(k)}^{\alpha_2(k)} d_{ki}\delta_{\zeta_{ki}(\omega)} \Rightarrow \mu, \quad \text{ha } n \to \infty \tag{7.8}$$

$\mathbb{P}$-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén, illetve

$$\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^n \sum_{i=\alpha_1(k)}^{\alpha_2(k)} d_{ki}\mu_{\zeta_{ki}} \Rightarrow \mu, \quad \text{ha } n \to \infty. \tag{7.9}$$

□

A következő eredmény a Kolchin-Sevastyanov-Chistyakov-tétel ([46], Theorem 3.) egy verziója. Az általunk ismertetésre kerülő tétel újdonsága abban áll, hogy egyenletes konvergenciát állítunk az (n, N)-ben egy bizonyos tartományon, miközben az l-et rögzítjük.

7.3. tétel. *(Fazekas, Chuprunov, Túri, [30], Theorem 2.2.) Tegyük fel, hogy $r \geq 2$ és $l \in \mathbb{N}$ legyen rögzített. Ekkor $n, N \to \infty$ esetén fennáll a*

$$\mathbb{P}(\mu_r(n,N) = l) = \frac{1}{l!}(Np_r)^l e^{-Np_r}(1 + o(1)) \tag{7.10}$$

összefüggés egyenletesen a $T = \{(n,N) : N \geq n^{(2r-1)/(2r-2)} \log n\}$ tartományon.

Bizonyítás. Tekintsük a független, azonos Poisson eloszlású, α paraméterű $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N$ valószínűségi változókat, legyen továbbá $\zeta_N = \eta_1 + \cdots + \eta_N$. Tekintsük azokat a $\eta_1^{(r)}, \eta_2^{(r)}, \ldots, \eta_N^{(r)}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változókat, amelyek az alábbi

$$\mathbb{P}(\eta_i^{(r)} = l) = \mathbb{P}(\eta_i = l | \eta_i \neq r)$$

eloszlást követik.

Legyen $\zeta_N^{(r)} = \eta_1^{(r)} + \cdots + \eta_N^{(r)}$. Ekkor a [46]-ben szereplő 1. lemma miatt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\mu_r(n,N) = l) = \binom{N}{l} p_r^l (1-p_r)^{(N-l)} \frac{\mathbb{P}(\zeta_{N-l}^{(r)} = n - lr)}{\mathbb{P}(\zeta_N = n)} = F\frac{G}{H}. \tag{7.11}$$

A T tartományon $n, N \to \infty$ esetén kapjuk, hogy $\alpha \to 0$ és $p_r(\alpha) \to 0$.

Így az F-fel kapcsolatban írható, hogy

$$\frac{\binom{N}{l} p_r^l (1-p_r)^{N-l}}{\frac{1}{l!}(Np_r)^l e^{-Np_r}} \sim \frac{(1-p_r)^N}{e^{-Np_r}}.$$

Ha vesszük a $\frac{(1-p_r)^N}{e^{-Np_r}}$ kifejezés logaritmusát és e kifejezés becslésében alkalmazzuk a $\log(1-x)$ függvény Taylor sorfejtés közelítését a második tagig[20], akkor kapjuk, hogy[21]

$$\log \frac{(1-p_r)^N}{e^{-Np_r}} = N \log(1-p_r) - \log e^{-Np_r n} = N \log(1-p_r) + Np_r \approx$$

$$\approx N\left(-p_r - \frac{p_r^2}{2}\right) + Np_r = -\frac{p_r^2}{2} = -N\frac{\left(\frac{\alpha^r}{r!}e^{-\alpha}\right)^2}{2} =$$

[20] A $\log(1-x) \approx -x - \frac{x^2}{2}$ közelítést alkalmazzuk.

[21] Figyelembe véve, hogy $p_r = p_r(\alpha) = \frac{\alpha^r}{r!}e^{-\alpha}$ és $\alpha = \frac{n}{N}$.

$$= -N \frac{\left(\frac{\left(\frac{n}{N}\right)^r}{r!} e^{-\frac{n}{N}} \right)^2}{2} = -\frac{\frac{n^{2r}}{N^{2r-1}}}{2(r!)^2} e^{-\frac{2n}{N}}$$

Ha alkalmazzuk az alábbi becslést, ahol felhasználjuk a $T = \{(n, N) : N \geq n^{(2r-1)/(2r-2)} \log n\}$ tartomány tulajdonságát, azaz azt, hogy $N \geq n^{(2r-1)/(2r-2)} \log n$, akkor az alábbi

$$\frac{\frac{n^{2r}}{N^{2r-1}}}{2(r!)^2} e^{-\frac{2n}{N}} \leq \frac{\frac{n^{2r}}{\left(n^{\frac{2r-1}{2r-2}} \log n\right)^{2r-1}}}{2(r!)^2} e^{-\frac{2n}{N}} \leq \frac{1}{2n^{\frac{1}{2r-2}} (\log n)^{2r-1} (r!)^2} \to 0$$

$(n \to \infty)$ összefüggést kapjuk, ahol felhasználtuk, hogy $e^{-\frac{2n}{N}} \leq 1$ bármely n, N esetén.

Tehát – figyelembe véve a fentieket – fennáll, hogy

$$\log \frac{(1-p_r)^N}{e^{-Np_r}} \to 0, \quad \text{ha } n, N \to \infty$$

egyenletesen a T tartományon, azaz

$$\frac{(1-p_r)^N}{e^{-Np_r}} \to 1, \quad \text{ha } n, N \to \infty$$

egyenletesen a T tartományon.

A G vizsgálatához szükségünk lesz a [46]-ban található 1. tételre.

Ha $r \geq 2$ esetén és $m \to \infty$ úgy, hogy $\alpha m \to \infty$, akkor kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\zeta_m^{(r)} = t) = \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi m}} e^{\frac{(t-m\alpha_r)^2}{2m\sigma_r^2}} (1 + o(1))$$

egyenletesen a $\frac{(t-m\alpha_r)}{\sigma_r\sqrt{m}}$-hez bármely véges intervallumon.

Itt

$$\alpha_r = \mathbb{E}\eta_i^{(r)} = \frac{\alpha - rp_r}{1-p_r}$$

és

$$\sigma_r^2 = \mathbb{D}^2\eta_i^{(r)} = \frac{\alpha}{(1-p_r)^2} \left(1 - p_r - \frac{(\alpha - p_r)^2}{\alpha} p_r \right).$$

Ezért

$$G = \mathbb{P}(\zeta_{N-l}^{(r)} = n - lr) = \frac{1}{\sigma_r\sqrt{2\pi(N-l)}} e^{\frac{(n-lr-(N-l)\alpha_r)^2}{2(N-l)\sigma_r^2}} (1 + o(1)).$$

Egyszerű számolással kapjuk, hogy $G \sim 1/\sqrt{2\pi(N-l)\alpha} \sim 1/\sqrt{2\pi n}$ egyenletesen T-n.

Végezetül foglalkozzunk a H-val. Mivel a ζ_N valószínűségi változó Poisson eloszlást követ, így -alkalmazva a Stirling-formulát- kapjuk, hogy

$$H = \mathbb{P}(\zeta_N = n) = \frac{n^n}{n!}e^{-n} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

egyenletesen.

Helyettesítsük az F a G, illetve a H assziptotikus értékeit a (7.11)-be és így megkapjuk (7.10)-t.

$\square$

Ezután kimondhatjuk az előző 7.3. tétel majdnem biztos verzióját.

7.4. tétel. *(Fazekas, Chuprunov, Túri, [30], Theorem 2.3.) Legyen $r \geq 2$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \infty$ rögzített, továbbá tekintsük az alábbi*

$$T_n = \left\{(k, K) \in \mathbb{N}^2 : k \leq n, \lambda_1 \leq \frac{k}{K^{1-\frac{1}{r}}} \leq \lambda_2\right\}$$

tartományt $\mathbb{N}^2$-ben.

Legyen

$$Q_n(\omega) = \frac{1}{\frac{r}{r-1}(\lambda_2 - \lambda_1)\log n} \sum_{(k,K)\in T_n} \frac{1}{K^{2-\frac{1}{r}}} \delta_{\mu_r(n,N)(\omega)}.$$

Ekkor $n \to \infty$ esetén

$$Q_n(\omega) \Rightarrow \mu_\tau$$

$\mathbb{P}$-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén, ahol τ olyan valószínűségi változó, amelynek eloszlása

$$\mathbb{P}(\tau = l) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{l!} \left(\frac{x^r}{r!}\right)^l e^{-\frac{x^r}{r!}} dx, \tag{7.12}$$

alakú, ahol $l = 0, 1, \ldots$.

Bizonyítás. Legyen $\zeta_{k,K} = \mu_r(k,K)$, továbbá $k < n$ esetén legyen $\zeta_{n,N}^{k,K} = \zeta_n^k + \mathbb{E}\zeta_n^k$, ahol a ζ_n^k a (7.4)-ben definiált valószínűségi változó. Megmutatjuk, hogy a $\zeta_{n,N}^{k,K}$ kielégíti a 7.2. tétel feltételeit. A $\zeta_{n,N}^{k,K}$ és a $\zeta_{k,K}$ függetlenek $k < n$ esetén. A 7.1. tételből adódóan kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\left(\zeta_{n,N} - \zeta_{n,N}^{k,K}\right)^2 \le c_0 k \left(\frac{n}{N}\right)^{r-1} \le c_0 \frac{k}{n}\left(\frac{n}{N^{1-\frac{1}{r}}}\right)^r \le c_0 \frac{k}{n}(\lambda_2)^r,$$

mivel $(n,N) \in T_n$. Tehát a $d_k = c\frac{1}{k}$ alkalmas választás bármely c pozitív konstans estén.

Legyen $d_{kK} = \frac{1}{K^{2-\frac{1}{r}}}$, minden olyan (k,K) számpárra, amelyre fennáll, hogy $\lambda_1 \le \frac{k}{K^{1-\frac{1}{r}}} \le \lambda_2$.

Ekkor

$$d_k = \sum d_{kK} = \sum_{\{K:(k/\lambda_2)^{\frac{r}{r-1}} \le K \le (k/\lambda_1)^{\frac{r}{r-1}}\}} \frac{1}{K^{2-\frac{1}{r}}} \approx \frac{r}{r-1}(\lambda_2-\lambda_1)\frac{1}{k}.$$

Tehát a fenti választás lehetséges. Ezért, a 7.2. tételben

$$D_n = \sum_{k=1}^n d_k = \sum_{k=1}^n \frac{r}{r-1}(\lambda_2-\lambda_1)\frac{1}{k} \approx \frac{r}{r-1}(\lambda_2-\lambda_1)\log n.$$

Megjegyezzük, hogy a 7.3. tétel alkalmazható, mivel a 7.3. tételben szereplő tartomány bővebb, mint ami 7.4. tételben található.

A 7.3. tételt figyelembe véve be kell látnunk, hogy

$$F = \frac{r-1}{r(\lambda_2-\lambda_1)\log n} \sum_{k=1}^n \sum_{\{K:\lambda_1 \le \frac{k}{K^{1-\frac{1}{r}}} \le \lambda_2\}} \frac{1}{K^{1-\frac{1}{r}}} \mathbb{P}(\mu_r(k,K)=l) \to$$

$$\to \mathbb{P}(\tau = l), \tag{7.13}$$

ahol a τ-t a (7.12)-ben definiáltuk.

Az F-re könnyen kapjuk az alábbi kifejezést és a kifejezés végén a többletet már ki is vonjuk, azaz

$$F = \cdots \sum_{K=1}^{N(n)} \sum_{\{k:\lambda_1 \le \frac{k}{K^{1-\frac{1}{r}}} \le \lambda_2\}} \cdots - \cdots \sum_{K=(n/\lambda_2)^{\frac{r}{r-1}}}^{(n/\lambda_1)^{\frac{r}{r-1}}} \sum_{k=n}^{K^{\frac{r-1}{r}}\lambda_2} \cdots = A - B,$$

jelöléssel, ahol $N(n) = (n/\lambda_1)^{\frac{r}{r-1}}$.

Ezután tekintsük az alábbi közelítéseket. Mivel $\alpha = k/K \to 0$, ha $k, K \to \infty$ úgy, hogy $\lambda_1 \le \frac{k}{K^{1-\frac{1}{r}}} \le \lambda_2$, ezért $e^{-\alpha} \approx e^0 = 1$.

Így

$$Kp_r = K\frac{\alpha^r}{r!}e^{-\alpha} = K\frac{1}{r!}\left(\frac{k}{K}\right)^r e^{-k/K} \approx \frac{1}{r!}\left(\frac{k}{K^{1-\frac{1}{r}}}\right)^r.$$

Ekkor kapjuk, hogy

$$\frac{1}{l!}\sum_{\{k:\lambda_1 \le \frac{k}{K^{1-\frac{1}{r}}} \le \lambda_2\}} \frac{1}{K^{1-\frac{1}{r}}}(Kp_r)^l e^{-Kp_r} \approx$$

$$\approx \frac{1}{l!}\sum_{\{k:\lambda_1 \le \frac{k}{K^{1-\frac{1}{r}}} \le \lambda_2\}} \frac{1}{K^{1-\frac{1}{r}}}\left(\frac{1}{r!}\left(\frac{k}{K^{1-\frac{1}{r}}}\right)^r\right)^l \exp\left(-\frac{1}{r!}\left(\frac{k}{K^{1-\frac{1}{r}}}\right)^r\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{l!}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left(\frac{x^r}{r!}\right)^l e^{-\frac{x^r}{r!}}dx.$$

Így kapjuk, hogy

$$A \approx \frac{1}{\frac{r}{r-1}(\lambda_2-\lambda_1)\log n}\sum_{K=1}^{N(n)}\frac{1}{K}\frac{1}{l!}\sum_{\{k:\lambda_1 \le \frac{k}{K^{1-\frac{1}{r}}} \le \lambda_2\}} \frac{1}{K^{1-\frac{1}{r}}}(Kp_r)^l e^{-Kp_r} \approx$$

$$\approx \frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)}\frac{1}{l!}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left(\frac{x^r}{r!}\right)^l e^{-\frac{x^r}{r!}}dx.$$

A B-re kapjuk, hogy

$$0 \le B \le \frac{1}{c\log n}\sum_{K=(n/\lambda_2)^{\frac{r}{r-1}}}^{(n/\lambda_1)^{\frac{r}{r-1}}} \sum_{k=n}^{K^{\frac{r-1}{r}}\lambda_2} \frac{1}{K^{2-\frac{1}{r}}} \to 0,$$

ha $n \to \infty$.

Így, mivel az F és az A határértéke megegyezik beláttuk (7.13)-at, így a bizonyítás teljes.

□

Ezután azt vizsgáljuk, amikor a határeloszlás normális eloszlást követ. Ehhez szükségünk lesz az alábbi eredményre.

7.5. tétel. *(Kolchin, Sevastyanov, Chistyakov, [46], Ch.2, Sec.3, Theorem 4.) Legyen az $r \geq 0$ rögzített. Ha $n, N \to \infty$ úgy, hogy $Np_r(\alpha) \to \infty$, akkor $S_{n,N}^{(r)} \Rightarrow \gamma$, ahol a γ jelöli a sztenderd normális eloszlást.*

□

A 7.5. tétel majdnem biztos verziója a következő.

7.6. tétel. *(Fazekas, Chuprunov, Túri, [30], Theorem 2.4.) Tegyük fel, hogy $r \geq 2$ rögzített, $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq \infty$ és tekintsük az alábbi*

$$T_n = \left\{(k, K) \in \mathbb{N}^2 : k \leq n, \alpha_1 k \leq K \leq \alpha_2 k^{(2r+1)/(2r)}\right\}.$$

tartományt.

Legyen

$$Q_n^{(r)+}(\omega) = \frac{1}{\log n} \sum_{(k,K) \in T_n} \frac{1}{k(\log \alpha_2 - \log \alpha_1 + (1/2r) \log k)K} \delta_{S_{k,K}^{(r)}(\omega)}.$$

Ekkor $n \to \infty$ esetén

$$Q_n^{(r)+}(\omega) \Rightarrow \gamma$$

$\mathbb{P}$-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén.

Bizonyítás. Legyen az $r \geq 2$ rögzített. Legyen $\zeta_{kK} = S_{kK}^{(r)}$ és $k < n$ esetén $\zeta_{n,N}^{k,K} = \zeta_n^k / \mathbb{D}_{n,N}^{(r)}$, ahol a ζ_n^k a (7.4)-ben definiált valószínűségi változó. Megmutatjuk, hogy a $\zeta_{n,N}^{k,K}$ kielégíti a 7.2. tétel függetlenségi és a (7.7) feltételét. A $\zeta_{n,N}^{k,K}$ és a ζ_{kK} valószínűségi változók $k < n$ esetén nyilván függetlenek.

$r \geq 2$ esetén a (7.3) feltételből és a 7.1. megjegyzésből következően fennáll a $CN\alpha^r e^{-\alpha} \leq (\mathbb{D}_{n,N}^{(r)})^2$ összefüggés valamely $C > 0$ konstans esetén.

Ezért a 7.1. tételből következően kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\left(\zeta_{n,N} - \zeta_{n,N}^{k,K}\right)^2 \leq c_0 \frac{k}{n}(\alpha^{r+1} + 1) \leq c' \frac{k}{n},$$

ha $(n, N) \in T_{n,N}$.

Ezért a $d_k = c\frac{1}{k}$ megfelelő választás bármely c pozitív konstans esetén.

Legyen

$$d_{k,K} = \frac{1}{k} \frac{1}{\log \alpha_2 - \log \alpha_1 + \frac{1}{2r} \log k} \frac{1}{K}.$$

Ekkor kapjuk, hogy

$$\sum_{\{K : \alpha_1 k \leq K \leq \alpha_2 k^{(1+2r)/(2r)}\}} d_{k,K} \approx \frac{1}{k} = d_k,$$

ezért a $D_n = \log n$ megfelelő választás.

Ha $n, N \to \infty$ úgy, hogy $(n, N) \in T_{n,N}$, akkor $Np_r(\alpha) \to \infty$. Ekkor alkalmazhatjuk a 7.5. tételt, így adódik, hogy

$$\frac{1}{\log n} \sum_{(k,K) \in T_{n,N}} d_{k,K} \mu_{S_{k,K}^{(r)}} \Rightarrow \gamma,$$

ha $n \to \infty$.
Igy alkalmazhatjuk a 7.2. tételt, amivel a bizonyítás teljes.

□

Ezután ismertetjük a központi tartomány fogalmát, amelyre a későbbiekben szükségünk lesz. Ha $n, N \to \infty$ úgy, hogy

$$0 < \alpha_1 \leq \frac{n}{N} \leq \alpha_2 < \infty,$$

ahol α_1 és α_2 valamilyen konstansok, akkor azt mondjuk, hogy $n, N \to \infty$ a **központi tartományon**.

A továbbiakhoz szükségünk lesz az alábbi eredményre is.

7.7. tétel. *(Kolchin, Sevastyanov, Chistyakov, [46], Ch.2, Sec.2, Theorem 4.) Tegyük fel, hogy* $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$. *Ha* $n, N \to \infty$ *úgy, hogy* $\alpha = \frac{n}{N} \in [\alpha_1, \alpha_2]$, *akkor* $S_{n,N}^{(r)} \Rightarrow \gamma$.

□

Ezután megfogalmazhatjuk a következő majdnem biztos eredményt.

7.8. tétel. *(Fazekas, Chuprunov, Túri, [30], Theorem 2.5.) Legyen az $r \geq 0$ rögzített, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$ és*

$$Q_n^{(r)}(\omega) = \frac{1}{(\log \alpha_2 - \log \alpha_1) \log n} \sum_{k \leq n} \sum_{\{K : \alpha_1 \leq \frac{k}{K} \leq \alpha_2\}} \frac{1}{kK} \delta S_{k,K}^{(r)}(\omega).$$

Ekkor $n \to \infty$ esetén

$$Q_n^{(r)}(\omega) \Rightarrow \gamma$$

$\mathbb{P}$-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén.

Bizonyítás. $r = 0$ esetén a tétel a Fazekas-Chuprunov tétel (lásd [28]). Vizsgáljuk az $r \geq 1$ esetet. Legyen $\zeta_{k,K} = S_{k,K}^{(r)}$, továbbá $k < n$ esetén legyen $\zeta_{n,N}^{(k,K)} = \zeta_n^k / \mathbb{D}_{n,N}^{(r)}$, a (7.4)-ben definiált valószínűségi változó. Belátjuk, hogy a $\zeta_{n,N}^{(k,K)}$ változó kielégíti a 7.2. tétel függetlenségi és a (7.7) feltételét.
A $\zeta_{n,N}^{(k,K)}$ és a $\zeta_{k,K}$ függetlenek, ha $k < n$. A (7.3) feltételből és a 7.1. megjegyzésből következően fennáll a központi tartományon a $CN \leq (\mathbb{D}_{n,N}^{(r)})^2$ összefüggés, ahol a C csak az α_1 és az α_2-től függ.

Ezért a 7.1. tételből következően kapjuk a következő

$$\mathbb{E}(\zeta_{n,N} - \zeta_{n,N}^{k,K})^2 \leq c_0 \frac{k}{(\mathbb{D}_{n,N}^{(r)})^2} \leq \frac{c_0}{C} \frac{k}{N} \leq \frac{c_0 \alpha_2}{C} \frac{k}{n}$$

összefüggést.

Ezért a $d_k = c\frac{1}{k}$ választás bármely c állandó esetén megfelelő.

Ezenkívül az alábbi

$$d_k = \frac{1}{k} \sum_{\{K : \frac{k}{\alpha_1} \leq K \leq \frac{k}{\alpha_2}\}} \frac{1}{K} \approx \frac{1}{k} (\log \alpha_2 - \log \alpha_1)$$

választás megfelelő. Tehát $D_n = (\log \alpha_2 - \log \alpha_1)$.

A 7.7. tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(\log \alpha_2 - \log \alpha_1) \log n} \sum_{k \leq n} \sum_{\{K : \alpha_1 \leq \frac{k}{K} \leq \alpha_2\}} \frac{1}{kK} \mu_{S_{kK}^{(r)}} \Rightarrow \gamma,$$

ha $n \to \infty$.
Ha alkalmazzuk a 7.2. tételt, akkor adódik a tétel állítása.

$\square$

Az előző tételben a határértéket-tételt az $n \to \infty$ esetre mondtuk ki úgy, hogy az összegzést rögzített központi tartományon végeztük el. Az alábbi tétel már két indexes, azaz $n \to \infty$ és $N \to \infty$. Az n és az N közötti kapcsolat tetszőleges, de feltételezzük, hogy az összegzés egy rögzített központi tartományon történik, továbbá azt is, hogy az (n, N) is ugyanott található.

7.9. tétel. *(Fazekas, Chuprunov, Túri, [30], Theorem 2.6.) Legyen az $r \geq 0$ rögzített, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$ és*

$$Q_{n,N}^{(r)}(\omega) = \frac{1}{(\log \alpha_2 - \log \alpha_1) \log n} \sum_{k \leq n} \sum_{\{K: K \leq N, \alpha_1 \leq \frac{k}{K} \leq \alpha_2\}} \frac{1}{kK} \delta_{S_{k,K}^{(r)}(\omega)}.$$

Ekkor, ha $n, N \to \infty$ úgy, hogy $\alpha_1 \leq \frac{n}{N} \leq \alpha_2$, akkor

$$Q_{n,N}^{(r)}(\omega) \Rightarrow \gamma$$

$\mathbb{P}$-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén.

Bizonyítás. A $Q_n^{(r)}$ és a $Q_{n,N}^{(r)}$ kifejezések különbségére kapjuk, hogy

$$Q_n^{(r)}(\omega) - Q_{n,N}^{(r)}(\omega) = \frac{1}{(\log \alpha_2 - \log \alpha_1) \log n} \sum_{k \leq n} \sum_{\{K: K > N, \alpha_1 \leq \frac{k}{K} \leq \alpha_2\}} \frac{1}{kK} \delta_{S_{k,K}^{(r)}(\omega)}.$$

Továbbá egyszerű számolással adódik, hogy

$$\sum_{k \leq n} \sum_{\{K: K > N, \alpha_1 \leq \frac{k}{K} \leq \alpha_2\}} \frac{1}{kK} \leq c(\log \alpha_2 - \log \alpha_1)^2.$$

Ezért rögzített ω esetén kapjuk, hogy $Q_n^{(r)}(\omega) \Rightarrow \gamma$, ha $n \to \infty$, így $Q_{n,N}^{(r)}(\omega) \Rightarrow \gamma$, ha $n, N \to \infty$, amivel a bizonyítás teljes.

$\square$

8. fejezet

Határérték-tétel a véletlen elhelyezések folyamatára

Ebben a fejezetben a véletlen elhelyezést mint folyamatot vizsgáljuk. A véletlen elhelyezés széles körben vizsgált diszciplina. Olyan szerzők foglalkoztak a témakörrel mint Weiss [77], Rényi [62] és Békéssy [5], de megemlíthetünk olyan tradicionális monográfiát is mint például a Kolchin, Sevast'yanov és Chistyakov [46] által fémjelzett mű. A témával kapcsolatban a mai napig jelentős eredmények születnek (például Timashev [68] és Chuprunov, Fazekas [18]).

A véletlen elhelyezés folyamata a következőképpen modellezhető: helyezzünk el N dobozban egymás után, egymástól függetlenül labdákat. A golyók elhelyezése során minden dobozba ugyanazon $1/N$ valószínűséggel essenek. Egy rögzített periódus alatt (például ez a rögzített periódus lehet egy nap) helyezzünk el m darab labdát és ezt a kísérletet ismételjük n napon keresztül. Jelölje p_q annak a valószínűségét, hogy q darab labdánál többet nem helyezünk el az N darab doboz egyikében sem egyetlen napon sem az n nap során.

A fő eredményünk a véletlen elhelyezések folyamatával kapcsolatban a fejezet 8.2. tétele, amely $m, n, N \to \infty$ és rögzített q esetén az $\frac{n}{N^q}\binom{m}{q+1} \to \alpha$ és az $\frac{m^2}{N} \to 0$ feltételek teljesülése esetén az alábbi konvergenciát állítja:

$$\lim p_l = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad 0 \leq l < q, \\ e^{-\alpha}, & \text{ha} \quad l = q, \\ 1, & \text{ha} \quad l > q. \end{cases}$$

Ezen tétel bizonyításához felhasználjuk az Avkhadiev-től és Chuprunov-tól származó (lásd [3], Theorem A és Theorem B) tételeket is (jelen dolgozatban 8.1. és 8.3. tételek). A fejezetben alsó és felső becslést is adunk a p_l valószínűségekre:

$$\left(1-\frac{1}{N^l}\binom{m}{l+1}\right)^n \leq p_l \leq \left(1-\frac{1}{N^l}\binom{m}{l+1}(1-\varepsilon)\right)^n.$$

8.1. Határérték-tétel a p_l valószínűségre

Ebben a részben tehát megadjuk a p_l sorozat határértékét, amelynek a bizonyításához felhasználjuk az alábbi eredményt.

8.1. tétel. *(Avkhadiev, Chuprunov, [3], Theorem 2) Legyen $m \geq 2$. Ekkor fennáll a*

$$p_1 = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n \dots \left(1 - \frac{m-1}{N}\right)^n. \tag{8.1}$$

összefüggés.

Ha m rögzített és $n, N \to \infty$ úgy, hogy $n/N \to \alpha$, akkor $p_1 \to e^{-\frac{m(m-1)}{2}\alpha}$. Ha $2 \leq q \leq m-1$, akkor $p_q \to 1$, ha $n, N \to \infty$ úgy, hogy $n/N \leq \alpha' < \infty$.

□

A következőkben a fenti tétel egy általánosítását adjuk meg a következő értelemben: a $p_q, (q > 1)$ valószínűséget határozzuk meg abban az esetben, amikor a labdák száma növekszik. Eltekintünk attól az esettől, amikor az m, n, N egész számok úgy tartanak a végtelenhez, hogy egy olyan q számot határoznak meg, amelyre a p_q valószínűség nem triviális, de fennáll, hogy $\lim p_{q-1} = 0$ és $\lim p_{q+1} = 1$.

Az előbbieket figyelembe véve eredményünk a következő:

8.2. tétel. *(Fazekas, Túri, [34], Theorem 1) Legyen q egy rögzített pozitív egész szám. Tegyük fel, hogy $m, n, N \to \infty$ úgy, hogy teljesülnek az*

$$\frac{n}{N^q} \binom{m}{q+1} \to \alpha \tag{8.2}$$

és az

$$\frac{m^2}{N} \to 0 \tag{8.3}$$

összefüggések, ahol α egy pozitív véges szám.

Ekkor fennáll, hogy

$$\lim p_l = \begin{cases} 0, & ha \quad 0 \leq l < q, \\ e^{-\alpha}, & ha \quad l = q, \\ 1, & ha \quad l > q. \end{cases} \tag{8.4}$$

Ezután rögtön kimondhatjuk az alábbi eredményt is.

8.1. megjegyzés. *(Fazekas, Túri, [34], Remark 1) Fennáll az*

$$\left(1-\frac{1}{N^l}\binom{m}{l+1}\right)^n \le p_l \le \left(1-\frac{1}{N^l}\binom{m}{l+1}(1-\varepsilon)\right)^n \tag{8.5}$$

összefüggés minden $l = 1, 2, \ldots, m-1$ esetén, ahol $\varepsilon \ge 0$ és $\varepsilon \to 0$, ha $m \to \infty$, $N \to \infty$ úgy, hogy $m^2/N \to 0$.

A 8.2. tétel bizonyításához szükségünk lesz a következő eredményre is.

8.3. tétel. *(Avkhadiev, Chuprunov, [3], Theorem 1)*
Tegyük fel, hogy $m \ge 2$ és $1 \le q \le m-1$. Ekkor fennáll az

$$p_q = \left(1-\frac{A_q}{q!N}\right)^n \tag{8.6}$$

összefüggés, ahol

$$A_q = \sum_{l=q}^{m-1} \frac{1}{N^{l-1}} \left.\frac{d^l[z^q(f_q(z))^{N-1}]}{dz^l}\right|_{z=0}$$

és

$$f_k(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^k}{k!}$$

bármely nemnegatív k egész szám esetén.

□

Ezután rátérhetünk a 8.2. tétel bizonyítására.
Bizonyítás. Először vizsgáljuk meg a $q = 1$ esetet, mivel az meglehetősen egyszerű és rögtön látható, hogy miért szükséges a (8.2) feltétel. Ha vesszük az (8.1) kifejezés logaritmusát, akkor kapjuk, hogy

$$\ln p_1 = n \sum_{i=0}^{m-1} \ln\left(1-\frac{i}{N}\right). \tag{8.7}$$

Ha alkalmazzuk a $\ln(1-x) = -x - x^2/(2(1-\vartheta x)^2)$ Taylor kifejtést a $\vartheta \in]0,1[$ értékkel, akkor kapjuk, hogy

$$\ln p_1 = -n \sum_{i=0}^{m-1} \frac{i}{N} - \frac{n}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{i}{N}\right)^2 \left(1-\vartheta_i \frac{i}{N}\right)^{-2}. \tag{8.8}$$

Az első összeadandóra (8.8)-ban kapjuk, hogy $-n\sum_{i=0}^{m-1}\frac{i}{N} = -\frac{n}{N}\binom{m}{2} \to -\alpha$. Ha feltesszük, hogy $m < N$, akkor (8.8)-ban a második összeadandóra kapjuk, hogy

$$\left|-\frac{n}{2}\sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{i}{N}\right)^2\left(1-\vartheta_i\frac{i}{N}\right)^{-2}\right| \le \frac{n}{2N^2}\left(1-\frac{m}{N}\right)^{-2}\sum_{i=0}^{m-1} i^2 =$$

$$= \frac{n}{2N^2}\left(1-\frac{m}{N}\right)^{-2}\frac{(m-1)m(2m-1)}{6} = \frac{n}{N}\binom{m}{2}\frac{2m-1}{6N}\left(1-\frac{m}{N}\right)^{-2} \to 0,$$

ezért fennáll, hogy $p_1 \to e^{-\alpha}$, ha $\frac{n}{N}\binom{m}{2} \to \alpha$.

A $\nu \ge q$ esetén a Leibniz formulát felhasználva kapjuk, hogy

$$\left.\frac{d^\nu[z^q(f_q(z))^{N-1}]}{dz^\nu}\right|_{z=0} = \sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\left.\frac{d^k[z^q]}{dz^k}\right|_{z=0}\left.\frac{d^{\nu-k}[(f_q(z))^{N-1}]}{dz^{\nu-k}}\right|_{z=0} =$$

$$= \binom{\nu}{q}q!\left.\frac{d^{\nu-q}[(f_q(z))^{N-1}]}{dz^{\nu-q}}\right|_{z=0}.$$

Ezért

$$A_q = \sum_{l=q}^{m-1}\frac{1}{N^{l-1}}\binom{l}{q}q!\left.\frac{d^{l-q}[(f_q(z))^{N-1}]}{dz^{l-q}}\right|_{z=0}. \tag{8.9}$$

Látható, hogy $\frac{d^l(f_k(z))}{dz^l} = f_{k-l}(z)$, ahol $h < 0$ esetén az $f_h(z) = 0$ definícióval élünk.

Ekkor kapjuk, hogy $(f_q(z))^t|_{z=0} = 1 = t^0, q \ge 0$ esetén.

Belátjuk, hogy $t \ge k \ge 1$ és $q \ge 1$ esetén fennáll a

$$t_{(k)} \le \left.\frac{d^k[(f_q(z))^t]}{dz^k}\right|_{z=0} \le t^k, \tag{8.10}$$

összefüggés, ahol $t_{(k)} = t(t-1)\dots(t-k+1)$.

A (8.10) egyenlőtlenséget indukcióval bizonyítjuk.

A $k = 1$ esetén kapjuk, hogy

$$\left.\frac{d[(f_q(z))^t]}{dz}\right|_{z=0} = t\,(f_q(z))^{t-1}\big|_{z=0}\,f_q'(z)\big|_{z=0} = t\,(f_q(z))^{t-1}\big|_{z=0}\,f_{q-1}(z)\big|_{z=0} = t.$$

A Leibniz formulát felhasználva adódik, hogy

$$\left.\frac{d^{k+1}[(f_q(z))^t]}{dz^{k+1}}\right|_{z=0} = \left.\frac{d^k[t(f_q(z))^{t-1}f_{q-1}(z)]}{dz^k}\right|_{z=0} =$$

$$= t\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\left.\frac{d^l[(f_q(z))^{t-1}]}{dz^l}\right|_{z=0} f_{q-1-(k-l)}(z)|_{z=0} =$$

$$= t\sum_{l=k+1-q}^{k}\binom{k}{l}\left.\frac{d^l[(f_q(z))^{t-1}]}{dz^l}\right|_{z=0} = F.$$

Felhasználva az indukciós hipotézist adódik, hogy

$$F \geq t\sum_{l=k+1-q}^{k}\binom{k}{l}(t-1)_{(l)} \geq t(t-1)_{(k)} = (t)_{(k+1)}$$

és

$$F \leq t\sum_{l=k+1-q}^{k}\binom{k}{l}(t-1)^{l} \leq tt^k = t^{k+1}.$$

A (8.10) fennállása miatt kapjuk a

$$\frac{A_q}{q!N} \geq \sum_{k=q}^{m-1}\frac{1}{N^k}\binom{k}{q}(N-1)_{(k-q)} =$$

$$= \frac{1}{N^q}\sum_{k=q}^{m-1}\binom{k}{q}\frac{(N-1)(N-2)\cdots(N-(k-q))}{N^{k-q}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{N^q}\sum_{k=q}^{m-1}\binom{k}{q}(1-\varepsilon) = \frac{1}{N^q}\binom{m}{q+1}(1-\varepsilon) \tag{8.11}$$

összefüggéseket, ahol $\varepsilon > 0$ és $\varepsilon \to 0$, ha $m, N \to \infty$ úgy, hogy fennáll a (8.3) reláció.

A (8.11)-ben csak azt kell bizonyítani, hogy fennáll a következő összefüggés: $\frac{(N-1)(N-2)\cdots(N-(k-q))}{N^{k-q}} \geq 1-\varepsilon$. Válasszuk k-nak a következő $k = q, q+1, \ldots, m-1$ értékeket. Ekkor

$$0 \geq \ln\left(\frac{(N-1)(N-2)\cdots(N-(k-q))}{N^{k-q}}\right) \geq$$

$$\geq \sum_{l=1}^{m-1-q}\ln\frac{N-l}{N} \geq \int_1^{m-1-q}\ln\frac{N-x}{N}dx$$

$$= \left[(a-N)\ln\left(1-\frac{a}{N}\right)-a\right]-\left[(1-N)\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)-1\right],$$

ahol $a = m-1-q$. A fentiekben a második összeadandó triviális módon tart a nullához, míg az első összeadandó a (8.3) feltételből és az $\ln(1-a/N)$ kifejezés Taylor-sorba fejtéséből adódóan szintén a nullához tart.

Ezekből adódik, hogy a (8.11) összefüggés fennáll.

A (8.10) ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\frac{A_q}{q!N} \le \sum_{k=q}^{m-1} \frac{1}{N^k}\binom{k}{q}(N-1)^{k-q} = \frac{1}{N^q}\sum_{k=q}^{m-1}\binom{k}{q}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-q} \le \tag{8.12}$$

$$\le \frac{1}{N^q}\sum_{k=q}^{m-1}\binom{k}{q} = \frac{1}{N^q}\binom{m}{q+1}. \tag{8.13}$$

Ezért az $\frac{A_q}{q!N}$-nak alsó- és felső korlátja $\frac{1}{N^q}\binom{m}{q+1}$, illetve $\frac{1}{N^q}\binom{m}{q+1}(1-\varepsilon)$ alakú, ahol $\varepsilon > 0$ és $\varepsilon \to 0$, ha $m, N \to \infty$ úgy, hogy a (8.3) feltétel fennáll.

A (8.6)-ből adódik, hogy

$$\left(1-\frac{1}{N^q}\binom{m}{q+1}\right)^n \le p_q = \left(1-\frac{A_q}{q!N}\right)^n \le \left(1-\frac{1}{N^q}\binom{m}{q+1}(1-\varepsilon)\right)^n, \tag{8.14}$$

ahol $\varepsilon > 0$ és $\varepsilon \to 0$, ha $m, N \to \infty$ úgy, hogy a (8.3) feltétel fennáll.

Következésképpen (8.2)-ból adódik, hogy

$$p_q \to e^{-\alpha}.$$

A fentiekben csak a (8.3)-as feltételt használtuk fel (és nem használtuk fel a (8.2) feltételt), amivel megkaptuk a (8.14)-et. Következésképpen beláttuk a 8.1. megjegyzést.

Most megvizsgáljuk a p_{q+1} és a p_{q-1} valószínűségeket. A (8.5) segítségével kapjuk, hogy

$$p_{q+1} \approx \left(1-\frac{\frac{n}{N^{q+1}}\binom{m}{q+2}}{n}\right)^n \to e^0 = 1,$$

mivel $\frac{n}{N^{q+1}}\binom{m}{q+2} \to 0$ (8.2)-ból és (8.3)-ból adódóan. (Itt az $a_s \approx b_s$ jelentése a következő: $a_s - b_s \to 0$, ha $s \to \infty$).

Ezenkívül fennáll, hogy

$$p_{q-1} \approx \left(1 - \frac{\frac{n}{N^{q-1}}\binom{m}{q}}{n}\right)^n \to e^{-\infty} = 0,$$

mivel $\frac{n}{N^{q-1}}\binom{m}{q} \to \infty$ és $\frac{n}{N^{q-1}}\binom{m}{q}/n \to 0$ (8.2) és (8.3) következményeként. Így a bizonyítás teljes.

□

9. fejezet

Összefüggések a majdnem biztos határeloszlás-tételek között

Ebben a fejezetben bemutatjuk, hogy milyen összefüggés áll fenn néhány különböző majdnem biztos határeloszlás-tétel között, természetesen a teljesség igénye nélkül, azonban törekedve arra, hogy a fontosabb eredmények közötti összefüggések mindenképpen terítékre kerüljenek.

Az összehasonlításoknál a kiindulópontot a Brosamler-Schatte eredmény jelenti (ezen fejezetben a 9.1. tétel, illetve [64], [13]), amelyet összevetünk a Berkes-Csáki tétellel (ezen fejezet 9.2. tétele, illetve [7]), továbbá vizsgáljuk a Fazekas-Rychlik tételt (a fejezet 9.3. tétele, illetve [32]). A jobb áttekinthetőség kedvéért valamennyi előbb említett tételt felsoroljuk.

Tekintsük először a Schattetől és Brosamlertől származó eredményt, amely a következő.

9.1. tétel. *(Brosamler [13], Schatte, [64]) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $\mathbb{E}\xi_1 = 0$ várható értékkel, $\mathbb{D}^2\xi_1 = 1$ szórásnégyzettel, legyen $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ és tegyük fel, hogy fennáll az $\mathbb{E}|\xi_1|^{2+\delta} < \infty$ összefüggés valamely $\delta > 0$ esetén.*

Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \mathbb{I}_{]-\infty,x[}\left(\frac{S_k}{\sqrt{k}}\right) = \Phi(x)\right) = 1 \tag{9.1}$$

bármely x esetén, ahol $\mathbb{I}_{]-\infty,x[}$ jelöli a $]-\infty, x[$ halmaz indikátorfüggvényét.

□

A Berkes-Csáki-féle majdnem biztos határeloszlás-tételt az alábbiakban fogalmazzuk meg.[22]

9.2. tétel. *(Berkes, Csáki, [7]) Legyenek* $\xi_1, \xi_2, \dots$ *független valószínűségi változók,* $f_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \dots)$ *mérhető függvények és feltesszük, hogy minden* $1 \leq k < l$ *esetén létezik egy* $f_{k,l} : \mathbb{R}^{l-k} \to \mathbb{R}$ *mérhető függvény úgy, hogy*

$$\mathbb{E}(|f_l(\xi_1, \dots, \xi_l) - f_{k,l}(\xi_{k+1}, \dots, \xi_l)| \wedge 1) \leq C(\log_+ \log_+(c_l/c_k))^{-(1+\varepsilon)}$$

valamely $C > 0$ *és* $\varepsilon > 0$ *estén, továbbá* $(c_n)_{n\geq 1}$ *olyan pozitív, nemcsökkenő sorozat, amelyre fennáll, hogy* $c_n \to \infty$ *és* $c_{n+1}/c_n = O(1)$ *és*

$$d_k = \log(c_{k+1}/c_k), \quad D_n = \sum_{k\leq n} d_k,$$

Ekkor bármely G *eloszlásfüggvény esetén a*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{D_N} \sum_{k\leq N} d_k \mathbb{I}(f_k(\xi_1, \dots, \xi_k) < x) = G(x) \quad \textit{majdnem biztosan}$$

bármely $x \in C_G$ *esetén*
és a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{D_N} \sum_{k\leq N} d_k \mathbb{P}(f_k(\xi_1, \dots, \xi_k) < x) = G(x)$$

bármely $x \in C_G$ *esetén*
állítások ekvivalensek, ahol C_G *jelöli a* G *folytonossági pontjainak a halmazát. Az eredmény akkor is érvényben marad, ha a* $(d_k)_{n\geq 1}$ *sorozatot tetszőlegesen olyan* $(d_k^*)_{n\geq 1}$ *sorozattal helyettesítjük, amelyre fennáll, hogy* $0 \leq d_k^* \leq d_k$ *és* $\sum d_k^* = \infty$*.*

□

[22] A Berkes és Csáki által publikált cikkben [7] több majdnem biztos határeloszlás-tétel szerepel, mi azonban csak az itt ismertetésre kerülőt vizsgáljuk terjedelmi okok miatt

A Berkes-Csáki eredmény általánosítása a Fazekas-Rychlik majdnem biztos határeloszlás-tétel, amely a következő.

9.3. tétel. *(Fazekas, Rychlik, [32], Theorem 1.1) Jelöljük δ_x-szel az x pontra koncentrált eloszlást, legyen továbbá μ_ξ az ξ valószínűségi változó eloszlása. Legyen (M, ρ) egy teljes, szeparábilis metrikus tér és ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ egy M-beli valószínűségi változó sorozat. Tegyük fel, hogy léteznek olyan $C > 0$, $\varepsilon > 0$ valós számok és egy $(c_n)_{n\geq 1}$ pozitív tagú, monoton növekvő sorozat úgy, hogy $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ és $c_{n+1}/c_n = O(1)$.*

Tegyük fel továbbá, hogy léteznek olyan $\xi_{k,l}$, $k, l \in \mathbb{N}$, $k < l$, M-értékű valószínűségi változók úgy, hogy a ξ_k és a $\xi_{k,l}$ valószínűségi változók függetlenek, ha $k < l$, és fennáll az alábbi

$$\mathbb{E}(\rho(\xi_{k,l}, \xi_l)) \leq C(\log_+ \log_+(c_l/c_k))^{-(1+\varepsilon)} \tag{9.2}$$

összefüggés $k < l$ esetén, ahol $\beta > 0$.

Legyen továbbá a $(d_k)_{k\geq 1}$ olyan sorozat, hogy $0 \leq d_k \leq \log(c_{k+1}/c_k)$ és tegyük fel, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} d_k = \infty$. Legyen $D_n = \sum_{k=1}^{n} d_k$.

Ekkor bármely, az M Borel-szigma algebráján értelmezett μ eloszlás esetén a következő két állítás

$$\frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^{n} d_k \delta_{\xi_k(\omega)} \Rightarrow \mu, \quad \text{ha } n \to \infty \tag{9.3}$$

majdnem biztosan, illetve

$$\frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^{n} d_k \mu_{\xi_k} \Rightarrow \mu, \quad \text{ha } n \to \infty \tag{9.4}$$

ekvivalens.

□

9.1. megjegyzés. *A (9.2) feltétel helyettesíthető a*

$$\mathbb{E}\rho(\xi_{k,l}, \xi_l) \leq C \left(\frac{c_k}{c_l}\right)^{\beta} \tag{9.5}$$

feltétellel.

9.1. Kapcsolatok a majdnem biztos határeloszlás-tételek között

A fentebb összegyűjtött majdnem biztos határeloszlás-tételek között az alábbiakban megvizsgáljuk a köztük fennálló kapcsolatokat. Megmutatjuk, hogy a Schatte-Brosamler eredmény hogyan következik a későbbi tételekből, így tulajdonképpen a Schatte-Brosamler tételnek egy új bizonyítását adjuk.

A Fazekas-Rychlik tételből (9.3. tétel) adódik a 9.2. tétel (Berkes-Csáki-tétel), ugyanis, ha a 9.3. tételben az $M = \mathbb{R}$ választással élünk és $\eta_1, \eta_2, \ldots$ független $\mathbb{R}$-beli valószínűségi változók, továbbá a 9.3. tételben a ξ_l-et és a $\xi_{k,l}$-et a $\xi_l = f_l(\eta_1, \ldots, \eta_l)$ és $\xi_{k,l} = f_{k,l}(\eta_{k+1}, \ldots, \eta_l)$ $k < l$ módon választjuk, akkor megkapjuk a 9.2. tételt azaz a Berkes-Csáki tételt.

Ezután belátjuk, hogy a 9.3. tételből következik a 9.1. tétel.

A következő Stolz-tól származó eredményre szükségünk lesz a továbbiakhoz.

9.1. lemma. *(Stolz, [48]) Legyen $(a_n)_{n\geq 1}$ és $(b_n)_{n\geq 1}$ két valós sorozat és tegyük fel, hogy a $(b_n)_{n\geq 1}$ szigorúan monoton növekvő vagy szigorúan monoton csökkenő divergens sorozat, továbbá tegyük fel, hogy létezik az alábbi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = A$$

határérték.

Ekkor a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

határérték is létezik és a fenti határértékkel, azaz A-val egyezik meg.

□

Ezután megfogalmazhatjuk a következő állítást, amely kimondja, hogy a 9.3. tételből következik a 9.1. tétel, azonban a kiindulási Brosamler-Schatte tételnél több is állítható, hiszen nem kell feltenni a $\mathbb{E}|\xi_1|^{2+\delta} < \infty$ összefüggést (valamely $\delta > 0$ estén), az elhagyható.

9.4. tétel. *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók $\mathbb{E}\xi_1 = 0$ várható értékkel és $\mathbb{D}^2\xi_1 = 1$ szórásnégyzettel. Legyen továbbá $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$.*

Ekkor fennáll az alábbi

$$\mathbb{P}\left(\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \mathbb{I}_{]-\infty,x[}\left(\frac{S_k}{\sqrt{k}}\right) = \Phi(x)\right) = 1 \tag{9.6}$$

majdnem biztos konvergencia bármely x esetén, ahol $\mathbb{I}_{]-\infty,x[}$ jelöli a $]-\infty, x[$ halmaz indikátorfüggvényét.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy ha a fenti tétel feltételei fennállnak, akkor felhasználva a 9.3. tételt, azaz a Fazekas-Rychlik tételt a fenti tételben szereplő (9.6) konvergencia is igaz.

Jelölje S_n, $(n \in \mathbb{N})$ a $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószínűségi változók részletösszegeit.

Legyen $\zeta_k = \frac{S_k}{\sqrt{k}}$ és $\zeta_{k,l} = \frac{\xi_{k+1}+\cdots+\xi_l}{\sqrt{l}}$. Ekkor a ζ_k és a $\zeta_{k,l}$ valószínűségi változók függetlenek, azaz teljesül a Fazekas-Rychlik tételben szereplő függetlenségi feltétel.

Ezután megmutatjuk, hogy a 9.3. tétel után szereplő 9.1. megjegyzés (9.5) feltétele is fennáll a $\beta = 1/2$ konstanssal, amelyet az alábbi számolás mutat:

$$\mathbb{E}\rho(\zeta_{k,l}, \zeta_l) = \mathbb{E}\rho\left(\frac{\xi_1+\cdots+\xi_l}{\sqrt{l}}, \frac{\xi_{k+1}+\cdots+\xi_l}{\sqrt{l}}\right) = \mathbb{E}\left|\frac{\xi_1+\cdots+\xi_l}{\sqrt{l}}\right| \leq$$

$$\leq \sqrt{\mathbb{E}\left(\frac{\xi_1+\cdots+\xi_l}{\sqrt{l}}\right)^2} \leq \sqrt{\frac{1}{l} k \mathbb{E}\xi_1^2} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{l}},$$

azaz a $c_n = n$ választás megfelelő a Fazekas-Rychlik tételbeli c_n sorozatra.

Legyen $F_n(x) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} < x\right)$. Ekkor a centrális határeloszlás-tételből adódik, hogy $F_n(x) \to \Phi(x)$, ahol Φ-vel jelöltük a sztenderd normális eloszlás eloszlásfüggvényét

A $\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} F_k(x) \to \Phi(x)$, $(n \to \infty)$ kifejezés konvergenciája következik a Stolz-lemmából, ha az alábbi

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} F_k(x), \qquad b_n = \log n$$

választással élünk.

Ekkor

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} F_{n+1}(x)$$

és

$$b_{n+1} - b_n = \log(n+1) - \log n.$$

Így

$$\frac{\frac{1}{n+1} F_{n+1}(x)}{\log \frac{n+1}{n}} = \frac{F_{n+1}(x)}{\log \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} \to \Phi(x),$$

ha $n \to \infty$, ezért

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} F_k(x) = \Phi(x),$$

ha $n \to \infty$.

Ezért kapjuk, hogy

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \mathbb{I}_{]-\infty, x[} \left(\frac{S_k}{\sqrt{k}} \right) = \Phi(x)$$

majdnem biztosan, amivel a bizonyítás teljes.

$\square$

10. fejezet

Summary

This Ph.D. dissertation contains new results in the field of limit theorems (mainly almost sure limit theorems) of probability theory.

In the first part of the dissertation we review the previous results and present the structure of this dissertation. We mention the first results obtained by Brosamler and independently by Schatte (see Brosamler [13] and Schatte [64]). They proved the following statement: suppose that $\mathbb{E}|\xi_1|^{2+\delta} < \infty$ ($\delta > 0$), where $\xi_1, \xi_2, \dots$ are independent, identically distributed random variables and $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$.

Then

$$\frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \mathbb{I}_{]-\infty,x[} \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \to \Phi(x),$$

almost surely. Here $\mathbb{I}_{]-\infty,x[}$ denotes the indicator function of the set $]-\infty, x[$ and Φ denotes the standard normal distribution function.

In the second chapter we show some new almost sure limit theorems in $L^p(]0,1[)$, where $1 \le p < \infty$ (Túri, [74]).

First we study the

$$Y_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k \le [tn]} \xi_k \tag{10.1}$$

process, where $\xi_1, \xi_2, \dots$ are independent, identically distributed real random variables, $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$, $k \ge 1$, $S_0 = 0$, $\mathbb{E}\xi_1 = 0$ and $\mathbb{D}^2\xi_1 = \sigma^2$. Here $[.]$ denotes the integer part.

We can state an almost sure theorem below:

In the space $L^p(]0,1[)$ the convergence

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\delta_{Y_{k(.,\omega)}} \Rightarrow \mu_W,$$

is valid for almost every $\omega \in \Omega$, where δ_x is the point mass at x and W is the standard Wiener process and $Y_k(t,\omega) = Y_k(t)$ is defined in (10.1).

In this chapter we study the empirical-process

$$Z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{I}_{[0,t]}(U_i) - t), \tag{10.2}$$

where the U_i $(i = 1, 2, \dots)$ are independent random variables with uniform distribution on the interval $[0,1]$.

The almost sure limit theorem for the empirical process is below.

In the space $L^p(]0,1[)$ convergence

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\delta_{Z_{k(.,\omega)}} \Rightarrow \mu_B,$$

is valid for almost every $\omega \in \Omega$, where B is the Brownian bridge and $Z_k(t,\omega) = Z_k(t)$ is defined in (10.2).

In Chapter 3 we investigate the multi-indexed process for fields.

Let $X_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$ be a multiindex sequence of independent, identically distributed random variables having zero mean and unit variance.

Let

$$Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}}\sum_{\mathbf{k}\leq[\mathbf{nt}]} X_{\mathbf{k}}, \tag{10.3}$$

where $\mathbf{t} \in [0,1]^d$ and $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$.

Here is the almost sure Donsker theorem for fields: Let $1 \leq p < \infty$. Let $Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}, \omega) = Y_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})$.

Then

$$\frac{1}{|\log \mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{k}|} \delta_{Y_{\mathbf{k}}}(., \omega) \Rightarrow \mu_W$$

in $L^p([0,1]^d)$, as $\mathbf{n} \to \infty$ for almost every $\omega \in \Omega$, where W is the standard d-parameter Wiener process.

Consider the multidimensional empirical process

$$Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{i} \leq \mathbf{n}} (\mathbb{I}\{U_{\mathbf{i}} \leq \mathbf{t}\} - |\mathbf{t}|), \tag{10.4}$$

where $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ and $U_{\mathbf{i}}$, $\mathbf{i} \in \mathbb{N}$ are independent random vectors having uniform distribution on $[0,1]^d$.

We present the almost sure limit theorem for empirical process for fields, too: Let $1 \leq p < \infty$. Let $Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}, \omega) = Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})$.

Then

$$\frac{1}{|\log \mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{k}|} \delta_{Z_{\mathbf{k}}}(., \omega) \Rightarrow \mu_B$$

in $L^p([0,1]^d)$, as $\mathbf{n} \to \infty$ for almost every $\omega \in \Omega$, where B is the d-parameter Brownian process.

In Chapter 4 we investigate some integral versions of almost sure limit theorems.

In the first case the limit distribution will be the Poisson distribution, while the Gaussian distribution in the second case.

First we investigate the

$$\xi'(t) = \sum_{i=1}^{[t]} \mathbb{I}_{[0, \frac{1}{t}]}(\xi_i), \tag{10.5}$$

process, where ξ_i, $i \in \mathbb{R}$ are independent random variables uniformly distributed on $[0,1]$. In this case we prove an almost sure limit theorem, where the limit distribution is Poisson:

Let $f(t), t \leq 1$ be a positive function such that

$$\frac{f(t)}{t^{\beta}}$$

is increasing for some $\beta > 0$. Let $\xi(t) = \xi'(f(t)), 1 \leq t$.

Then

$$\frac{1}{\log(T)} \int_1^T \delta_{\xi(t,\omega)} \frac{dt}{t} \to \mu_\pi$$

for almost all $\omega \in \Omega$, where μ_π denotes the distribution of π.

In the second case we mention the process

$$\xi(t) = \frac{V(f(t))}{(f(t))^{1/2}},$$

where $V(t), t > 0$ is a centered homogeneous, infinitely divisible, random process with independent increments and with finite variance, furthermore its characteristic function is

$$\varphi_{V(t)}(x) = \mathbb{E}\left(e^{ixV(t)}\right)$$
$$= \exp\left(t \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ixy} - 1 - ixy) \frac{1}{y^2} dK(y)\right),$$

$x \in \mathbb{R}$, where $K(y)$ is an increasing bounded function such that $K(-\infty) = 0$.

Then

$$\frac{1}{\log(T)} \int_1^T \delta_{\frac{V(f(t),\omega)}{\sqrt{f(t)}}} \frac{dt}{t} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, K(\infty)) \quad \text{if } T \to \infty$$

almost surely.

Let $\pi(t), 0 \leq t$ be the standard Poisson process (i.e. $\mathbb{E}\pi(t) = t$). Then

$$\frac{1}{\log(T)} \int_1^T \delta_{\frac{\pi(f(t),\omega) - f(t)}{\sqrt{f(t)}}} \frac{dt}{t} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, 1), \quad \text{ha } T \to \infty$$

for almost all $\omega \in \Omega$.

Let $W(t)$ be the standard Wiener process. We have

$$\frac{1}{\log(T)} \int_1^T \delta_{\frac{W(f(t),\omega)}{\sqrt{f(t)}}} \frac{dt}{t} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, 1), \quad \text{ha } T \to \infty$$

for almost all $\omega \in \Omega$.

Let $U(t)$ be the Ornstein-Uhlenbeck process. Then $U(t)$ has the representation $U(t) = Ce^{-mt/2}W(e^{mt})$, $t > 0$, where $C, m > 0$ and $W(t)$ is the standard Wiener process. Let $f(t) = e^{mt}$. Since $\frac{f(t)}{t} = \frac{e^{mt}}{t}$, $1 \leq t$, is an increasing function by (b), we have

$$\frac{1}{\log(T)} \int_1^T \delta_{U(t,\omega)} \frac{dt}{t} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, C^2), \quad \text{ha } T \to \infty$$

for almost all $\omega \in \Omega$.

In Chapter 5 we deal with the sum of independent identically distributions random variables we shall prove an inequality for their moments.

Let B be a real separable Banach space with norm $\|.\|$. We suppose that B is equipped with its Borel σ-fields $\mathcal{B}$.

Our main result is the following:

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots$ be independent identically distributed B-valued random variables, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, n = 1, 2, \ldots$. Let $a_1, a_2, \ldots$ be an increasing sequence of positive real numbers. Let $\alpha \in]0, 2]$ be fixed. Assume that

$$\frac{a_{nm}}{a_n} \leq C m^{1/\alpha + \tau_n} \quad n, m = 1, 2, \ldots, \tag{10.6}$$

where τ_n is a sequence of nonnegative numbers with $\lim_{n\to\infty} \tau_n = 0$. Assume that for any $\beta \in]0, \alpha[$

$$\mathbb{E}\|\xi_n\|^\beta < \infty. \tag{10.7}$$

Let $(a_{l_n})_{n\geq 1}$ be a subsequence of $(a_n)_{n\geq 1}$ so that for some $c < \infty$, $a_{l_n} \leq c a_{l_{n-1}}, n = 1, 2, \ldots$. Let $b_1, b_2, \ldots$ be a B-valued sequence. Assume that

$$\left(\frac{S_{l_n}}{a_{l_n}} - b_{l_n} \right)_{n\geq 1} \tag{10.8}$$

is stochastically bounded. Then, for any $\beta \in]0, \alpha[$

$$\sup_n \mathbb{E} \left\| \frac{S_{l_n}}{a_{l_n}} - b_{l_n} \right\|^\beta < \infty. \tag{10.9}$$

In this Chapter we prove an almost sure limit theorem, too. Here the limit distribution is a p-stable distribution.

In Chapter 6 we study a coin tossing experiment. Let the underlying random variables be $\xi_1, \xi_2, \ldots$. We assume that $\xi_1, \xi_2, \ldots$ are independent and identically distributed with $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = p, \mathbb{P}(\xi_i = 0) = q = 1 - p$. I.e. we write 1 for a head and 0 for a tail. In Chapter 6 we study pure runs, i.e. runs containing only head or containing only tails. We prove limit theorems for the longest run. Our theorems 6.6-6.9 versions of theorems 1-4 in Földes [35]. These are limit theorems for a fair coin. We consider the case of a biased coin in theorems 6.10 and 6.11. In this Chapter we obtain an almost sure limit theorem for longest run (Theorem 6.12.).

In Chapter 7 we deal with random allocations.

Let $\xi, \xi_j, j \in \mathbb{N}$ be independent random variables uniformly distributed on $[0,1]$. Let $N \in \mathbb{N}$. Consider the subdivision of the interval $[0,1[$ into the subintervals $\triangle_i = \triangle_{N_i} = \left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right[, 1 \le i \le N$.

We consider the intervals $\triangle_i, i = 1, \ldots, N$, as a row of boxes. Random variables $\xi_j, j = 1, 2, \ldots$, are realizations of ξ. Each realization of ξ is treated as a random allocation of a ball into one of the N boxes. The event $\xi_j \in \triangle_i$ means that the jth ball falls into the ith box. Let $n \in \mathbb{N}, A_{(0)} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

$$\mu_r(n, N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{|A|=r, A \subseteq A_{(0)}} \prod_{j \in A} \mathbb{I}_{\{\xi_j \in \triangle_i\}} \prod_{j \in A_{(0)} \setminus A} \mathbb{I}_{\{\xi_i \notin \triangle_i\}} \tag{10.10}$$

is the number of boxes containing r balls and $N C_n^r \frac{1}{N^r} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-r}$ is its expectation. Here $C_n^r = \binom{n}{r}$ is the binomial coefficient and $\mathbb{I}_B$ is the indicator of the event B.

For $n, N \in \mathbb{N}$ we will use the notation $\alpha = \frac{n}{N}$ and $p_r(\alpha) = (\alpha^r / r!) e^{-\alpha}$.

We shall use the notations

$$\mathbb{D}_{n,N}^{(r)} = \sqrt{\mathbb{D}^2 \mu_r(n, N)} = \sqrt{\operatorname{cov}(\mu_r(n, N), \mu_r(n, N))}$$

and

$$S_{n,N}^{(r)} = \frac{\mu_r(n, N) - \mathbb{E}\mu_r(n, N)}{\mathbb{D}_{n,N}^{(r)}}$$

is the standardized variable, where $(n, N) \in \mathbb{N}^2$.

We use the notation $A_{(k)} = \{k+1, \ldots, n\}, k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Let

$$\zeta_n = \zeta_{n,N} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{|A|=r, A\subseteq A_{(0)}} \prod_{j\in A} \mathbb{I}_{\{\xi_j\in\triangle_i\}} \prod_{j\in A_{(0)}\setminus A} \mathbb{I}_{\{\xi_i\notin\triangle_i\}} -$$

$$-NC_n^r \frac{1}{N^r}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-r}.$$

We see that $\zeta_n = \mu_r(n,N) - \mathbb{E}\mu_r(n,N)$. We have

$$\zeta_n = \sum_{i=1}^{N} \sum_{|A|=r, A\subseteq A_{(0)}} (\eta_{iA} - \mathbb{E}\eta_{iA}),$$

where

$$\eta_{iA} = \prod_{j\in A} \mathbb{I}_{\{\xi_j\in\triangle_i\}} \prod_{A_{(0)}\setminus A} \mathbb{I}_{\{\xi_j\notin\triangle_i\}}$$

is the indicator of the event that the ith box contains the balls with indices in the set A (and it does not contain any other ball). Let $\mathcal{F}_k^n$ be the σ algebra generated by $\xi_{k+1},\ldots,\xi_n$.

We will use the following conditional expectaiton $\eta_{iA}^{(k)} = \mathbb{E}(\eta_{iA}|\mathcal{F}_{nk})$ and

$$\zeta_n^k = \zeta_{nN}^k = \mathbb{E}(\zeta_n|\mathcal{F}_{kn}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{|A|=r, A\subseteq A_{(0)}} (\eta_{iA}^{(k)} - \mathbb{E}\eta_{iA}^{(k)}) = \tag{10.11}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{|A|=r, A\subseteq A_{(0)}} \frac{1}{N^{r-|A\cap A_{(k)}|}}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{k-(r-|A\cap A_{(k)}|)}$$

$$\prod_{j\in A\cap A_{(k)}} \mathbb{I}_{\{\xi_j\in\triangle_i\}} \prod_{j\in A_{(k)}\setminus A} \mathbb{I}_{\{\xi_j\notin\triangle_i\}} - \frac{1}{N^r}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-r}.$$

The following inequality will play an important role in the proofs of our theorems:

Let $0<k<n, 0<r\le n$ and N fixed. Then we have

$$\mathbb{E}(\zeta_n - \zeta_n^k)^2 \le ck\alpha^{r-1}\left[\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n+k}\alpha^r + \left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-r}\right](\alpha+1), \tag{10.12}$$

where $c < \infty$ does not depend on n, N and k but may depend on r.

First consider the almost sure limit theorem below. Here the limit distribution will be a mixture of the accompanying laws:

Let $r \geq 2, 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \infty$ be fixed. Let T_n be the following domain in $\mathbb{N}^2$

$$T_n = \left\{ (k, K) \in \mathbb{N}^2 : k \leq n, \lambda_1 \leq \frac{k}{K^{1-\frac{1}{r}}} \leq \lambda_2 \right\}.$$

Let

$$Q_n(\omega) = \frac{1}{\frac{r}{r-1}(\lambda_2 - \lambda_1) \log n} \sum_{(k,K) \in T_n} \frac{1}{K^{2-\frac{1}{r}}} \delta_{\mu_r(n,N)(\omega)}.$$

Then, as $n \to \infty$,

$$Q_n(\omega) \Rightarrow \mu_\tau$$

for almost all $\omega \in \Omega$, where τ is a random variable with distribution

$$\mathbb{P}(\tau = l) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{l!} \left(\frac{x^r}{r!} \right)^l e^{-\frac{x^r}{r!}} dx,$$

where $l = 0, 1, \ldots$.

Furthermore, we can state:

Let $r \geq 2$ be fixed, $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq \infty$ and

$$T_n = \left\{ (k, K) \in \mathbb{N}^2 : k \leq n, \alpha_1 k \leq K \leq \alpha_2 k^{(2r+1)/(2r)} \right\}.$$

Let

$$Q_n^{(r)+}(\omega) = \frac{1}{\log n} \sum_{(k,K) \in T_n} \frac{1}{k(\log \alpha_2 - \log \alpha_1 + (1/2r) \log k) K} \delta_{S_{k,K}^{(r)}(\omega)}.$$

Then, as $n \to \infty$, we have

$$Q_n^{(r)+}(\omega) \Rightarrow \gamma$$

for almost every $\omega \in \Omega$ and here γ denotes the standard normal distribution.

Now we consider the almost sure limit theorems for random allocations in the central domain. If $n, N \to \infty$ so that

$$0 < \alpha_1 \leq \frac{n}{N} \leq \alpha_2 < \infty,$$

where α_1 and α_2 are some constants, then $n, N \to \infty$ in a central domain.

Let $r \geq 0$ be fixed, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$ and

$$Q_n^{(r)}(\omega) = \frac{1}{(\log \alpha_2 - \log \alpha_1) \log n} \sum_{k \leq n} \sum_{\{K : \alpha_1 \leq \frac{k}{K} \leq \alpha_2\}} \frac{1}{kK} \delta_{S_{k,K}^{(r)}(\omega)}.$$

Then, as $n \to \infty$, we have

$$Q_n^{(r)}(\omega) \Rightarrow \gamma$$

for almost every $\omega \in \Omega$.

In the above theorem the limit was considered for $n \to \infty$ (and the indices of the summands were in a fixed central domain). The following theorem is a two-index limit theorem, i.e. $n \to \infty$ and $N \to \infty$. The relation of n and N could be arbitrary, however, as the indices of summands are in a fixed central domain, we assume that (n, N) is considered in central domain.

Let $r \geq 0$ be fixed, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$ and

$$Q_{n,N}^{(r)}(\omega) = \frac{1}{(\log \alpha_2 - \log \alpha_1) \log n} \sum_{k \leq n} \sum_{\{K : K \leq N, \alpha_1 \leq \frac{k}{K} \leq \alpha_2\}} \frac{1}{kK} \delta S_{k,K}^{(r)}(\omega).$$

Then, as $n, N \to \infty$, so that $\alpha_1 \leq \frac{n}{N} \leq \alpha_2$, we have

$$Q_{n,N}^{(r)}(\omega) \Rightarrow \gamma$$

for almost every $\omega \in \Omega$.

In Chapter 8 we presentation some random allocation with fix period.

Let balls be placed successively and independently into N boxes. At each allocation the ball can fall into each box with probability $\frac{1}{N}$. During a fixed period (for a day, say) we allocate m balls. We execute an experiment series of n days. Let p_q denote the probability that we do not place more than q balls into any of the N boxes during any of the n days.

Let q be a fixed positive integer. Assume that $m, n, N \to \infty$ so that

$$\frac{n}{N^q} \binom{m}{q+1} \to \alpha \tag{10.13}$$

where α is a positive finite number and

$$\frac{m^2}{N} \to 0. \tag{10.14}$$

Then

$$\lim p_l = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad 0 \le l < q, \\ e^{-\alpha} & \text{ha} \quad l = q, \\ 1 & \text{ha} \quad l > q. \end{cases} \tag{10.15}$$

We can state the result below too.

$$\left(1 - \frac{1}{N^l}\binom{m}{l+1}\right)^n \le p_l \le \left(1 - \frac{1}{N^l}\binom{m}{l+1}(1-\varepsilon)\right)^n \tag{10.16}$$

for $l = 1, 2, \ldots, m-1$ where $\varepsilon \ge 0$ and $\varepsilon \to 0$ if $m \to \infty$ and $N \to \infty$ so that $m^2/N \to 0$.

In the last chapter we prove that the Fazekas-Rychlik result [32] imply the theorem Brosamler and Schatte [13], [64]. Moreover, we show relations between the old and the new results.

11. A szerző összes publikációja

1. Fazekas, István, Túri, József (2012). A Limit Theorem for Random Allocations *Journal of Mathematics Research*, Vol.LXV, No. 1, 69–85., MathScienet: MR2903571, Zentralblatt: Zbl1263.60004.

2. Fazekas, István, Chuprunov, Alexey and Túri, József. (2011). Inequalities and limit theorems for random allocations *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A*, Vol. LXV, No. 1, 69–85.,
MathScienet: MR2825152, Zentralblatt: Zbl1253.60026.

3. Túri, József (2009). Limit theorems for longest run *Ann. Math. Inform.* **36**, 133–141.,
MathScienet: MR2580909, Zentralblatt: Zbl1212.60023.

4. Száz, Árpád, Túri, József (2006). Comparisons and compositions of Galois-type connections *Miskolc Math. Notes* **17**(2), 189–203., MathScienet: MR2310277, Zentralblatt: Zbl1120.06002.

5. Túri, József (2006). On the moments of sums of independent identically distributed random variables *Math. Pannon.* **17**(2), 267–278., MathScienet: MR2272900, Zentralblatt: Zbl1121.60022.

6. Túri, József (2005). Some integral versions of almost sure limit theorems *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **48**, 119–125., MathScienet: MR2323624, Zentralblatt: Zbl1121.60023.

7. Túri, József (2002). Almost sure functional limit theorems in $L^p([0,1]^d)$ *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **45**, 159–169., MathScienet: MR1995987, Zentralblatt: Zbl1046.60032.

8. Száz, Árpád, Túri, József (2002). Characterizations of injective multipliers on partially ordered sets *Studia Univ. Babeş-Bolyai Math.* **47**(1), 105–119.,
   MathScienet: MR1989513, Zentralblatt: Zbl1027.06001.

9. Túri, József (2002). Almost sure functional limit theorems in $L^p(]0,1[)$ *Acta Acad. Paedagog. Agriensis Sect. Mat.* **29**, 77–87.,
   MathScienet: MR1956582, Zentralblatt: Zbl1012.60035.

10. Túri, József (2002). Almost sure functional limit theorems in $L^2(]0,1[)$ *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi.* **18**(1), 27–32.,
    MathScienet: MR1923100, Zentralblatt: Zbl1017.60035.

11. Száz, Árpád, Túri, József (2000).- Seminorm generating relations and their Minkowski functionals *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi.* **16**, 15–24.,
    MathScienet: MR1796258, Zentralblatt: Zbl0983.26013.

12. A szerzőnek a témával kapcsolatban megjelent publikációi

1. Fazekas, István, Túri, József (2012). A Limit Theorem for Random Allocations *Journal of Mathematics Research*, Vol. 4, No. 1, 17–20., MathScienet: MR2903571, Zentralblatt: Zbl1263.60004.

2. Fazekas, István, Chuprunov, Alexey and Túri, József (2011). Inequalities and limit theorems for random allocations *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A*, **4**(1), 17–20 , 69–85., MathScienet: MR2825152, Zentralblatt: Zbl1253.60026.

3. Túri, József (2009). Limit theorems for longest run *Ann. Math. Inform.* **36**(1), 133–141., MathScienet: MR2580909, Zentralblatt: Zbl1212.60023.

4. Túri, József (2006). On the moments of sums of independent identically distributed random variables *Math. Pannon.* **17**(2), 267–278., MathScienet: MR2272900, Zentralblatt: Zbl1121.60022.

5. Túri, József (2005). Some integral versions of almost sure limit theorems *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **48**, 119–125., MathScienet: MR2323624, Zentralblatt: Zbl1121.60023.

6. Túri, József (2002). Almost sure functional limit theorems in $L^p([0,1]^d)$ *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **45**, 159–169., MathScienet: MR1995987, Zentralblatt: Zbl1046.60032.

7. Túri, József (2002). Almost sure functional limit theorems in $L^p(]0,1[)$ *Acta Acad. Paedagog. Agriensis Sect. Mat.* **29**, 77–87., MathScienet: MR1956582, Zentralblatt: Zbl1012.60035.

8. Túri, József (2002). Almost sure functional limit theorems in $L^2(]0,1[)$ *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi.* **18**(1), 27–32., MathScienet: MR1796258, Zentralblatt: Zbl0983.26013.

13. A szerző munkáira történt eddigi hivatkozások

1. Túri, József (2009). Limit theorems for longest run *Ann. Math. Inform.* **36** (1), 133–141.

   Hivatkozás: Christoph Aistleitner, Katusi Fukuyama (2016) On the law of the iterated logarithm for trigonometric series with bounded gaps II, *Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux* **28**, no. 2, 391–416.

   Hivatkozás: Zhao, Min Zhi, Zhang, Hui-Zeng (2013) On the maximal length of arithmetic progressions, *Electronic Journal of Probability* **18**, no. 79, 1–21.

   Hivatkozás: Zhao, Min Zhi, Shao, Qi-Man (2011) On the Longest Lenght of Consecutive Integers, *Acta Math. Sinica* **27**, no. 2, 329–338.

2. Túri, József (2002). Almost sure functional limit theorems in $L^2([0,1])$ *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi.* **18**, 27–32.

   Hivatkozás: Rychlik, Zdzisław, Skublewski, Wojciech, Walczyański, Tomasz (2007) On the random functional central limit theorems in $L^2]0,1[$ with almost sure convergence, *Acta Sci. Math.* **73**, no. 3-4, 745–765.

3. Túri, József (2002). Almost sure functional limit theorems in $L^p([0,1])$ *Acta Acad. Paedagog. Agriensis Sect. Mat.* **29**, 77–87.

   Hivatkozás: Rychlik, Zdzisław, Skublewski, Wojciech, Walczyański, Tomasz (2007) On the random functional central limit theorems in $L^2]0,1[$ with almost sure convergence, *Acta Sci. Math.* **73**, no. 3-4, 745–765.

4. Száz, Árpád, Túri, József (2002). Characterizations of injective multipliers on partially ordered sets *Studia Univ. Babeş-Bolyai Math.* **47** (1), 105–119.

   Hivatkozás: Yon, Yong Ho, Kim, Kyung Ho (2010) On expansive linear maps v-multipliers of lattices *Quaest. Math.* **33**, 417–427.

14. Tudományos előadások

1. Túri József: *Majdnem biztos határeloszlás-tételek az* $L^2([0,1])$*-térben*, MTN, Nyíregyháza, 2002.

2. Túri József: *Majdnem biztos határeloszlás-tételek az* $L^p([0,1])$*-térben*, MTN, Nyíregyháza, 2003.

3. Túri József: *Majdnem biztos határeloszlás-tételek az* $L^p([0,1]^d)$*-térben*, MTN, Nyíregyháza, 2005.

4. Túri József: *Limit theorems for longest run*, MicroCad, XXII. International Scientific Conference, University of Miskolc, Miskolc, 2008.

5. Túri József: *On the moments of sums of independent identically distributed random variables*, MicroCad, XXIV. International Scientific Conference, University of Miskolc, Miskolc, 2010.

6. Túri József: *Limit theorems* (poszter), Gyíres Béla Emlékkonferencia, Debreceni Egyetem, Debrecen, 2009.

7. Túri József: *Inequalities and limit theorems for random allocations* (poszter), Conference on Stochastic Models and their Applications (Dedicated to the 80th birthday of Mátyás Arató, University of Debrecen, Debrecen, 2011.

8. Túri József: *Limit theorems for random allocations*, MicroCad, XXVI. International Scientific Conference, University of Miskolc, Miskolc, 2012.

15. Irodalomjegyzék

[1] Acosta, A. and Giné, E. (1979). Convergence of momemts and related functionals in the general central limit theorem in Banach space, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* **48**, 213–231.

[2] Araujo, A. and Giné, E. (1980). The Central Limit Theorem for Real and Banach Valued Random Variables, John Wiley and Sons, New York, Chichseter, Brisbane, Toronto

[3] Avkhadiev, F. G. & Chuprunov, A. N. (2007). The probability of a successful allocation of ball groups by boxes, *Lobachevskii J. Math. 25*, 3–7.

[4] Becker-Kern, P. (2007). An almost sure limit theorem for mixtures of domains in random allocation, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **44** (3), 331–354.

[5] Békéssy, A. (1963). On classical occupancy problems. I., *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 8* (1-2), 59–71.

[6] Berkes, I. (1998). Results and problems related to the pointwise central limit theorem, In: B. Szyszkowicz (Ed.) Asymptptic results in probability and statistics, Elsevier, Amsterdam, 59–96.

[7] Berkes, I. and Csáki, E. (2001). A universal result in almost sure central limit theory, *Stoch. Proc. Appl.*, **94** (1), 105–134.

[8] Berkes, I. and Csáki, E., Csörgő, S., Megyesi, Z. (2002). Almost sure limit theorems for sums and maxima from the domain of geometric partial attraction of semistable law, in: Limit Theorems in Probability and Statistics, Vol. I., *János Bolyai Math. Soc., Budapest*, 133–157.

[9] Berkes, I., Dehling, H.I. and Móri, T.F. (1991). Counterexemales related to the a.s. central limit theorem, *Studia Sci. Math. Hungar.* **26** (1), 153–164.

[10] Billingsley, P. (1968). Convergence of Probability Measures, John Wiley and Sons, New York-London-Sidney-Toronto

[11] Bingham, N.H., Goldie, C.M., Teugels, J.L. (1987). Regular Variation, Cambridge University Press, Cambridge

[12] Binswanger, K. and Embrechts, P. (1994). Longest runs in coin tossing, *Insurance Math. and Econom* **15**, 139–149.

[13] Brosamler, G.A. (1988). An almost everywhere central limit theorem, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **104**, 561–574.

[14] Csáki, E., Földes, A., Komlós, J. (1987). Limit theorems for Erdős-Rényi type promlems, *Studia Sci. Math. Hungar.* **22**, 321–332.

[15] Chow, Y. S. and Teicher, H. (1988). Probability Theory, Springer-Verlag, New-York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo

[16] Chuprunov, A., Fazekas, I. (2003). Almost sure limit theorems for the Pearson statistic (russian) *Teor. Veroyatnost. i Primenen*, **48**, no. 1, 162–169, translation in *Theory Probab. Appl.* , **48**, no. 1, 140–147.

[17] Chuprunov, A., Fazekas, I. (2005). Inequalities and strong laws of large numbers for random allocations. *Acta Math. Hungar. 109* (1-2), 163–182.

[18] Chuprunov, A., Fazekas, I. (2005). Intergral analogues of almost sure limit theorems *Periodica Math. Hungar.* **50**, 61–78.

[19] De Acosta, A. and Giné, E. (1979). Convergence of moments and related functionals in the general central limit theorem in Banach space, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **48**, 213–231.

[20] Deheuvels, P.(1985). On Erdős-Rényi theorem for random fields and sequence and its relationships with the theory of run spacings, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **70** (1), 91–115.

[21] Donsker, M.M. (1951). A functional central limit theorem for stationary random fields, *Mem. Amer. Math. Soc.* (6), 150–162.

[22] Deo, C.M. (1975). A functional central limit theorem for stationary random fields, *The Annals of Probability* **3** (4), 708–715.

[23] Dudley, R.M. (1989). Real Analisys and Probability, Wadsworth and Brooks/Cole, Pacific Grove, CA

[24] Erdős, P., Révész, P. (1975). On the lenght of the longest head-run, *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai (16. Topics in information theory, Keszthely (Hungary))*, 219–229.

[25] Erdős, P., Rényi, A. (1970). On a new law of large numbers, *J. Analyse Math*, **23**, 103–111.

[26] Fazekas, I. (1992). Convergence rates in the law of large numbers for arrays, *Publ. Math. Debrecen* **41** (1-2), 53–71.

[27] Fazekas, I. (2010). Határérték-tételek és egyenlőtlenségek a valószínűségszámításban és a statisztikában, *Akadémiai doktori értekezés*, Budapest, Magyar Tudományos Akadémia

[28] Fazekas I. and Chuprunov, A. (2005). Almost Sure Limit Theorems for Random Allocations *Studia Sci. Math. Hungar.*, **42** (2), 173–194.

[29] Fazekas I. and Chuprunov, A. (2003). Almost Sure Limit Theorems for the Pearson statistic, (Russian) *Theory Probab. Appl.*, **48** (1), 162–169.

[30] Fazekas, I., Chuprunov, A. and Túri, J. (2011). Inequalities and limit theorems for random allocations, *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A*, Vol. LXV, No. 1, 69–85.

[31] Fazekas I. and Noszály, Cs. (2003). Limit theorems for contaminated runs of heads, *manuscript*

[32] Fazekas, I. and Rychlik, Z. (2002). Almost sure functional limit theorems. *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A*, **56**, 1–18.

[33] Fazekas, I. and Rychlik, Z. (2003). Almost sure functional limit theorems for random fields, *Math. Nachr.*, **259**, 12–18.

[34] Fazekas, István, Túri, József. (2012). A Limit Theorem for Random Allocations *Journal of Mathematics Research*, **4**(1), 17–20

[35] Földes, A. (1979). The limit distribution of the longest head-run, *Periodica Mathematica Hungarica*, **10** (4), 301–310.

[36] Freedman, D. (1971). Brownian Motion and diffusion, Holden Day, San Francisco.

[37] Gnedenko, B.V., Kolmogorov, A.N. (1954). Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

[38] Gordon, L., Schilling, M.F., Watermann, M.S. (1986). An extreme value theory for long head runs, *Probability Theory and Related Fields* **72**, 279–287.

[39] Galen, R.S. (2000). Probability for Statisticians, Springer, New York, Berlin.

[40] Grenander, U. (1963). Probabilities on Algebraic Structures, John Wiley and Sons, New York, London.

[41] Guibas, L.J. and Odlyzko, A.M. (1980). Long repetitive patterns in random sequences, *Z. Wahrsch. Verv. Gebiete* **53**, 241–262.

[42] Hoffmann-Jørgensen, J. (1974). Sums of independent Banach Space valued random variables, *Studia Math.* **52**, 159–186.

[43] Hörmann, S. (2006). An extension of almost sure central limit theory, *Statist. Probab. Lett.***76** (2), 191–202.

[44] Ivanov, A.V. (1980). Converge of distributions of functionals of measurable fields, (Russian) *Ukrain. Math. Zh.* **32** (1), 27–34.

[45] Kolchin, V. (2003). Limit theorems for a generalized allocations scheme (Russian), *Diskret. Mat.***15** (4), 148–157;

[46] Kolchin, V., Sevastyanov, B.A. and Chistyakov, V.P. (1978). Random Allocations, Winston and Sons, Washington D.C.

[47] Kopociński, B. (1991). On the distribution of the longest succes-run in Bernoulli trials, *Mat. Stos.* **34**, 3–13.

[48] Kuang, Ji Chang (1984). Some generalizations of Stolz theorem, *Hunan Shiyuan Xuebao Ziran Kexue Ban*, **3**, 105–112.

[49] Lacey, M.T., and Philipp, W. (1990). A note on the almost sure central limit theorem, *Statistics and Probability Letters* **9** (2), 201–205.

[50] Major, P. (1998). Almost sure functional limit theorems I., The general case. *Studia Sci. Math. Hungar.* **34**, 273–304.

[51] Major, P. (2000). Almost sure functional limit theorems II. The case of independent random variables *Studia Sci. Math. Hungar.* **36**, 231–273.

[52] Matula, P. (2005). On almost sure limit theorems for positively dependt random variables, *Statist. Probab. Lett.* **74**, 59–66.

[53] Móri, T.F. (1993). On the strong law of large numbers for logarithmically weighted sums, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **36** (?), 35–46.

[54] Móri, T.F. (1993). The a.s. limit distribution of the longest head run, *Can. J. Math.*, **45**(6), 1245–1262.

[55] Móri, T.F. (1994). On long run of heads and tails, *Statistics and Probability Letters* **19**, 85–89.

[56] Móri, T.F. (1994). On long run of heads and tails II, *Periodica Mathematica Hungarica* **28**(1), 79–87.

[57] Muselli, M. (2000). Useful inequalities for the longest run distribution, *Statistics and Probability Letters* **46**, 239–249.

[58] Oliveira, P.E. and Suquet, Ch.(1998). Weak convergence in $L^p(]0,1[)$ of the uniform empirical process under dependence, *Statistics and Probability Letters* **39**, 363–370.

[59] Orzóg, M. and Rychlyk, Z. (2007). On the random functional central limit theorems with almost sure convergence, *Probab. Math. Statist.* **27** (1), 125–138.

[60] Philippou, I., Makri, F.S. (1986). Successes, Runs and Longest Runs, *Statistics and Probability Letters* **4**, 211–215.

[61] Ramachandran, B. (1969). On characteristic functions and moments, *Sankhyā* Ser. A. **31**, 1–12.

[62] Rényi, A. (1962). Three new proofs and generalization of a theorem Irving Weiss, *Magy. Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **7** (1–2), 203–214.

[63] Sato, Ken-Iti (1999). Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions, Cambridge University Press, Cambridge

[64] Schatte, P. (1988). On Strong Versions of the Central Limit Theorem, *Math. Nachr.* **137**, 249–256.

[65] Schilling, M.F. (1990). The longest run of heads, *The College Mathematics Journal* **21**(3), 196–207.

[66] Sen, P.K. (1998). Weak convergence of multidimensional empirical processes for stationary φ-mixing processes, *The Annals of Probability* **2**, 147–154.

[67] Seneta, E. (1976). Regular Variation Functions, Lecture Notes in Mathematics, **508**, Springer, Berlin.

[68] Timashev, A. N. (2000). On the asymptotics of large deviations in schemes for allocating particles to different cells of bounded sizes, *Teor. Veroyatnost. i Primenen. 45* (3), 521–535 (in Russian).

[69] Túri, J. (2009). Limit theorems for longest run, *Ann. Math. Inform.* **36**, 133–141.

[70] Túri, J. (2006). On the moments of sums of independent identically distributed random variables, *Math. Pannon.* **17** (2), 267–278.

[71] Túri, J. (2005). Some integral versions of almost sure limit theorems, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **48**, 119–125.

[72] Túri, J. (2002). Almost sure functional limit theorems in $L^p([0,1])^d$, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **45**, 159–169.

[73] Túri, J. (2002). Almost sure functional limit theorems in $L^p([0,1])$, *Acta Acad. Paedagog. Agriensis Sect. Mat.* **29**, 77–87.

[74] Túri, J. (2002). Almost sure functional limit theorems in $L^2([0,1])$, *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi.* **18**, 27–32.

[75] Tusnády, G. (1977). A remark on the approximation of the sample df in the multidimensional case, *Periodica Mathematica Hungarica* **8**, 53-55.

[76] Tusnády, G., Komlós, J. (1975). On sequences of "pure heads", *The Annals of Probability* **1975**(3), 273–304.

[77] Weiss, I. (1958). Limiting distribution in some occupancy problems, *Ann. Math. Statis.*, **29** (3), 878–884.